аппроксимируют комбинацией элементарных функций. Из них наиболее предпочтительными являются гиперболические функции, имеющие простое поведение на бесконечности. Например, локализованные волновые пакеты (солитоны) описывают функциями обратных степеней гиперболического косинуса, кинки принято описывать функциями гиперболического тангенса. Выбор модельных нелинейных уравнений, отличных от традиционного кубического НУШ, как правило, затрудняет это описание из-за отсутствия простых аналитических выражений для их решений. Однако, как показано в данной работе, некоторые обобщенные НУШ могут иметь частные решения довольно простого вида. Именно такие уравнения следует рассматривать как простые модели описания физических задач.

Например, если в эксперименте, который предположительно описывается кубическим НУШ, нерасплывающиеся волновые пакеты имеют неэкспоненциальное поведение на бесконечности, это может означать, что традиционное описание не подходит и кубическое НУШ следует подправить, введя в него дополнительно нелинейности других степеней $|\psi|$, или использовать другой вид нелинейности.

В некоторых случаях, когда восстановленное по экспериментальным данным особое решение мало отличается от известного кинкового или солитонного решения, можно довольно просто определить поправки к кубическому НУШ. Например, если кинкоподобное решение нелинейной задачи имеет вид

$$y = a\,\mathrm{th}(\gamma(z-z_0)) + \varepsilon a\,\mathrm{th}^3(\gamma(z-z_0)), \quad \varepsilon \ll 1,$$

это может означать, что кубическое НУШ следует заменить на рассмотренное ранее обобщенное НУШ с комбинацией нелинейностей третьей и пятой степеней, где коэффициенты α, β и параметр задачи E_0 выражаются приближенными формулами

$$\alpha = (1-8\varepsilon)\frac{\gamma^2}{a^2}, \;\; \beta = -2\varepsilon(1-4\varepsilon)\frac{\gamma^2}{a^4}, \;\; E_0 = 2(1-3\varepsilon)\gamma^2.$$

Заметим, что аналогичная кубическая поправка к кинковому решению была получена при исследовании распространения волн в анизотропных средах [8].

Автор благодарен покойному А. С. Вшивцеву за полезное обсуждение.

Литература

1. *Корниенко А.Г., Тернов И.М., Френкин А.Р., Чижов Г.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. №4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 4. P. 1).
2. *Корниенко А.Г., Френкин А.Р., Чижов Г.А.* // Там же. 1997. № 5. С. 10 (Ibid. 1997. No. 5. P. 12).
3. *Баринова Е.Г., Корниенко А.Г., Френкин А.Р., Чижов Г.А.* // Там же. 1998. №1. С. 12 (Ibid. 1998. No. 1. P. 14).
4. *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.
5. *Морозов А.И., Сигов А.С.* // УФН. 1994. **164**, №3. С. 243.
6. *Жак П де.* Идеи скейлинга в физике полимеров. М., 1982.
7. *Кетов С.В.* Нелинейные сигма-модели в квантовой теории поля и теории струн. Новосибирск, 1992.
8. *Вшивцев А.С., Перегудов Д.В., Татаринцев А.В.* // Физика Земли. 1995. №11. С. 62.

Поступила в редакцию
11.02.98

УДК 514.7, 530.182

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

А. В. Бадьин

(*кафедра математики*)

Рассматриваются поверхности с постоянной отрицательной внешней кривизной и отрицательной, отделенной от нуля внутренней кривизной в трехмерных римановых пространствах. Доказывается аналог теоремы Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве. Обсуждается вопрос о существенности условий доказанной теоремы. Предложен алгоритм построения контрпримера в случае, когда одно из условий нарушено.

В настоящей работе доказывается для римановых пространств аналог теоремы Гильберта [1] о поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Обобщение теоремы Гильберта в этом направлении рассматривалось в статье [2]. Данная работа обобщает результат статьи [2].

Всюду далее считается, что греческие индексы пробегают значения 1, 2; латинские — 1, 2, 3. Принято соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся тензорным индексам.

Пусть $M \in C^5$ — многообразие без края, $\dim(M) = 2$, $G \in C^2(M)$ — собственно риманова метрика, K_i — ее гауссова кривизна, $\overset{*}{R}_{\alpha\beta,\gamma\mu}$ — тензор кривизны пространства $(M,\, G)$.

Пусть $V \in C^5$ — многообразие без края, $\dim(V) = 3$, $g \in C^2(V)$ — собственно риманова метрика, $R_{ij,kn}$ — тензор кривизны пространства $(V,\, g)$.

Пусть $\varphi : M \to V$, $\varphi \in C^5(M)$ — изометрическое погружение. Зафиксируем $u_0 \in M$. Можно указать такую координатную окрестность Ω точки u_0 и такую координатную окрестность $\widetilde{\Omega}$ точки $\varphi(u_0)$, что $\varphi(\Omega) \subseteq \widetilde{\Omega}$. Координаты в $\widetilde{\Omega}$ обозначим z^k $(k = \overline{1,3})$, а в Ω — u^α ($\alpha = 1, 2$). Обозначим $\xi^k_\alpha(u) = \dfrac{\partial z^k}{\partial u^\alpha}(u)$, $\xi^k_\alpha(u) \in C^4(\Omega)$; здесь $\xi_1(u)$, $\xi_2(u)$ — векторы в касательном пространстве к многообразию V в точке $\varphi(u)$, $\xi(u)$ — смешанный тензор на поверхности $\varphi(M)$ в точке u [3, с. 546]. Заметим, что так как тензор $\xi(u)$ не зависит от выбора локальных координат z^k и u^α, то тензорное поле ξ фактически задано на всем множестве M. На множестве Ω можно построить поле $\nu \in C^4(\Omega)$ единичных векторов, ортогональных $\xi_1(u)$, $\xi_2(u)$, здесь $\nu(u)$ — вектор в касательном пространстве к многообразию V в точке $\varphi(u)$. Введем обозначения: B — второй основной тензор поверхности $\varphi(M)$; K_e — внешняя кривизна поверхности $(K_e = \det(B)/\det(G))$.

Рассмотрим множество Q погружений φ со следующими свойствами:

1°) $K_e \equiv \mathrm{const} < 0$;

2°) в окрестности Ω каждой точки $u_0 \in M$:

$$R_{ij,kn}(\varphi(u))\xi^i_\alpha\xi^j_\beta\xi^k_\gamma\nu^n = 0.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть* $K_i \leqslant \mathrm{const} < 0$, (M, G) — *полное пространство. Тогда множество* Q *пусто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: $\exists\varphi$ ($\varphi \in \Omega$). Без потери общности считаем, что M гомеоморфно $\mathbf{R}^2$, в противном случае мы можем перейти к рассмотрению универсальной накрывающей M. Выпишем в локальных координатах уравнения Петерсона–Кодацци в области Ω:

$$\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma} = -R_{ij,kn}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta\xi^k_\gamma\nu^n.$$

Здесь $b_{\alpha\gamma}$ — компоненты тензора B. В силу условия 2°

$$\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma} = 0. \tag{1}$$

Кроме того,

$$\det(B) = K_e \det(G). \tag{2}$$

Тензоры, входящие в уравнения (1) и (2), не зависят от выбора локальных координат, поэтому фактически уравнения (1) и (2) справедливы на всем множестве M. Кроме того, компоненты тензоров, входящих в (1) и (2), не зависят от выбора координат в V.

Далее следуем доказательству теоремы Гильберта, изложенному в работе [4, с. 328]. Используя уравнения (1), (2) и условие 1°, получим, что в некоторой окрестности Ω точки u_0 можно с помощью C^3-гладкой замены ввести координаты (x, y), в которых

$$b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = b_{21} = \sin(\omega),$$

а метрика G имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + 2\cos(\omega)\,dx dy + dy^2.$$

Здесь $\omega \in C^2$, $0 < \omega < \pi$. Как показано в работе [5], координаты (x, y) можно ввести на всем множестве M, при этом в силу полноты метрики G областью изменения переменных (x, y) является $\mathbf{R}^2$. Выписывая определение гауссовой кривизны метрики G, убедимся, что функция ω удовлетворяет уравнению Чебышева:

$$\omega_{xy} = -K_i \sin(\omega). \tag{3}$$

Однако так как $K_i \leqslant \mathrm{const} < 0$, то, повторяя рассуждения Гильберта для уравнения sin-Гордона, получим, что уравнение (3) не имеет регулярного решения на всей плоскости, удовлетворяющего условию $0 < \omega < \pi$. Это противоречие доказывает теорему. ■

Условие 2° выполняется, например, если в каждой точке множества $\varphi(M)$ кривизна V одинакова по всем двумерным направлениям и равна K. Действительно, тогда

$$R_{ij,kn} = K(g_{ik}g_{jn} - g_{in}g_{jk}),$$

$$R_{ij,kn}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta\xi^k_\gamma\nu^n = K(G_{\alpha\gamma}(\xi_\beta, \nu) - (\xi_\alpha, \nu)G_{\beta\gamma}) = 0.$$

Если, кроме того, $K_i - K \equiv \mathrm{const} < 0$, то выполняется и условие 1°. Действительно, в этом случае в силу формулы Гаусса [3, с. 557]

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta,\gamma\mu} = R_{ij,kn}\xi^i_\alpha\xi^j_\beta\xi^k_\gamma\xi^n_\mu + b_{\alpha\gamma}b_{\beta\mu} - b_{\beta\gamma}b_{\alpha\mu}$$

справедливо равенство $K_e = K_i - K$.

В частности, плоскость Лобачевского не может быть C^5-гладко изометрически погружена в S^3.

Если требование $K_i \leqslant \mathrm{const} < 0$ нарушено, то утверждение теоремы 1 перестает быть справедливым. В качестве контрпримера можно привести тор Клиффорда.

Если не выполнено требование 2°, то утверждение теоремы 1 также перестает быть справедливым. Контрпример можно строить разными способами. Докажем утверждение, которое позволяет построить множество контрпримеров, причем в качестве объемлющих пространств выступают пространства положительной кривизны.

Пусть M гомеоморфно $D \subseteq \mathbf{R}^2$ ($D \neq \varnothing$, D — открытое) и на M можно ввести глобальные координаты $(x, y) \in D$. Пусть φ — изометрическое вложение (M, G) в (V, g). Введем в некоторой окрестности $\varphi(M)$ полугеодезические координаты (x, y, s) с базой $\varphi(M)$.

Рассмотрим уравнения

$$\begin{gathered} ln - m^2 = K_i - \frac{R_{12,12}}{\det(G)}, \\ n_x - m_y + \Gamma^1_{11}n - 2\Gamma^1_{12}m + \Gamma^1_{22}l = -\frac{R_{12,13}}{\sqrt{\det(G)}}, \\ l_y - m_x + \Gamma^2_{11}n - 2\Gamma^2_{12}m + \Gamma^2_{22}l = -\frac{R_{12,23}}{\sqrt{\det(G)}}. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — символы Кристоффеля метрики G; l, n, $m \in C^1(D)$, $R_{12,12}$, $R_{12,13}$, $R_{12,23} \in C^0(D)$ — некоторые функции.

Сформулируем набор вспомогательных условий.

($*$) Пусть на D заданы функции l, n, m, $R_{12,12}$, $R_{12,13}$, $R_{12,23}$, удовлетворяющие уравнениям (4). Пусть, кроме того, заданы функции $R_{13,13}$, $R_{13,23}$, $R_{23,23} \in C^0(D)$ (тогда можно считать, что задана занумерованная совокупность функций $R_{ij,kn}$ со свойствами: $R_{ij,kn} = -R_{ji,kn}$, $R_{ij,kn} = R_{kn,ij}$).

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая теорема Э. Г. Позняка.

Т е о р е м а Э. Г. П о з н я к а (о восстановлении метрики объемлющего пространства). *Пусть выполнено условие* ($*$), *тогда можно указать такое риманово пространство* (V, g) *и такое изометрическое вложение* φ *пространства* (M, g) *в* (V, g), *что функции* $R_{ij,kn}$ *будут компонентами тензора кривизны пространства* V *в точках поверхности* $\varphi(M)$ *в полугеодезических координатах* (x, y, s).

Эта теорема была подготовлена Э. Г. Позняком к публикации, однако статья «Изометрические погружения римановых пространств», в которую входила данная теорема, не была опубликована при жизни Э. Г. Позняка. Формулировка и доказательство теоремы были сообщены автору Э. Г. Позняком в частной беседе.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы Э. Г. Позняка основано на следующих рассуждениях. Пусть искомые V, g, φ уже найдены. Введем в окрестности $\varphi(M)$ полугеодезические координаты (x, y, s) с базой $\varphi(M)$, тогда $\varphi(M)$ определяется требованиями: $s = 0$, $(x, y) \in D$. По компонентам $R_{ij,kn}$ на $\varphi(M)$ можно определить $\partial g_{\alpha\beta}/\partial s$ и $\partial^2 g_{\alpha\beta}/\partial s^2$ на $\varphi(M)$. Зная выражения для указанных производных, можно предложить способ построения g в окрестности $\varphi(M)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $K_i \geqslant \mathrm{const}$. *Для всякого пространства* (M, G) *и всякого числа* $\Delta > 0$ *можно указать такую тройку* (V, g, φ), *что* $K_e \equiv \mathrm{const} < 0$ *и* $\forall z \in V \ \ \forall \xi \ \ (K(z, \xi) \geqslant \Delta)$; *здесь* ξ *— простой бивектор,* $K(z, \xi)$ *— секционная кривизна пространства* (V, g) *в точке* z *в двумерном направлении* ξ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем на M глобальные координаты (x, y), рассмотрим уравнения (4). Возьмем $\delta \in (0, +\infty)$; так как $K_i \geqslant \mathrm{const}$, то значение δ может быть таким, что $\delta + K_i \geqslant 2\Delta$. Положим

$$R_{12,12} = (K_i + \delta)\det(G), \quad R_{12,13} = 2\sqrt{\delta}\,\Gamma^1_{12}\sqrt{\det(G)},$$

$$R_{12,23} = 2\sqrt{\delta}\,\Gamma^2_{12}\sqrt{\det(G)}; \quad l \equiv 0, \quad n \equiv 0, \quad m \equiv \sqrt{\delta}.$$

Тогда уравнения (4) будут удовлетворены. Положим $R_{13,23} = 0$, $R_{13,13} = \Delta + 4(R_{12,13})^2/R_{12,12}$, $R_{23,23} = \Delta + 4(R_{12,23})^2/R_{12,12}$. Рассмотрим V, g, φ, о которых говорится в теореме Э. Г. Позняка. Введем в окрестности $\varphi(M)$ полугеодезические координаты (x, y, s) с базой $\varphi(M)$. В силу формулы Гаусса [3, с. 557] $K_e = -\delta$. Пусть p^{ij} — простой единичный бивектор в точке $z = \varphi(u)$. Простой расчет показывает, что $K(z, p) \geqslant 4\Delta\Big(\det(G)(p^{12})^2 + (p^{13})^2 + (p^{23})^2\Big)$.

В полугеодезической системе координат в точках $\varphi(M)$: $g_{33} = 1$, $g_{3\alpha} = g_{\alpha 3} = 0$, $g_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}$. Зафиксируем $u_0 \in M$. Можно считать, что $G_{\alpha\beta}(u_0) = \delta^\alpha_\beta$, тогда

$$\det(G(u_0)) = 1, \quad (p^{12})^2 + (p^{13})^2 + (p^{23})^2 = 1,$$

поэтому $K(\varphi(u_0), p) \geqslant 4\Delta$. Очевидно, можно выбрать такую окрестность $\widetilde{V}$ поверхности $\varphi(M)$, что $\forall z \in \widetilde{V} \ \forall \xi \ \ (K(z, \xi) \geqslant \Delta)$, тогда $(\widetilde{V}, g, \varphi)$ — искомая тройка. ■

Литература

1. *Гильберт Д.* Основания геометрии. (Добавление V). М.; Л., 1948.
2. *Spivak M.* // Proc. Symp. in Pure Mathematics. 1975. V. 27, Pt. 1. P. 245.
3. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1953.
4. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. М., 1990.
5. *Ефимов Н.В.* // УМН. 1966. **21**, №5. С. 3.

Поступила в редакцию 21.01.98