

Таким образом, распадная неустойчивость высоко-частотной волны в вязкоупругой среде возможна, если значение амплитуды этой волны превышает порог (28). В противном случае нелинейные взаимодействия волн проявляются в виде пространственных биений их амплитуд и мощностей. Формулы для расчетов биений легко получить из (6)–(12), рассматривая случай $\Delta = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Для систем, аналогичных (6)–(12), он был впервые исследован в оптике и радиофизике [12].

Пусть в источнике при $x = 0$ имеют место условия

$$\begin{aligned} A_1(0) &= A_{10}, & A_2(0) &= 0, \\ A_h(0) &= A_{h0}, & \Phi(0) &= \Phi_0 = \pi/2. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение системы (6)–(12) при условиях (29), $\delta_1 = \delta_2 = 0$ и $\Delta = 0$ выражается через эллиптические функции sn, cn и dn:

$$A_1 = (\sigma_1/\sigma_3)^{1/2} \frac{A_{h0}}{k} \operatorname{dn} \left[K(k) - A_{h0} \frac{x}{k} (\sigma_1\sigma_2)^{1/2} \right], \quad (30)$$

$$A_2 = (\sigma_2/\sigma_3)^{1/2} A_{10} \operatorname{cn} \left[K(k) - A_{h0} \frac{x}{k} (\sigma_1\sigma_2)^{1/2} \right], \quad (31)$$

$$A_3 \equiv A_h = A_{h0} \operatorname{sn} \left[K(k) - A_{h0} \frac{x}{k} (\sigma_1\sigma_2)^{1/2} \right]. \quad (32)$$

Здесь

$$K(k) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \quad (33)$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. Решение (30)–(33) описывает биения амплитуд взаимодействующих волн с пространственным периодом

$$\Lambda_0 \cong K(k)/A_{h0} (\sigma_1\sigma_2)^{1/2}. \quad (34)$$

Максимальное усиление низкочастотного сигнала определяется формулой

$$(I_1)_{\max}/I_{10} = 1 + \omega_1 A_{h0}^2 / \omega_h A_{10}^2. \quad (35)$$

Следовательно, если отношение $\omega_1\omega_h$ не слишком мало, кпд параметрического усилителя низкочастотного сейсмосигнала может достигать единиц и десятков процентов. Потери и отклонения от условий синхронизма ухудшают характеристики усилителя.

Благодарим Российский фонд фундаментальных исследований за поддержку (грант №95-05-16028a).

Литература

1. Береснев И. А., Соловьев В. С., Шалашов Г. М. // Проблемы нелинейной сейсмологии. М., 1987. С. 180.
2. Соловьев В. С. // Там же. С. 164.
3. Николаев А. В. // Вестн. АН СССР. 1984. № 10. С. 5.
4. Рыкунов Л. Н. Микросейсм. М., 1967.
5. Николаевский В. Н. // ДАН СССР. 1989. 307, № 3. С. 570.
6. Арсеньев С. А., Рыкунов Л. Н., Шелковников Н. К. // ДАН. 1994. 338, № 2. С. 225.
7. Арсеньев С. А., Вахрушев М. М., Шелковников Н. К. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 6. С. 80.
8. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., 1990.
9. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. М., 1978.
10. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.
11. Ахманов С. А., Кравцов Ю. А. // Изв. вузов, Радиофизика. 1962. 5, № 2. С. 144.
12. Погорелова Э. В., Хохлов Р. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1962. № 5. С. 62.

Поступила в редакцию
09.09.96

УДК 550.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВНУТРЕННЕГО ЯДРА ЗЕМЛИ ДЛЯ НЕРАВНОВЕСНОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

С. Л. Пасынок

(ГАИШ)

Решена задача о влиянии оболочки земного ядра на колебания внутреннего ядра Земли. Получены уточненные (по сравнению с Шлихтером и Буссе) формулы для частот колебаний. Оказалось, что выбор модели оболочки мало влияет на частоту колебаний и значительно влияет на смещение ядра.

Введение

Знание строения и характера движения внутреннего ядра Земли важно для решения задач земного магнетизма, геофизики, астрономии. Вполне возможна связь этого явления с землетрясениями.

Методика исследований

Целью настоящей работы является оценка возможного смещения внутреннего ядра Земли и частот его свободных колебаний в поле тяготения твердой несимметричной оболочки Земли и жидкого ядра.

Движение твердого ядра Земли исследовано в следующей модели. Твердое ядро считалось однородным и сферическим, плотность его σ_i , масса m_i , радиус r_i . Оно погружено в однородное жидкое ядро с плотностью σ_e , массой m_e , ограниченное сферической границей радиуса r_e . Ось вращения была совмещена с осью Oz прямоугольной декартовой системы координат с началом в центре Земли и осями, жестко связанными с ней. Уравнение движения твердого ядра имеет вид

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = \sum_j \frac{F_k^{(j)}}{m_j}, \quad (1)$$

где $F_k^{(j)}$ — k -компонента j -й силы, действующей на ядро; $k = 1, 2, 3$.

Аномальная (негидростатическая) часть гравитационных сил моделировалась простым слоем, расположенным на границе ядро-мантия. Его силовая функция ΔU в области, занятой ядром, представима в виде разложения по шаровым функциям [1]:

$$\Delta U = \frac{1}{r_e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r}{r_e}\right)^n \times (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta).$$

В процессе решения (1) использовались члены с $n = 1, 2$. Выражение для силы Архимеда было получено путем интегрирования поверхностной плотности сил гидростатического давления по поверхности твердого ядра. Гидростатическое давление было получено в результате решения уравнения гидростатического равновесия. Тензор присоединенных масс в силу симметрий задачи был взят в следующем диагональном виде:

$$m_{11} = m_i \frac{\sigma_e}{\sigma_i} \alpha_e, \quad m_{22} = m_i \frac{\sigma_e}{\sigma_i} \alpha_e, \quad m_{33} = m_i \frac{\sigma_e}{\sigma_i} \alpha_e, \\ m_{ik} = 0 \quad \text{при } i \neq k,$$

где $i, k = 1, 2, 3$, а α и далее α_p — коэффициенты, зависящие от внутреннего строения ядра Земли. Оказалось, что магнитные силы при правдоподобных предположениях о величине магнитного момента твердого ядра возможно не учитывать. Тогда мы приходим к уравнениям движения твердого ядра следующего вида:

$$\left(1 + \alpha_e \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right) \frac{d^2 x}{dt^2} - 2\Omega \frac{dy}{dt} - \Omega^2 x \left(1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right) = \\ = -\frac{4}{3} \pi G \sigma_e \left(1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right) x + \frac{A_{11}}{r_e^2} + \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\left(1 + \alpha_e \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right) \frac{d^2 y}{dt^2} - 2\Omega \frac{dx}{dt} - \Omega^2 y \left(1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right) = \\ = -\frac{4}{3} \pi G \sigma_e \left(1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right) y + \frac{B_{11}}{r_e^2} + \frac{\partial R}{\partial y},$$

$$\left(1 + \alpha_p \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right) \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{4}{3} \pi G \sigma_e \left(1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right) z + \frac{A_{10}}{r_e^2} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

где $R = \Delta u - \frac{A_{11}}{r_e^2} x - \frac{B_{11}}{r_e^2} y - \frac{A_{10}}{r_e^2} z$ — возмущающая функция.

Введем обозначения:

$$\Omega' = \frac{\Omega}{1 + \alpha_e \frac{\sigma_e}{\sigma_i}},$$

$$\omega_p^2 = \frac{(4/3) \pi G \sigma_e \left(1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)}{1 + \alpha_p \frac{\sigma_e}{\sigma_i}},$$

$$\omega_e^2 = \frac{((4/3) \pi G \sigma_e - \Omega^2) \left(1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)}{1 + \alpha_e \frac{\sigma_e}{\sigma_i}}$$

и сделаем замену переменных: $x'^i = x^i - x_0^i$, где

$$x_0^i = \left(\frac{A_{11}}{\left(1 + \alpha_e \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right) r_e^2 \omega_e^2}, \frac{B_{11}}{\left(1 + \alpha_e \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right) r_e^2 \omega_e^2}, \frac{A_{10}}{\left(1 + \alpha_p \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right) r_e^2 \omega_p^2} \right)$$

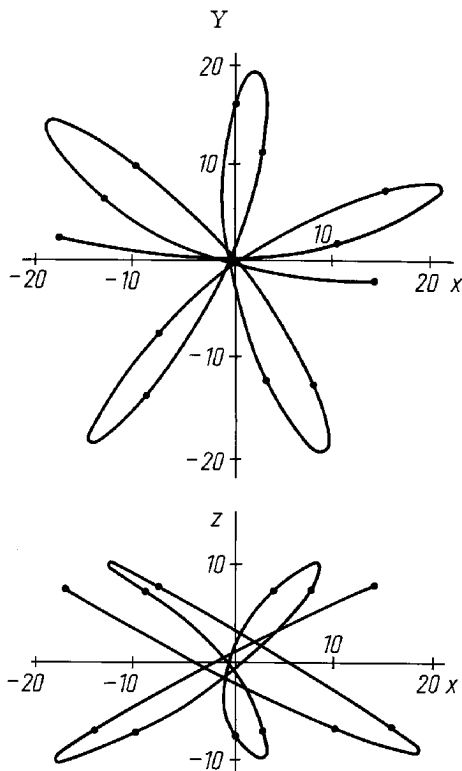
— вектор точки положения равновесия твердого ядра в невозмущенной задаче. Тогда система уравнений примет вид

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} - 2\Omega' \frac{dy'}{dt} + \omega_e^2 x' = \frac{1}{\left(1 + \alpha_e \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)} \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} - 2\Omega' \frac{dx'}{dt} + \omega_e^2 y' = \frac{1}{\left(1 + \alpha_e \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)} \frac{\partial R}{\partial y}, \quad (2) \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} + \omega_e^2 z' = \frac{1}{\left(1 + \alpha_p \frac{\sigma_e}{\sigma_i}\right)} \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Полагая в невозмущенном случае правые части в (2) равными нулю и обозначая $w_{\pm} = -\Omega' \pm \sqrt{\Omega'^2 + \omega_e^2}$, получим невозмущенное решение в форме суперпозиции двух линейно независимых решений вида

$$x' = A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \\ y' = A_y \sin(\omega t + \varphi_y), \\ z' = A_z \cos(\omega_p t + \varphi_z),$$

где ω принимает значения w_{\pm} , а $A_x = A_y$. То есть твердое ядро в этом приближении колеблется около положения равновесия вдоль оси Oz , а в плоскости Oxy его движение представляет собой суперпозицию движений по двум концентрическим эллипсам (рисунок).



Движение центра твердого ядра при $A_x = A_y = A_z = 10$. Точки расставлены через каждые четверть периода колебаний ядра вдоль оси Oz

Возмущенная задача решалась для квадрупольной части возмущающей функции:

$$R = Q = \left(3A_{22} - \frac{A_{20}}{2}\right)x^2 - \left(3A_{22} + \frac{A_{20}}{2}\right)y^2 + A_{20}z^2 + 3A_{21}xz + 3B_{21}yz + 6B_{22}xy.$$

Вводя поправку к координатам положения равновесия $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, равную $\sum_{n=1}^{\infty} (\Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n)$, где

$$\Delta x_n = \frac{(1 - \sigma_e/\sigma_i)}{r_e^3 \omega_e^2 (1 + \alpha_e \sigma_e/\sigma_i)} ((6A_{22} - A_{20})\Delta x_{n-1} + 3A_{21}\Delta z_{n-1} + 6B_{22}\Delta y_{n-1}),$$

$$\Delta y_n = \frac{(1 - \sigma_e/\sigma_i)}{r_e^3 \omega_e^2 (1 + \alpha_e \sigma_e/\sigma_i)} (6B_{22}\Delta x_{n-1} - (6A_{22} - A_{20})\Delta y_{n-1} + 3B_{21}\Delta z_{n-1}),$$

$$\Delta z_n = \frac{(1 - \sigma_e/\sigma_i)}{r_e^3 \omega_e^2 (1 + \alpha_p \sigma_e/\sigma_i)} (3A_{21}\Delta x_{n-1} + 3B_{21}\Delta y_{n-1} + 2A_{20}\Delta z_{n-1}),$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad \Delta x_0^i = x_0^i,$$

мы запишем уравнения движения в форме (2), где используем уточненные штрихованные координаты и $\partial R(x'_k)/\partial x'_j$.

В результате решения этих уравнений получим, что возмущенное решение представляет собой суперпози-

цию двух движений вида

$$x' = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x),$$

$$y' = A_y \sin(\omega_y t + \varphi_y),$$

$$z' = A_z \cos(\omega_z t + \varphi_z),$$

где ω_x и ω_y принимают значения $\omega_1^{(k)}$ и $\omega_2^{(k)}$, а $\omega_z = \omega_3$,

$$\omega_j^{(k)} = \omega_k + (-1)^j \frac{(6A_{22} + (-1)^j A_{20})\Sigma}{2\omega_k r_e^3 A_e},$$

$$\omega_3 = \omega_p - \frac{A_{20}\Sigma}{\omega_p r_e^3 A_p},$$

$$\Sigma = 1 - \frac{\sigma_e}{\sigma_i}, \quad k = \pm, \quad A_{e,p} = 1 + \frac{\sigma_e}{\sigma_i} \alpha_{e,p}, \quad j = 1, 2.$$

Амплитуды и фазы изменяются со временем в соответствии с уравнениями

$$\frac{dA_x}{dt} = -\frac{\Sigma}{2\omega_k r_e^3 A_e} ((6A_{22} + A_{20})A_x \cos 2\Phi_x + 3A_{21}A_z (\sin(\Phi_x + \Phi_z) + \sin(\Phi_x - \Phi_z)) + 6B_{22}A_y (\cos(\Phi_x - \Phi_y) - \cos(\Phi_x + \Phi_y))),$$

$$\frac{dA_y}{dt} = -\frac{\Sigma}{2\omega_k r_e^3 A_e} ((6A_{22} + A_{20})A_y \sin 2\Phi_y - 3B_{21}A_z (\cos(\Phi_y + \Phi_z) + \cos(\Phi_y - \Phi_z)) - 6B_{22}A_x (\cos(\Phi_x + \Phi_y) + \cos(\Phi_x - \Phi_y))),$$

$$\frac{dA_z}{dt} = -\frac{\Sigma}{2\omega_p r_e^3 A_p} (A_{20}A_z \sin 2\Phi_z + 3A_{21}A_x (\sin(\Phi_x + \Phi_z) + \sin(\Phi_z - \Phi_x)) + 3B_{21}A_y (\cos(\Phi_y - \Phi_z) - \cos(\Phi_y + \Phi_z))),$$

$$\frac{d\varphi_x}{dt} = -\frac{\Sigma}{2\omega_k r_e^3 A_e A_x} ((6A_{22} + A_{20})A_x \cos 2\Phi_x + 3A_{21}A_z (\cos(\Phi_x + \Phi_z) + \cos(\Phi_x - \Phi_z)) + 6B_{22}A_y (\sin(\Phi_x + \Phi_y) - \sin(\Phi_x - \Phi_y))),$$

$$\frac{d\varphi_y}{dt} = -\frac{\Sigma}{2\omega_k r_e^3 A_e A_y} ((6A_{22} + A_{20})A_y \cos 2\Phi_y + 3B_{21}A_z (\sin(\Phi_y + \Phi_z) + \sin(\Phi_y - \Phi_z)) + 6B_{22}A_x (\sin(\Phi_x + \Phi_y) - \sin(\Phi_x - \Phi_y))),$$

$$\frac{d\varphi_z}{dt} = -\frac{\Sigma}{2\omega_p r_e^3 A_p A_z} (2A_{20}A_z \cos 2\Phi_z + 3B_{21}A_y (\sin(\Phi_y + \Phi_z) + \sin(\Phi_y - \Phi_z)) + 3A_{21}A_x (\cos(\Phi_x + \Phi_z) + \cos(\Phi_x - \Phi_z))),$$

где $\Phi_i = \omega_i t + \varphi_i$, $i = x, y, z$. Для внесения полной ясности необходимо отметить, что возмущенные уравнения с данной возмущающей функцией все еще являются линейными и могут быть проинтегрированы точно. Предложенный метод решения был применен в силу большей наглядности результата, записанного именно в такой форме, причем практически без ущерба для точности. Кроме того, в дальнейшем планируется использовать возмущающую функцию, ведущую к нелинейным уравнениям.

Для максимальной вариации ускорения свободного падения, обусловленной полярными колебаниями, в точке с географической широтой φ было получено

$$\Delta g = \frac{8}{3} \pi G \left(\frac{r_i}{R}\right)^3 (\sigma_i - \sigma_e) A \sin \varphi, \quad (3)$$

где A — амплитуда колебаний, а R — средний радиус Земли.

Используя известную формулу для энергии гармонических колебаний:

$$E = \frac{m_i \omega^2 A^2}{2},$$

где ω — частота полярных колебаний, а также (3), нетрудно получить для энергии колебаний следующую оценку:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 r_i^3 \sigma_e (\sigma_i - \sigma_e) G A^2. \quad (4)$$

Формулы (4) и (3) находятся в соответствии с результатами Буссе [2].

Обсуждение результатов

Полученные оценки показывают, что некоторые из частот попадают внутрь приливного окна (речь идет о периодах в диапазоне от часа до полусуток) и поэтому свободные колебания ядра Земли все же возможно обнаружить при современной точности и частотной обработке наблюдений.

Для модели 3 в работе [3] $A_{11} = -9,2113387$, $B_{11} = -2,1512055$, $A_{10} = 3,1725687$, $A_{22} = 41,160872$, $A_{20} = -33,121257$ (в $10^8 \text{ м}^3/\text{с}^2$). Эти коэффициенты связаны с безразмерными, приведенными в работе [3], соотношениями

$$A_{nm} = GM \left(\frac{a}{r_e} \right)^n C_{nm}, \quad B_{nm} = GM \left(\frac{a}{r_e} \right)^n D_{nm},$$

A (м)	0,01	0,1	1	10	100	1000
Δg (м/с ²)	$1,7 \cdot 10^{-11}$	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
E (эрг)	$7,6 \cdot 10^{18}$	$7,6 \cdot 10^{20}$	$7,6 \cdot 10^{22}$	$7,6 \cdot 10^{24}$	$7,6 \cdot 10^{26}$	$7,6 \cdot 10^{28}$

Заключение

В дальнейшем планируется уточнить коэффициенты в разложении возмущающего потенциала и местонахождение положения равновесия твердого ядра.

Выражаю благодарность научному руководителю д-ру физ.-мат. наук Н. А. Чуйковой за плодотворные дискуссии и помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-05-64342).

где a — большая полуось земного эллипсоида, G — гравитационная постоянная, а M — масса Земли. Так как тензор присоединенных масс зависит от внутреннего строения ядра Земли и точно не известен, то при вычислении нижеследующих результатов он был положен равным нулю. Результаты же эти таковы:

$$x_0 = -479,88, \quad y_0 = -299,40, \quad z_0 = 165,05 \quad (\text{в м});$$

частоты (в 10^{-4} с^{-1}):

$$\begin{aligned} \omega_1^{(1)} &= 3,322369, & \omega_1^{(2)} &= -4,77695, \\ \omega_2^{(1)} &= 3,323207, & \omega_2^{(2)} &= -4,77751, \\ \omega_3 &= 3,987479; \end{aligned}$$

соответствующие периоды:

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} &= 5 \text{ ч } 15 \text{ мин } 11,76 \text{ с}, & T_1^{(2)} &= 3 \text{ ч } 39 \text{ мин } 13,12 \text{ с}, \\ T_2^{(1)} &= 5 \text{ ч } 15 \text{ мин } 6,99 \text{ с}, & T_2^{(2)} &= 3 \text{ ч } 39 \text{ мин } 11,51 \text{ с}, \\ T_3 &= 4 \text{ ч } 22 \text{ мин } 37,29 \text{ с}. \end{aligned}$$

Для сравнения: невозмущенные $w_+ = 3,322844 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $w_- = -4,777285 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, а соответствующие периоды: $T_+ = 5 \text{ ч } 15 \text{ мин } 9,06 \text{ с}$, $T_- = 3 \text{ ч } 39 \text{ мин } 12,21 \text{ с}$. Для широты $\varphi = 45^\circ$ в случае полярных колебаний были получены данные, приведенные в таблице.

Для поддержания и возбуждения таких колебаний достаточно энергии землетрясений.

Литература

1. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М., 1961. С. 260.
2. Busse F. H. // J. Geophys. Res. 1974. 79, N 5. P. 753.
3. Чуйкова Н. А., Казарян С. А., Пасынок С. Л. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 2. С. 40 (Moscow University Phys. Bull. 1977. № 2).

Поступила в редакцию
18.12.96