

Как и в случае обычных ленточных графов, числа точек и ребер на границе поверхности сокращают друг друга, поэтому их в формулах не пишем.

Обозначим через χ_{m_k} эйлерову характеристику сферы с m_k отверстиями. Поскольку $\chi_{m_k} = 2 - m_k$, имеем

$$I - P + \sum_{k=1}^V \chi_{m_k} = \chi. \quad (3)$$

Найдем $1/N$ разложение для обобщенных ленточных графов. Рассмотрим обобщенный ленточный граф G . Обозначим через $g_r^{(m)}$ константу взаимодействия, соответствующую вершине с r ребрами, разбитыми на m групп.

Теорема 2. Пусть $g_r^{(m)} \sim N^{\chi m - r/2}$. Тогда фейнмановский интеграл зависит от N

$$X_G \sim N^{\chi - \frac{R}{2}}.$$

Используя (2) и (3), запишем систему

$$\begin{cases} \sum_{v \in G} \frac{r}{2} = P + \frac{R}{2}, \\ I - P + \sum_{v \in G} \chi_m = \chi. \end{cases}$$

Здесь суммы идут по всем вершинам G . Выражая P , находим

$$I + \sum_{v \in G} (\chi_m - \frac{r}{2}) = \chi - \frac{R}{2}.$$

Если $g_r^{(m)} \sim N^{\chi m - r/2}$, то

$$X_G = N^I \cdot \prod_{v \in G} g_r^{(m)} \sim N^{\chi - R/2}.$$

Автор благодарен В.В. Белокурову за ценные замечания и внимание к работе. Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS 00-334, гранта РФФИ № 01-02-17488 и гранта Президента РФ № 00-15-99296.

Литература

1. 'tHooft G. // Nucl. Phys. B. 1974. **72**. P. 461.
2. Maldacena J.M. // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. **2**. P. 231.
3. Gubser S.S., Klebanov I.R., Polyakov A.M. // Phys. Lett. B. 1998. **428**. P. 105.
4. Witten E. // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. **2**. P. 253.
5. Berenstein D., Maldacena J., Nastase H. // JHEP. 2002. 04. 013.
6. Aharony O., Gubser S.S., Maldacena J., Ooguri H., Oz Y. // Phys. Reports. 2000. **323**. P. 183.
7. Aref'eva I.Ya., Belov D.M., Koshelev A.S. // Phys. Lett. B. 2000. **476**. P. 431.
8. Aref'eva I.Ya., Zubarev A.P. // Phys. Lett. B. 1996. **386**. P. 258.
9. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
10. Malyshev D.V. // JHEP. 2002. 05. 013.
11. Witten E. // hep-th/0112258.
12. Klebanov I.R., Witten E. // Nucl. Phys. B. 1999. **556**. P. 89.
13. Aharony O., Berkooz M., Silverstein E. // JHEP. 2001. 08. 006.
14. Berkooz M., Sever A., Shomer A. // JHEP. 2002. 05. 034.

Поступила в редакцию
29.05.02

УДК 517.958; 621.372.8

**ЗАМЕЧАНИЕ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА**

М. Д. Малых

(кафедра математики)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Рассмотрены погруженные в непрерывный спектр собственные значения спектральных задач для волновода с заполнением. Найден пример возмущения заполнения волновода, при котором исчезают погруженные в непрерывный спектр собственные значения спектральной задачи для волновода с заполнением.

В работах [1–2] показано, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения спектральной задачи неустойчивы к малым возмущениям заполнения волновода.

Пусть необходимо решить задачу на собственные значения в плоском волноводе $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, y \in [0, +\pi]\}$: найти число ϵ и функцию $u \neq 0$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \Delta u + \epsilon q(x, y)u = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \end{cases} \quad (1)$$

где $q(x, y)$ — заданная кусочно-непрерывная функция, характеризующая заполнение волновода, а $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ — соответствующее пространство Соболева.

Будем считать, что волновод заполнен локально нерегулярно, причем

$$\text{Supp}[q(x, y) - 1] \subset \Omega' = \{x \in [-1, 1], y \in [0, +\pi]\},$$

и в нем отсутствует затухание, т.е. функция $q(x, y)$ — вещественная.

Заметим, что собственные значения оператора Лапласа задачи Дирихле α_n^2 на сечении Ω равны n^2 , где $n = 1, 2, \dots$, а соответствующие им собственные функции $\psi_n(y)$ равны $\sin ny$. Поэтому нижняя граница непрерывного спектра задачи (1) есть $\alpha_1^2 = 1$.

Возьмем в качестве невозмущенного заполнения типа простой вставки:

$$q_0(x) = \begin{cases} q_0, & x \in (-1, +1) \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В статье [3] показано, что при достаточно малых положительных $q_0 - 1$ существует вложенное собственное значение $e_0 > \alpha_1^2$ задачи (1) с $q(x, y) = q_0(x)$, которому отвечает собственная функция, имеющая на отрезке $(-1, +1)$ вид

$$u_0(x, y) = u_2(x) \sin 2y,$$

где $u_2(x) = \cos \gamma' x$, а $\gamma' = \sqrt{\alpha_2^2 - e_0 q_0}$. Вложенное в непрерывный спектр собственное значение волновода сохраняется не при всех возможных вещественных возмущениях

$$q(x, y) = q_0(x) + \varepsilon q_1(x, y),$$

где q_1 — вещественная функция, ε характеризует малость возмущения лишь при тех возмущениях, при которых задача

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + [e_0 q_0(x) - \alpha_1^2] w = e_0 u_2(x) \int_0^\pi q_1(x, y) \psi_1(y) \psi_2(y) dy \quad (2)$$

имеет решение w из $L^2(\mathbb{R}^1)$ (см. [1-2]).

Предположим, что при данном q_1 такое w существует, и найдем соотношения, которым должно удовлетворять q_1 . Вне отрезка $(-1, +1)$ функция $w(x)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + [e_0 - \alpha_1^2] w = 0,$$

и, следовательно, имеет вид

$$w = C_1 \sin \left(\sqrt{e_0 - \alpha_1^2} x \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{e_0 - \alpha_1^2} x \right).$$

Поэтому $w \equiv 0$ при $x \notin [-1, 1]$. Поскольку обобщенное решение (2) непрерывно дифференцируемо, то для w имеем переопределенную задачу:

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dx^2} + \gamma^2 w = f(x), \\ w|_{x=\pm 1} = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=\pm 1} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\gamma^2 = e_0 q_0 - \alpha_1^2$ — данное число, а правая часть уравнения (3)

$$f(x) = e_0 u_2(x) \int_S q_1(x, y) \psi_1(y) \psi_2(y) dy.$$

Задача

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dx^2} + \gamma^2 w = f(x), \\ w|_{x=\pm 1} = 0 \end{cases}$$

разрешима однозначно. В самом деле, положим

$$v_1 = \sin(\gamma(x-1)), \quad v_2 = \sin(\gamma(x+1)),$$

тогда

$$\begin{aligned} wW[v_1, v_2] &= \\ &= v_1(x) \int_{-1}^x v_2(y) f(y) dy + v_2(x) \int_x^1 v_1(y) f(y) dy, \end{aligned}$$

где $W[v_1, v_2] = \text{const}$ — определитель Вронского. Для того чтобы w удовлетворяло (3), необходимо выполнение еще двух условий:

$$w'|_{x=1} = v_1'(1) \int_{-1}^1 v_2(y) f(y) dy = 0$$

и

$$w'|_{x=-1} = v_2'(-1) \int_{-1}^1 v_1(y) f(y) dy = 0.$$

Поскольку $v_1'(1) = \gamma \neq 0$ и $v_2'(-1) = \gamma \neq 0$, функция f , при которой существует решение задачи (3), должна удовлетворять условиям

$$\int_{-1}^1 \sin \gamma(x \pm 1) f(x) dx = 0. \quad (4)$$

Найдем функцию q_1 , не удовлетворяющую этим условиям. Для этого возьмем

$$q_1(x, y) = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)} Q(x)$$

в Ω' , где $Q(x)$ — неопределенная кусочно-непрерывная функция. В этом случае $q_1(x, y)$ — ограниченная, кусочно-непрерывная функция в области Ω и на ее границе. При такой функции q_1 функция f имеет вид

$$f = e_0 u_2(x) Q(x).$$

Поскольку $u_2(x) = \cos \gamma' x$, из (4) получим:

$$\int_{-1}^1 \sin \gamma(x \pm 1) \cos \gamma' x Q(x) dx = 0.$$

При

$$Q(x) = \sin \gamma(x \pm 1) \cos \gamma' x$$

одно из этих равенств не выполняется. Итак, возмущение вида

$$q_1(x, y) = \frac{\psi_2}{\psi_1} \sin \gamma(x \pm 1) \cos \gamma' x$$

приводит к исчезновению рассматриваемого собственного значения.

Доказанное позволяет проиллюстрировать неустойчивость вложенных собственных значений к малым вещественным возмущениям заполнения.

В заключении выражаю искреннюю благодарность проф. А.Н. Боголюбову и А.Г. Свешникову за постановку задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты

02-01-00271, 00-01-00111) и программы «Университеты России» (грант УР.02.03.010).

Литература

1. Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г. // Докл. РАН. 2002. **385**, № 6. С. 744.
2. Малых М.Д. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2002. № 1. С. 61 (Moscow University Phys. Bull. 2002. No. 1. P. 69).
3. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 5. С. 23 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 5. P. 29).

Поступила в редакцию
10.04.02

УДК 536.75

О МЕТОДЕ СОКРАЩЕННОГО ОПИСАНИЯ В КВАНТОВОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ

П. Н. Николаев

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

E-mail: nikolaev@qs.phys.msu.su

Получены выражения для термодинамических функций через простейшие статистические операторы. Решена проблема термодинамической совместимости термического и калорического уравнений состояния для квантовых систем.

До настоящего времени одним из наиболее эффективных методов изучения систем многих частиц является метод сокращенного описания, который в классической статистической физике обычно называют методом функций распределения, а в квантовой статистике — методом статистических операторов комплексов частиц [1].

Для системы N частиц, находящихся в объеме V и взаимодействующих посредством центральных сил, характеризуемых парным потенциалом $\Phi(|q_1 - q_2|)$, калорическое уравнение состояния выражается через одночастичный и двухчастичный операторы

$$U = \text{Tr}_1 T(1)R_1(1) + \frac{1}{2} \text{Tr}_{1,2} \Phi(|q_1 - q_2|)R_2(1, 2). \quad (1)$$

Здесь U — внутренняя энергия, $R_s(1, 2, \dots, s)$ — s -частичный оператор

$$R_s(1, 2, \dots, s) = \frac{N \dots (N - s + 1) \text{Tr}_{s+1, \dots, N} \exp(-H(1, 2, \dots, N)/\theta)}{\text{Tr}_{1, \dots, N} \exp(-H(1, 2, \dots, N)/\theta)}, \quad (2)$$

где q_i — вектор, определяющий положение i -й молекулы ($i = 1, \dots, N$) и имеющий компоненты

$q_i^\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$,

$$H(1, 2, \dots, N) = \sum_{i=1}^N T(i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \Phi(|q_i - q_j|) \quad (3)$$

— гамильтониан системы,

$$T(i) = \sum_{\alpha=1}^3 -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_i^{\alpha 2}}$$

— оператор кинетической энергии i -й частицы, $\theta = kT$ (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура).

Для определения термического уравнения состояния воспользуемся λ -преобразованием: при пропорциональном расширении линейных размеров области

$$p = \frac{\theta}{3VZ} \left\{ \frac{\partial Z(\lambda)}{\partial \lambda} \right\}_{\lambda=1},$$

где $Z(\lambda)$ обозначает статистическую сумму, соответствующую изменению линейных размеров в λ раз

$$Z(\lambda) = \text{Tr}_{1, \dots, N} \exp \left(- \left(\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_i^{\alpha 2}} + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \Phi(\lambda|q_i - q_j|) \right) / \theta \right).$$