ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12

СТАТИЧЕСКАЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ В СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В. И. Денисов, Х. Х. Эрнандес

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Проведено интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений скалярно-тензорной теории гравитации нового типа в случае статического сферически симметричного источника. Построено постньютоновское разложение полученного решения и показано, что предсказания этой теории согласуются с результатами всех экспериментов, выполненных в слабом гравитационном поле Солнечной системы. Указано на существенное отличие полученной метрики от метрики Шварцшильда в области сильных полей.

В настоящее время в научной литературе активно обсуждается новый класс скалярно-тензорных теорий гравитации, в которых гравитационное воздействие осуществляется не только через метрический тензор псевдориманова пространства-времени g_{ik}, но и через скалярное гравитационное поле ψ. Характерной особенностью этих теорий, которые отличают их от теорий типа Бранса–Дикке, является то, что скалярное гравитационное поле входит в лагранжиан, введенный в работе [1], только в виде 4-градиентов. Это обстоятельство снимает ряд вопросов о влиянии аддитивной константы на ход гравитационных процессов и позволяет привести в соответствие предсказываемое теоретическое значение параметра замедления Вселенной с его наблюдаемым в эксперименте значением.

Целью настоящей статьи является построение статического сферически симметричного решения уравнений этой теории и анализ на его основе возможностей для обнаружения влияния скалярной части гравитационного поля на результаты экспериментов, которые можно провести в пределах Солнечной системы.

Рассмотрим в системе координат, где $c = G = 1$, лагранжиан скалярно-тензорной теории нового типа:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\,R + \mathcal{L}_M(\widetilde{g}_{ik}, \varphi_a) + \lambda\sqrt{-g}\,g^{lm}\,\partial_l\psi\;\partial_m\psi, \tag{1}$$

где R — скалярная кривизна, соответствующая метрическому тензору g_{ik}, g — определитель этого тензора, φ_a — остальные поля материи. Эффективный метрический тензор $\widetilde{g}_{ik}$, который описывает воздействие гравитационного поля на вещество, зависит от тензора g_{ik} и скалярного гравитационного поля следующим образом:

$$\widetilde{g}_{lm} = g_{lm}\,I^s + b\,\partial_l\psi\,\partial_m\psi\,I^p, \tag{2}$$

где

$$I = 1 + w\,g^{hj}\,\partial_h\psi\,\partial_j\psi. \tag{3}$$

Здесь λ, w, b — постоянные величины; s, p — числовые параметры.

Варьируя лагранжиан (1) с учетом соотношений (2) и (3), получим следующие уравнения:

$$\partial_m[\lambda\sqrt{-g}\,g^{lm}\partial_l\psi] = 0, \tag{4}$$

$$R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R + 16\pi\lambda\left(\frac{1}{2}g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km}\right)\partial_l\psi\,\partial_m\psi = 0, \tag{5}$$

которые справедливы вне вещества, т. е. в тех областях пространства, где тензор энергии-импульса материи $\widetilde{T}^{lm}_M = 0$.

Опуская индексы в уравнении (5), получим соотношение

$$R_{ik} = 16\pi\lambda\,\partial_i\psi\,\partial_k\psi. \tag{6}$$

Переходя к статической сферически симметричной модели, интервал $d\tau^2$ представим в виде

$$d\tau^2 = \mathcal{A}(r)dt^2 - \mathcal{B}(r)dr^2 - \mathcal{C}(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{7}$$

Полагая, что гравитационное скалярное поле также зависит только от радиальной координаты, т. е. $\psi = \psi(r)$, уравнение (4) приведем к виду, позволяющему его достаточно просто проинтегрировать:

$$\frac{d}{dr}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{A}(r)}{\mathcal{B}(r)}}\mathcal{C}(r)\sin\theta\frac{d\psi(r)}{dr}\right) = 0.$$

Поэтому

$$\frac{d\psi(r)}{dr} = \frac{q}{\mathcal{C}(r)}\sqrt{\frac{\mathcal{B}(r)}{\mathcal{A}(r)}}, \tag{8}$$

где q — постоянная интегрирования.

Из уравнений (6) и последнего соотношения получим систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных компонент метрики $\mathcal{A}(r), \mathcal{B}(r), \mathcal{C}(r)$:

$$R_{00} = \frac{\mathcal{A}''}{2\mathcal{B}} - \frac{\mathcal{A}'\mathcal{B}'}{4\mathcal{B}^2} - \frac{\mathcal{A}'^2}{4\mathcal{A}\mathcal{B}} + \frac{\mathcal{A}'\mathcal{C}'}{2\mathcal{B}\mathcal{C}} = 0,$$

$$R_{11} = -\frac{\mathcal{A}''}{2\mathcal{A}} - \frac{\mathcal{C}''}{\mathcal{C}} + \frac{\mathcal{A}'^2}{4\mathcal{A}^2} + \frac{\mathcal{C}'^2}{2\mathcal{C}^2} + \frac{\mathcal{A}'\mathcal{B}'}{4\mathcal{A}\mathcal{B}} + \frac{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}{2\mathcal{B}\mathcal{C}} = \xi\frac{\mathcal{B}}{2\mathcal{A}\mathcal{C}^2},$$

$$R_{22}=-\frac{\mathcal{C}''}{2\mathcal{B}}+\frac{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}{4\mathcal{B}^2}-\frac{\mathcal{A}'\mathcal{C}'}{4\mathcal{A}\mathcal{B}}+1=0, \qquad (9)$$

где для краткости величина $32\pi\lambda q^2$ обозначена ξ, а компоненты метрики обозначены без указания аргумента r. Штрих означает производную по r.

Решение этой системы уравнений существенно зависит от знака величины ${\rho_g}^2+\xi$ (в дальнейшем обозначено для краткости как a^2), причем, что интересно, ρ_g является константой интегрирования, имеющей физический смысл гравитационного радиуса центрального источника.

В случае, когда $a^2\geqslant 0$, решением системы нелинейных дифференциальных уравнений (9) являются следующие функции:

$$\mathcal{A}(r)=\left(1-\frac{a}{r}\right)^{\rho_g/a},$$

$$\mathcal{B}(r)=\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-\rho_g/a},$$

$$\mathcal{C}(r)=r^2\left(1-\frac{a}{r}\right)^{1-\rho_g/a}. \qquad (10)$$

Очевидно, что при выключении скалярного поля ($\xi=0$) метрические компоненты (10) принимают те же значения, что и в теории Эйнштейна.

Несложно убедиться, что при $a^2\to 0$ соотношения (10) переходят в следующие:

$$\mathcal{A}(r)=\exp\left\{-\frac{\rho_g}{r}\right\},$$

$$\mathcal{B}(r)=\exp\left\{\frac{\rho_g}{r}\right\},$$

$$\mathcal{C}(r)=r^2\exp\left\{\frac{\rho_g}{r}\right\}.$$

И наконец, решение уравнений (9) при условии $a^2<0$ определяется выражениями

$$\mathcal{A}(r)=\exp\left\{-\frac{2\rho_g}{a}\operatorname{arcctg}\left(\frac{2r}{a}-1\right)\right\},$$

$$\mathcal{B}(r)=\exp\left\{\frac{2\rho_g}{a}\operatorname{arcctg}\left(\frac{2r}{a}-1\right)\right\},$$

$$\mathcal{C}(r)=r^2\left(1-\frac{a}{r}+\frac{a^2}{2r^2}\right)\exp\left\{\frac{2\rho_g}{a}\operatorname{arcctg}\left(\frac{2r}{a}-1\right)\right\}.$$

Для наших целей наибольший интерес представляет случай, когда $a^2>0$. Проанализируем его подробнее. Подставляя в соотношение (8) выражения найденной метрики (10), получим следующую формулу для скалярного гравитационного поля:

$$\psi(r)=\psi_0+\frac{q}{a}\ln\left(1-\frac{a}{r}\right).$$

На больших расстояниях от центрального источника последнее соотношение переходит в выражение

$$\psi(r)=\psi_0-\frac{q}{r}.$$

Движение пробных тел согласно нашей теории будет определяться метрикой в эффективном римановом пространстве-времени $\widetilde{g}_{ik}$, компоненты которого имеют вид

$$\widetilde{g}_{00}=\mathcal{A}(r)\,I^s,\quad \widetilde{g}_{11}=-\mathcal{B}(r)\,I^s+\frac{bq^2}{r^4}\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-2}I^p,$$

$$\widetilde{g}_{22}=-\mathcal{C}(r)\,I^s,\quad \widetilde{g}_{33}=\widetilde{g}_{22}\sin^2\theta, \qquad (11)$$

где I выражается следующим образом:

$$I=1-\frac{wq^2}{r^4}\left(1-\frac{a}{r}\right)^{\rho_g/a-2}. \qquad (12)$$

Как известно, для оценки возможных для наблюдения гравитационных эффектов в пределах Солнечной системы необходимо построить постньютоновское разложение, т.е. следует представить метрику (11), (12) в виде разложений в ряд по обратным степеням радиальной координаты r до порядка $\sim 1/r^2$ включительно. До начала такого построения заметим, что величина I, определяемая соотношением (12), имеет поправку вида $\sim 1/r^4$, так же как и второе слагаемое в выражении для $\widetilde{g}_{11}$ в (11). Поэтому с постньютоновской точностью найдем разложение метрики, определяемой соотношениями (10).

Так как метрику следует представить в изотропной форме, то в выражение (10) необходимо ввести изотропную радиальную переменную ρ в соответствии с равенством

$$r=\rho\left(1+\frac{a}{4\rho}\right)^2.$$

Подставляя это выражение в (10), получим

$$\widetilde{g}_{00}=\left(\frac{1-a/(4\rho)}{1+a/(4\rho)}\right)^{2\rho_g/a},$$

$$\widetilde{g}_{11}=\left(1-\frac{a^2}{16\rho^2}\right)^2\left(\frac{1+a/(4\rho)}{1-a/(4\rho)}\right)^{2\rho_g/a},$$

$$\widetilde{g}_{22}=\rho^2\,\widetilde{g}_{11}. \qquad (13)$$

При переходе $\xi\longrightarrow 0$ эти выражения принимают форму решения Шварцшильда [2] в изотропных координатах.

Используем стандартный постньютоновский формализм, согласно которому разложение метрики (13) следует представить в виде

$$\widetilde{g}_{00}=1-2\,\alpha\,\frac{\mu}{\rho}+2\,\beta\,\frac{\mu^2}{\rho^2}+\ldots,\quad \widetilde{g}_{11}=1+2\,\gamma\,\frac{\mu}{\rho}+\ldots,$$

где α, β, γ — постньютоновские параметры теории, μ — активная гравитационная масса центрального источника.

Выражая метрику (13) в виде разложений по обратным степеням изотропной координаты ρ, получим

$$\widetilde{g}_{00} = 1 - \frac{\rho_g}{\rho} + \frac{{\rho_g}^2}{2\rho^2}, \quad \widetilde{g}_{11} = 1 + \frac{\rho_g}{\rho}.$$

Таким образом, для коэффициентов робертсоновского разложения найдены значения

$$\alpha = \beta = \gamma = 1,$$

а для активной гравитационной массы получаем выражение

$$\mu = \frac{\rho_g}{2}.$$

Эти выражения полностью согласуются с ограничениями, накладываемыми на коэффициенты, которые получены из результатов гравитационных экспериментов, выполненных к настоящему времени в слабом гравитационном поле Солнечной системы. Таким образом, рассматриваемая нами скалярно-тензорная теория гравитации является жизнеспособной. Так как метрика (11), (12) этой теории существенно отличается от соответствующей метрики Шварцшильда только в области сильных гравитационных полей, то предсказания данной теории наиболее сильно будут отличаться от предсказаний теории Эйнштейна лишь в окрестности компактных массивных тел, таких, как нейтронные звезды. Поэтому существование скалярного гравитационного поля, помимо космологии, наиболее ярко будет проявляться в астрофизических эффектах и в процессах, сопровождающихся излучением гравитационных волн.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 98-02-17448а).

Литература

1. *Денисов В.И., Мехта Б.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №3. С. 17 (Moscow University Phys. Bull. 1996. No. 3. P. 10).
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М., 1988.

Поступила в редакцию
06.02.98

УДК 539.12.01

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВАКУУМНЫЕ ЭФФЕКТЫ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕПРОВОДЯЩИХ КРИСТАЛЛОВ В ИНТЕНСИВНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

В. Н. Родионов*)

На основе использования точных решений квантовых уравнений движения заряженных частиц в электромагнитном поле, представляющем собой комбинацию постоянного магнитного поля и поля волны, рассчитаны вероятности и сечения процессов фоторождения e^+e^- и ядерного β-распада. Показано, что полученные выражения, учитывающие влияние поля на нормированные характеристики процесса $\gamma' + \gamma'' \to e^+ + e^-$, содержат в себе и результаты, характеризующие коэффициенты поглощения непроводящих кристаллов в поле. Оценена полевая нестабильность протона во внешнем интенсивном поле и отмечено, что на границе тяжелых ядер могут возникать условия для эффективного β-превращения нуклонов.

Как известно, изучение воздействия интенсивных электромагнитных полей на различные фундаментальные процессы, основанное на использовании точных решений релятивистских квантовых уравнений движения заряженных частиц, ведется достаточно планомерно (см., напр., [1–7] и цитированные там работы). Причем сюда включаются как реакции, рассмотрение которых не выходит за рамки чистой квантовой электродинамики [2–5], так и процессы, имеющие неэлектромагнитную природу [3, 6, 7].

Совсем недавно в рамках использования точно решаемых моделей автором был получен ряд результатов по расчету вероятности процесса ядерного β-распада во внешних электромагнитных полях, имеющих сложную конфигурацию [6] — комбинацию постоянного магнитного поля и поля плоской электромагнитной волны циркулярной поляризации. Подобным же образом могут быть рассчитаны и вероятности ряда других процессов, и в частности реакций образования пары e^+e^- двумя фотонами, распространяющимися навстречу друг другу во внешнем электромагнитном поле той же структуры [7].

В настоящей заметке обратим внимание на ряд общих закономерностей, которые присущи фотовзаимодействию в системах, имеющих, казалось бы, совершенно различную природу. В рамках указанных аналогий получим новые результаты, относящиеся как к анализу нелинейных квантовых эффектов в процессах образования и распада частиц в условиях действия сильных электромагнитных полей, так и к определению фотооптических характеристик непроводящих кристаллов под влиянием внешнего поля.

*) Московская государственная геологоразведочная академия.