РАДИОФИЗИКА

УДК 517.958:621.372.823

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ПЛОСКОГО ГРАДИЕНТНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА С ИМПЕДАНСНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. В. Конюшенко, В. П. Моденов

(*кафедра математики*)

Ортогональным методом Галеркина проведен расчет постоянных распространения электромагнитных волн плоского волновода с импедансной границей и с переменным диэлектрическим заполнением. Показана эффективность метода путем сравнения с решением дисперсионного уравнения.

Постоянная распространения является одной из важнейших характеристик волноведущих электродинамических устройств. Поэтому разработке методов ее расчета уделяется повышенное внимание. В основе многих методов лежит решение трансцендентного уравнения, что для сложных волноведущих систем связано с определенными трудностями. Поэтому весьма перспективным оказывается использование различных проекционных методов [1, 2]. В настоящей работе применяется ортогональный метод Галеркина [3], в котором используется разложение по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля с несамосопряженным граничным условием третьего рода и вычисление соответствующих собственных значений дифференциально-параметрическим методом [4, 5].

Рассмотрим плоский волновод, ограниченный двумя параллельными плоскостями $x=0$ и $x=a$. Плоскость $x=0$ считаем идеально проводящей, а плоскость $x=a$ — сверхпроводящей, определяемой поверхностным импедансом Z_s. Ось z направим в направлении распространения волны.

Заполнение внутри волновода считаем однородным вдоль оси z и характеризующимся диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$, которая в общем случае является комплекснозначной функцией. Поля периодически меняются со временем по закону $\mathrm{e}^{-i\omega t}$.

Рассмотрим случай H-волн. Выражая компоненты векторов электромагнитного поля через компоненту $E_y(x,z)=u(x,z)$, приходим к скалярной задаче.

Краевая задача заключается в нахождении решения уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом

$$\Delta u(x,z)+k^2\varepsilon(x)u(x,z)=0$$

в полосе $(0<x<a,\ -\infty<z<+\infty)$, для которого заданы граничное условие первого рода на нижней границе полосы:

$$u\Big|_{x=0}=0$$

и несамосопряженное условие третьего рода на верхней границе этой полосы:

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+u\Big|_{x=a}=0,$$

где $\alpha=iZ_s/k$ — приведенный импеданс, $|\alpha|\ll 1$.

Решение данной задачи проводится ортогональным методом Галеркина. Приближенное решение ищется в виде конечного разложения

$$u^N(x,z)=\sum_{n=1}^{N}C_n\,\mathrm{e}^{i\gamma_n z}\,X_n(x),$$

где C_n — неизвестные коэффициенты, γ_n — искомые постоянные распространения, X_n — собственные функции задачи Штурма–Лиувилля со слабо несамосопряженным ($|\alpha|\ll 1$) граничным условием третьего рода:

$$\begin{cases}X_n''(x)+\lambda_n^2X_n(x)=0, & x\in(0,a),\\ X_n(0)=0, \quad \alpha X_n'(a)+X_n(a)=0 & (\operatorname{Re}\alpha>0),\end{cases}$$

λ_n — собственные значения.

При условии $|\alpha|\ll 1$ спектр собственных значений невырожден. Комплекснозначные собственные функции $X_n(x)=\sin\lambda_n x$ ортогональны в комплексном пространстве $L_2(0,a)$ с псевдоскалярным произведением и образуют базис [4], квадрат псевдонормы отличен от нуля и равен $||X_n||^2=\frac{a(1+\alpha+\alpha^2\lambda_n^2)}{2(1+\alpha^2\lambda_n^2)}$.

Для нахождения собственных значений, используя дифференциально-параметрический метод (ДП-метод [5]), приходим к задаче Коши:

$$\frac{d\lambda_n}{d\alpha}=-\frac{\lambda_n}{1+\alpha+\alpha^2\lambda_n^2},\quad \lambda_n\Big|_{\alpha=0}=\frac{n\pi}{a}\quad (n=1,2,\ldots).$$

При $|\alpha|\ll 1$, разлагая собственные значения λ_n в окрестности $\alpha=0$, получаем для них приближенные аналитические выражения:

$$\lambda_n\cong\lambda_n\Big|_{\alpha=0}+\frac{d\lambda_n}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}\cdot\alpha=\frac{n\pi}{a}\Big(1-\frac{\alpha}{a}\Big).$$

Далее, для того чтобы $u^N(x,z)$ было приближенным решением рассматриваемой краевой задачи, необходимо выполнение соотношения

$$\int_0^a (\Delta u + k^2\varepsilon(x)u)X_m(x)\,dx = 0.$$

В силу ортогональности собственных функций

$$-\gamma_m^2 C_m = \sum_{n=1}^{N}\left(\lambda_m^2\delta_{mn} - \frac{k^2}{||X_m||^2}\int_0^a \varepsilon(x)X_n(x)X_m(x)\,dx\right)C_n = 0.$$

Таким образом, для расчета постоянных распространения получена задача на собственные значения:

$$\Lambda C = AC,$$

где C — столбец неопределенных коэффициентов размерности N, A — заданная матрица размером $N\times N$, а $\Lambda = -\gamma^2$ — столбец искомых собственных значений.

В случае слоистого заполнения (однородный слой с диэлектрической проницаемостью ε_1, заполняющий волновод вдоль оси x от 0 до d) проводилось сравнение с решением дисперсионного уравнения.

Дисперсионное уравнение записывалось в виде равенства нулю определителя третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha\nu\cos\nu a + \sin\nu a & -\alpha\nu\sin\nu a + \cos\nu a & 0 \\ \nu\cos\nu d & -\nu\sin\nu d & -\omega\cos\omega d \\ \sin\nu d & \cos\nu d & -\sin\omega d \end{vmatrix} = 0,$$

где $\nu = \sqrt{k^2\varepsilon_0 - \gamma^2}$, $\omega = \sqrt{k^2\varepsilon_1 - \gamma^2}$.

Данное дисперсионное уравнение решалось итерационным методом Ньютона–Рафсона. На первом шаге рассматривалось начальное приближение для пустого волновода: $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, задавался шаг $\Delta\varepsilon$ и осуществлялся поиск решения γ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, причем в качестве начального приближения использовались постоянные распространения для пустого волновода ($\gamma_n = \sqrt{k^2\varepsilon_0 - \lambda_n^2}$). Если выполнялось условие сходимости метода, на следующем шаге рассматривалось приближение $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + 2\Delta\varepsilon$ и в качестве начального приближения использовалось решение на предыдущем шаге. В противном случае шаг по ε_1 уменьшался. Далее процедура последовательно продолжалась.

Численное сравнение двух методов проводилось для волновода ($a = 15$ мм) со слоем из поликора ($\varepsilon = 9{,}6$, $d = 0{,}2$ мм) и импедансной стенкой из сверхпроводника YBCO (импеданс $Z_s = 0{,}004 + 0{,}003i$ Ом на частоте $f = 10$ ГГц).

В табл. 1 приведены значения постоянных распространения при данных параметрах волновода, вычисленные ортогональным методом Галеркина и полученные путем решения дисперсионного уравнения. Наблюдается совпадение результатов с высокой точностью.

Таблица 1

Постоянные распространения	Метод Ньютона	Метод Галеркина
γ_1	$1{,}0181 + 1{,}0071\cdot10^{-5}i$	$1{,}0215 + 1{,}0015\cdot10^{-5}i$
γ_2	$1{,}5038\cdot10^{-5} + 3{,}1802i$	$1{,}5042\cdot10^{-5} + 3{,}1778i$
γ_3	$2{,}1582\cdot10^{-5} + 5{,}5127i$	$2{,}1590\cdot10^{-5} + 5{,}5112i$

В табл. 2 приведены значения постоянных распространения, вычисленные при различных значениях N ($d = 1$ мм).

Таким образом, численный эксперимент показал как хорошую внутреннюю сходимость ортогонального метода Галеркина, так и совпадение с высокой точностью полученных этим методом численных результатов с решением дисперсионного уравнения. Это позволяет сделать вывод о возможности эффективного использования ортогонального метода Галеркина для расчета импедансных волноводов с диэлектрическим или иным заполнением.

Таблица 2

N	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
5	$5{,}9021 + 1{,}0247\cdot10^{-7}i$	$3{,}7438 + 1{,}5848\cdot10^{-6}i$	$1{,}8061\cdot10^{-5} + 3{,}7867i$	$3{,}3932\cdot10^{-5} + 6{,}4134i$
10	$5{,}9045 + 5{,}4978\cdot10^{-8}i$	$3{,}7619 + 1{,}3304\cdot10^{-6}i$	$1{,}8130\cdot10^{-5} + 3{,}7547i$	$3{,}4033\cdot10^{-5} + 6{,}4077i$
15	$5{,}9048 + 6{,}7280\cdot10^{-8}i$	$3{,}7636 + 1{,}4073\cdot10^{-6}i$	$1{,}8195\cdot10^{-5} + 3{,}7532i$	$3{,}4053\cdot10^{-5} + 6{,}4072i$
20	$5{,}9048 + 6{,}8081\cdot10^{-8}i$	$3{,}7639 + 1{,}4091\cdot10^{-6}i$	$1{,}8187\cdot10^{-5} + 3{,}7529i$	$3{,}4057\cdot10^{-5} + 6{,}4074i$

Литература

1. *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М: Наука, 1967.
2. *Моденов В.П.* // Вычислительные методы и программирование. Вып. XX. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. С. 50.
3. *Моденов В.П.* // ЖВМ и МФ. 1987. **27**, № 1. С. 144.
4. *Modenov V.P.* // Proc. Intern. Simp. «Physics and Engineering of Millimetre and Submillimetre Waves». Vol. I. Kharkov, 1994. P. 98.
5. *Моденов В.П.* // ДАН СССР. 1987. **296**, № 3. С. 536.

Поступила в редакцию 27.10.99