УДК 593.12.01

ДИРАКОВСКИЙ ФЕРМИОН В СИЛЬНОМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

В. Р. Халилов, Х. Гоударзи

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: khalilov@the.phys.msu.su

Найдены точные решения уравнения Дирака в сильном электрическом поле точечного заряда $Z|e|$ и внешнем скалярном кулоновском поле. Показано, что в присутствии скалярного поля область значений параметров, при которых соответствующий оператор Гамильтона является эрмитовым, существенно шире, чем в его отсутствие. Это позволяет корректно исследовать задачу о стабильности вакуума квантовой электродинамики в указанных полях по отношению к образованию электрон-позитронных пар.

Введение

Одним из важных физических эффектов является эффект образования электрон-позитронных пар из вакуума кулоновским полем, который для случая кулоновского поля протяженного источника был предсказан в работах [1] и [2] (см. также обзоры и монографии [3–9] и цитированные там статьи). Напомним, что выражение для энергии основного состояния электрона в кулоновском поле точечного заряда $Z|e|$, $Z\alpha = 1$, $\alpha = e^2/\hbar c$, при $Z = 137$ обращается в нуль, а при $Z > 137$ становится чисто мнимым, т. е. соответствующий оператор Гамильтона становится неэрмитовым в точке $r = 0$. Самосопряженное расширение оператора Гамильтона эквивалентно введению граничного условия при малых r, что с точки зрения физики учитывает конечный размер ядра R, создающего кулоновский потенциал [1].

Уровни энергии электрона в сильном обрезанном (на малых расстояниях) кулоновском поле с ростом Z могут опускаться до границы нижнего континуума массы M. Значение $Z = Z_{\rm cr}$, при котором нижний уровень энергии электрона достигает границы нижнего континуума, называют критическим для основного состояния [6–8]. Если $Z > Z_{\rm cr}$, то основной уровень энергии электрона «погружается» в нижний континуум, и, если этот уровень не был заполнен, из возникшего квазистационарного состояния рождаются два позитрона, которые под действием кулоновского отталкивания уходят на бесконечность, а вакуум квантовой электродинамики (КЭД), возмущенный сверхкритическим кулоновским полем, приобретает заряд $2e$ [6–8]. Действительно, в картине Дирака все состояния нижнего континуума уже были заняты электронами с отрицательной энергией, так что рожденные (в нижнем континууме) кулоновским полем с $Z > Z_{\rm cr}$ электроны нельзя описать с помощью обычной волновой функции, и для их описания вводится понятие заряженного вакуума [6].

Дополнительно к взаимодействию фермионов с внешним векторным электромагнитным полем можно рассмотреть взаимодействие дираковских фермионов с внешним скалярным полем U, моделирующим, например, самосогласованное поле кварковой системы, или в некоторых случаях актуальную часть гравитационного взаимодействия в системе массивных фермионов. Это взаимодействие вводится в свободную теорию заменой $M \to M+U$, где M — масса фермиона. В настоящей работе найдены решения и спектр энергий уравнения Дирака во внешних электромагнитном и скалярном полях кулоновского типа. Рассмотренная модель приводит к расширению области значений параметров, при которых соответствующий оператор Гамильтона является эрмитовым, что позволяет корректно изучить вопрос о стабильности вакуума квантовой электродинамики в указанных полях по отношению к образованию электрон-позитронных пар.

В статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$ и выбрано так называемое стандартное представление матриц Дирака: γ^μ с $\gamma^0 = \gamma_0 \equiv \beta$, $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$.

Уравнение Дирака во внешнем поле

Уравнение Дирака для фермиона массы M, заряда e, взаимодействующего с внешними электромагнитным и скалярным полями, имеет вид

$$(i\partial_t - \mathcal{H})\Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{1}$$

где

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{P} + \beta(M + U) + eA^0 \tag{2}$$

— гамильтониан, $P_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ — оператор обобщенного импульса электрона, A_μ — 4-потенциал внешнего электромагнитного поля, а U — потенциал внешнего скалярного. В рассматриваемом нами случае

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta\left(M + \frac{a}{r}\right) - \frac{b}{r}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{p} = -i\nabla$, $b \equiv Ze^2$, a — константа, характеризующая (гипотетическое) взаимодействие заряда с внешним скалярным полем.

Решение уравнения Дирака (1) ищем в виде

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = e^{-iEt}\psi(\mathbf{r}), \tag{4}$$

где E — энергия фермиона, $\psi(\mathbf{r})$ — не зависящий от времени биспинор. Спектр энергий фермиона определяется из стационарного уравнения Дирака для ψ:

$$\mathcal{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Для состояния с определенными значениями энергии E, орбитального момента l, полного момента j и одной из проекций полного момента m волновую функцию стационарного состояния ψ ищем в виде [10]

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r)\Omega_{jlm}(\theta,\phi) \\ (-1)^{(1+l-l')/2} g(r))\Omega_{jl'm}(\theta,\phi) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $l = j \pm 1/2$, $l' = 2j - l$, а $\Omega_{jlm}(\theta,\phi)$ — трехмерные спиноры, компоненты которых для двух возможных (при данном l) значений $j = l \pm 1/2$ определяются формулами

$$\Omega_{l+1/2,l,m}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{l+m+1/2}{2l+1}} Y_{l,m-1/2}(\theta,\phi) \\ \sqrt{\dfrac{l-m+1/2}{2l+1}} Y_{l,m+1/2}(\theta,\phi) \end{pmatrix},$$

$$l = 0,1,2,\ldots; \quad m = -l - \tfrac{1}{2}, \ldots, l + \tfrac{1}{2};$$

$$\Omega_{l-1/2,l,m}(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\dfrac{l-m+1/2}{2l+1}} Y_{l,m-1/2}(\theta,\phi) \\ \sqrt{\dfrac{l+m}{2l+1}} Y_{l,m+1/2}(\theta,\phi) \end{pmatrix},$$

$$l = 1,2,\ldots; \quad m = -l + \tfrac{1}{2}, \ldots, l - \tfrac{1}{2}.$$

Здесь $Y_{lm}(\theta,\phi)$ — шаровые функции (сферические гармоники [10]). $\Omega_{l+1/2,l,m}$, $\Omega_{l-1/2,l,m}$ являются общими собственными функциями операторов $\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{L}^2$ с собственными значениями

$$\left(l + \tfrac{1}{2}\right)\left(l + \tfrac{3}{2}\right), m, l(l+1)$$

и

$$\left(l - \tfrac{1}{2}\right)\left(l + \tfrac{1}{2}\right), m, l(l+1)$$

соответственно.

Подставляя (6) в (5), после стандартных преобразований (см., напр., [10]) приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций f и g, характеризующих радиальное движение:

$$\begin{aligned} &\frac{df}{dr} + \frac{1+\kappa}{r} f - \left(E + M + \frac{b+a}{r}\right) g = 0, \\ &\frac{dg}{dr} + \frac{1-\kappa}{r} g + \left(E - M + \frac{b-a}{r}\right) f = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\kappa = -(j+1/2) = -(l+1)$ при $j = l + 1/2$ и $\kappa = +(j+1/2) = l$ при $j = l - 1/2$. Число κ пробегает все целые значения, кроме нуля. Радиальные функции f и g нормированы условием

$$\int\limits_0^\infty (|f^2| + |g^2|) dr = 1. \quad (8)$$

При малых r решения ищем в виде

$$f = Ar^{\gamma-1}, \quad g = Br^{\gamma-1}.$$

Подстановка в уравнения (7) дает

$$A(\gamma+\kappa) - B(a+b) = 0, \quad A(a-b) - B(\gamma-\kappa) = 0,$$

откуда

$$\gamma = \pm\sqrt{\kappa^2 + a^2 - b^2}. \quad (9)$$

При $b^2 < \kappa^2 + a^2$ число γ вещественно и должно быть выбрано положительное значение. Тогда

$$f = \frac{a+b}{\gamma+\kappa} g = Ar^{\gamma-1} \quad (10)$$

и интеграл от $|\psi|^2$ остается сходящимся даже при $\gamma < 1$, когда волновая функция может обратиться в бесконечность при $r = 0$. Если $b^2 > \kappa^2 + a^2$, то оба корня γ оказываются мнимыми, а соответствующие решения при $r \to 0$ осциллируют. Существование волн, распространяющихся к центру поля, недопустимо в релятивистской теории, поэтому кулоновское поле точечного заряда в теории Дирака с векторным и скалярным взаимодействием можно рассматривать при $b^2 < 1 + a^2$, что дает условие $Z < 137(1+a^2)$.

Для нахождения точных решений уравнения Дирака, характеризующих состояния дискретного спектра энергий, представим функции $f(r)$ и $g(r)$ в виде

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{M+E}\, e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1}(Q_1 + Q_2), \\ g &= -\sqrt{M-E}\, e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1}(Q_1 - Q_2), \end{aligned} \quad (11)$$

где введены обозначения

$$\rho = 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{M^2 - E^2}, \quad (12)$$

а γ определяет асимптотическое поведение волновых функций при малых r.

Уравнения

$$\begin{aligned} &\rho\frac{d}{d\rho}(Q_1+Q_2) + (\gamma+\kappa)(Q_1+Q_2) - \rho Q_2 + \\ &\qquad + (a+b)\sqrt{\frac{M-E}{M+E}}(Q_1 - Q_2) = 0, \\ &\rho\frac{d}{d\rho}(Q_1-Q_2) + (\gamma-\kappa)(Q_1-Q_2) + \rho Q_2 + \\ &\qquad + (a-b)\sqrt{\frac{M+E}{M-E}}(Q_1 + Q_2) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

запишем в виде суммы и разности:

$$\begin{aligned} &\rho\frac{d}{d\rho}Q_1 + \left(\gamma - \frac{bE - aM}{\lambda}\right) Q_1 + \\ &\qquad + \left(\kappa - \frac{bM - aE}{\lambda}\right) Q_2 = 0, \\ &\rho\frac{d}{d\rho}Q_2 + \left(\gamma - \rho + \frac{bE - aM}{\lambda}\right) Q_2 + \\ &\qquad + \left(\kappa + \frac{bM - aE}{\lambda}\right) Q_1 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

и далее после исключения Q_1 или Q_2 получим

$$\begin{gathered} \rho\frac{d^2}{d\rho^2}Q_1 + (2\gamma+1-\rho)\frac{d}{d\rho}Q_1 - \\ -\left(\gamma - \frac{bE-aM}{\lambda}\right)Q_1 = 0, \\ \rho\frac{d^2}{d\rho^2}Q_2 + (2\gamma+1-\rho)\frac{d}{d\rho}Q_2 - \\ -\left(\gamma + 1 - \frac{bE-aM}{\lambda}\right)Q_2 = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Решение этих уравнений, конечное при $\rho = 0$, выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta; z)$ следующим образом:

$$\begin{gathered} Q_1 = AF\left(\gamma - \frac{bE-aM}{\lambda}, 2\gamma+1; \rho\right), \\ Q_2 = BF\left(\gamma + 1 - \frac{bE-aM}{\lambda}, 2\gamma+1; \rho\right), \end{gathered} \tag{16}$$

причем связь между постоянными A и B определяется соотношением

$$B = -\frac{\gamma - (bE-aM)/\lambda}{\kappa - (bM-aE)/\lambda}A. \tag{17}$$

Для того чтобы решения были нормированными, обе гипергеометрические функции должны сводиться к полиномам. Для этого параметр α гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta; z)$ должен быть равен целому отрицательному числу или нулю, что дает следующее уравнение для определения спектра энергий:

$$\gamma - \frac{bE-aM}{\lambda} = -n, \tag{18}$$

причем нетрудно показать, что допустимы следующие значения квантового числа n: $0, 1, 2, \ldots$ при $\kappa < 0$ и $1, 2, 3, \ldots$ при $\kappa > 0$. Следовательно, дискретный спектр энергий электрона имеет вид

$$\begin{gathered} E = M\left[\frac{ab}{(n+\gamma)^2+b^2} \pm \right. \\ \left. \pm\sqrt{\left(\frac{ab}{(n+\gamma)^2+b^2}\right)^2 + \frac{(n+\gamma)^2-a^2}{(n+\gamma)^2+b^2}}\,\right]. \end{gathered} \tag{19}$$

Нелишне напомнить, что в отсутствие поля $E^{(\pm)} = \pm\sqrt{M^2+\mathbf{p}^2}$. Из соображений непрерывности, согласно общим принципам квантовой теории, к состояниям частиц (а не античастиц) следует относить все состояния, которые при бесконечно медленном выключении внешнего поля примыкают к положительной границе непрерывного спектра $E = M$ (см., напр., [10]). Поэтому нетрудно показать, что дискретный спектр энергий фермиона (частицы) во внешних электрическом и скалярном полях определяется формулой (19) с верхним знаком перед квадратным корнем.

Рассмотрим основной уровень $n = 0$, $\gamma = \sqrt{1+a^2-b^2}$. Выражение (19) вещественно при $1 + a^2 > b^2 \equiv (Ze^2)^2$. Мы видим, что, в отличие от случая $a = 0$, энергия фермиона не обращается в нуль при $b = 1$ ($Z = 137$). На границе области вещественности $1 + a^2 = b^2$ энергия фермиона в основном состоянии достигает минимума, равного

$$E_0 = M\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}. \tag{20}$$

Если $a < 0$, что соответствует случаю уменьшения эффективной массы фермиона ($M_{\text{eff}} = M - |a|/r$) за счет действия скалярного поля притяжения, энергия фермиона в основном состоянии отрицательна, причем $E_0 \to -M$ при очень больших a.

Оценим теперь ширину энергетической щели между положительно- и отрицательно-частотными состояниями, т. е. между состояниями частиц и античастиц, в случае $a < 0$. Считаем, что знаки электрического заряда частицы и кулоновского центра противоположны, т. е. частица притягивается, а античастица отталкивается кулоновским центром. Энергию античастицы в низшем состоянии можно оценить, экстраполируя формулу (19) на значения $b < 0$. Далее, можно предположить, что при малых b связанные состояния существуют как для частиц, так и для античастиц (скалярное поле является притягивающим для тех и других). Энергию античастицы на низшем уровне при малых $b < 0$ можно определить формулой

$$E_a = \frac{M}{\sqrt{1+a^2}} + M|b|, \tag{21}$$

а связанные состояния существуют при $1/\sqrt{1+a^2} + |b| < 1$. Если и скалярное поле слабое, но $a^2 > 2|b|$, то ширина щели $\Delta E \cong 2M/\sqrt{1+a^2}$. При $b = 1$ энергия частицы на низшем уровне равна нулю, а ширина щели $\Delta E \cong E_a(|b| \cong 1) = M/\sqrt{1+a^2} + M|b| \cong 2M$ при малых a и $\Delta E \cong M|b| + M/a < M$ при больших a.

При $1 + a^2 = b^2$ энергия частицы на низшем уровне определяется формулой (20), причем $E_0 \to -M$ при $a \to \infty$. Тем не менее граница нижнего континуума остается недостижимой. Связанных состояний античастицы при $1 + a^2 = b^2$ нет, однако из (21) видно, что ширина щели в этом случае (значительно) меньше M. При $a > 0$ энергия фермиона в основном состоянии положительна.

Таким образом, в рассматриваемой конфигурации полей пересечение уровней энергии, принадлежащих положительно- и отрицательно-частотным состояниям, не происходит ни при каких физически обоснованных значениях параметров, и, следовательно, вакуум квантовой электродинамики в данной конфигурации полей стабилен по отношению к образованию пар частица–античастица.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта «Ведущие научные школы» (НШ-2027.2003.2)

Литература

1. *Pomeranchuk I., Smorodinsky Ya.* // J. Phys. USSR. 1945. **9**. P. 97.
2. *Герштейн С.С., Зельдович Я.Б.* // ЖЭТФ. 1969. **57**. С. 654.
3. *Reinhardt J., Greiner W.* // Rep. Progr. Phys. 1977. **40**. P. 219.
4. *Rafelski J., Fulcher L. P., Klein A.* // Phys. Reports. 1978. **C38**. P. 227.
5. *Soffel M., Müller B., Greiner W.* // Phys. Reports. 1982. **C85**. P. 51.
6. *Зельдович Я.Б., Попов В.С.* // УФН. 1971. **105**. С. 403.
7. *Мигдал А.Б.* Фермионы и бозоны в сильных полях. М., 1978.
8. *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М., 1988.
9. *Khalilov V.R.* Electrons in Strong Electromagnetic Fields: an Advanced Classical and Quantum Treatment. Amsterdam, 1996.
10. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М., 1980.

Поступила в редакцию
15.03.04