УДК 517.958;621.372.8

МОДЫ ДЛЯ ВОЛНОВОДА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ЩУКИНА–ЛЕОНТОВИЧА

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, Ю. В. Мухартова

(*кафедра математики*)

Рассмотрены нормальные волны в полом волноводе Ω, представляющем собой коаксиальный цилиндр, на границе которого заданы условия Щукина–Леонтовича.

Важной характеристикой волноводов и резонаторов являются тепловые потери. Решение уравнений Максвелла для адекватных реальным устройствам моделей является весьма сложной задачей в основном из-за конфигурационной сложности. Один из эффективных методов упрощения краевой задачи для уравнений Максвелла — метод эквивалентных граничных условий, классическим примером которых являются импедансные граничные условия Щукина–Леонтовича

$$[\mathbf{n},\mathbf{E}]=-Z_s\,[\mathbf{n},[\mathbf{n},\mathbf{H}]]\,,$$

описывающие поглощение энергии электромагнитного поля в хорошо проводящих средах. Импеданс Z_s выражается соотношением

$$Z_s=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_0}}(1-i),$$

где σ_0 — удельная проводимость металла при постоянном токе. Граничное условие Щукина–Леонтовича выводится для плоской безграничной металлической поверхности, но оно применимо и к криволинейным поверхностям, если радиус кривизны $R\gg\sqrt{2/\omega\mu\sigma_0}$. Проведенные экспериментальные исследования показали, что хотя импедансные граничные условия являются лишь приближенно эквивалентными, их использование для учета потерь в металлических стенках волноводов является вполне обоснованным с физической точки зрения в диапазоне СВЧ [1].

Для постановки задачи о возбуждении колебаний в волноводе с граничными условиями Щукина–Леонтовича, как и в случае регулярного волновода, следует сначала рассмотреть спектральную задачу.

1. Спектральная задача

Рассмотрим однородную задачу для волновода с граничными условиями Щукина–Леонтовича

$$\begin{cases}\operatorname{rot}\mathbf{H}=-i\omega\mathbf{E},\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=i\omega\mathbf{H},\\ [\mathbf{n},\mathbf{E}]_{\partial\Omega}=\varsigma[\mathbf{n},[\mathbf{n},\mathbf{H}]]\end{cases}\tag{1}$$

Она допускает бесконечное число решений вида $(\mathbf{E}_n,\mathbf{H}_n)\,e^{i\gamma_n(\omega,\varsigma)\,z}$. Условимся по аналогии со случаем регулярного волновода называть такие решения нормальными волнами, а числа $\alpha_n=\sqrt{\omega^2-\gamma_n^2}$ — частотами отсечки.

Если искать решение задачи (1) в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^{\mathrm{e}})+\omega^2\mathbf{\Pi}^{\mathrm{e}}-i\omega\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^{\mathrm{m}},\\ \mathbf{H}&=i\omega\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^{\mathrm{e}}+\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^{\mathrm{m}})+\omega^2\mathbf{\Pi}^{\mathrm{m}},\end{aligned}\tag{2}$$

где электрический и магнитный векторы Герца направлены по оси волновода

$$\mathbf{\Pi}^{\mathrm{e}}=\varphi(x,y)\,e^{i\gamma z}\,\mathbf{e}_z,\quad \mathbf{\Pi}^{\mathrm{m}}=\psi(x,y)\,e^{i\gamma z}\,\mathbf{e}_z,\tag{3}$$

то уравнения Максвелла сведутся к системе

$$\Delta_2\varphi+(\omega^2-\gamma^2)\varphi=0,\quad \Delta_2\psi+(\omega^2-\gamma^2)\psi=0[2].\tag{4}$$

Остается найти граничные условия для φ и ψ такие, чтобы построенные по формуле (2) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяли условиям Щукина–Леонтовича. Введем помимо нормали к границе волновода касательный вектор $\boldsymbol{\tau}=[\mathbf{e}_z,\mathbf{n}]=(-n_y,n_x,0)$ и производную по касательной $\varphi_{\boldsymbol{\tau}}=(\operatorname{grad}\varphi,\boldsymbol{\tau})$, $\psi_{\boldsymbol{\tau}}=(\operatorname{grad}\psi,\boldsymbol{\tau})$. Подставляя выражения для векторов Герца в (2) и учитывая граничные условия для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, получим

$$\begin{aligned}-(\omega^2-\gamma^2)\varphi\boldsymbol{\tau}+(i\gamma\varphi_{\boldsymbol{\tau}}+i\omega\psi_{\mathbf{n}})\mathbf{e}_z=\\ =-\varsigma(i\gamma\psi_{\boldsymbol{\tau}}-i\omega\varphi_{\mathbf{n}})\boldsymbol{\tau}-\varsigma(\omega^2-\gamma^2)\psi\mathbf{e}_z.\end{aligned}\tag{5}$$

Приравнивая проекции на $\mathbf{e}_z$ и $\boldsymbol{\tau}$, найдем краевые условия для φ и ψ:

$$i\gamma\varphi_{\boldsymbol{\tau}}+i\omega\psi_{\mathbf{n}}+\varsigma(\omega^2-\gamma^2)\psi=0,\tag{6}$$

$$-(\omega^2-\gamma^2)\varphi+\varsigma(i\gamma\psi_{\boldsymbol{\tau}}-i\omega\varphi_{\mathbf{n}})=0.\tag{7}$$

Рассмотрим функцию $u=(\varphi\quad\psi)^{\top}$. Тогда систему двух уравнений можно свести к одному. Будем считать, что $\varsigma\neq 0$. Получим следующую задачу:

$$\Delta_2 u+(\omega^2-\gamma^2)u=0,\tag{8}$$

$$i\omega\varsigma\,I_1^{-1}u_{\mathbf{n}}+i\gamma\,I_2u_{\boldsymbol{\tau}}+\left(\omega^2-\gamma^2\right)I_1u\big|_{\partial S}=0,\tag{9}$$

где введены обозначения:

$$I_1=\begin{pmatrix}-1&0\\0&\varsigma\end{pmatrix},\quad I_2=\begin{pmatrix}0&\varsigma\\1&0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим частный случай — волновод кольцевого сечения (с внутренним радиусом ε и внешним R), перейдем в цилиндрическую систему координат и учтем условия периодичности по θ

$$u(\rho,\theta)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m(\rho)\,e^{-im\theta}. \quad (10)$$

При этом задача принимает следующий вид:

$$\Delta_\rho u_m+(\omega^2-\gamma^2-\frac{m^2}{\rho^2})u_m=0, \quad (11)$$

$$i\omega\varsigma\, I_1^{-1}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}u_m+\frac{m\gamma}{\rho}(\mathbf{e}_\theta,\boldsymbol{\tau})I_2u_m+(\omega^2-\gamma^2)I_1u_m|_{\partial S}=0. \quad (12)$$

2. Представление спектральной задачи при помощи компактных операторов

Пусть $U(\rho)=u_m(\rho)$. Если формально умножить уравнение для $U(\rho)$ на произвольную функцию $V(\rho)=(V_1(\rho)\ \ V_2(\rho))^\top$, $V_1,V_2\in W_2^1([\varepsilon,R])$ и проинтегрировать по ρ от ε до R, то получим следующее тождество:

$$\int_\varepsilon^R V^\top\left\{\Delta_\rho U+\left(\omega^2-\gamma^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)U\right\}\rho\,d\rho=0 \quad (13)$$

Взяв интеграл по частям, тождество можно привести к виду

$$\int_\varepsilon^R\left\{-V_\rho^\top U_\rho+\left(\omega^2-\gamma^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)V^\top U\right\}\rho\,d\rho+ +\frac{im\gamma}{\omega\varsigma}\left\{V^\top I_1I_2\,U|_R-V^\top I_1I_2\,U|_\varepsilon\right\}+ +\frac{i(\omega^2-\gamma^2)}{\omega\varsigma}\left\{\rho\,V^\top(I_1)^2U\Big|_R+\rho\,V^\top(I_1)^2U\Big|_\varepsilon\right\}=0. \quad (14)$$

Назовем обобщенным решением задачи (11), (12) функцию $U=(U_1\ \ U_2)^\top$, $U_1,U_2\in W_2^1([\varepsilon,R])$, удовлетворяющую тождеству (14) при любой функции $V=(V_1\ \ V_2)^\top$, $V_1,V_2\in W_2^1([\varepsilon,R])$. Введем новое скалярное произведение

$$[U,V]=\int_\varepsilon^R\left\{V_\rho^\top U_\rho+V^\top U\right\}\rho\,d\rho \quad (15)$$

и следующие обозначения:

$$a(U,V)=\int_\varepsilon^R\left(\frac{m^2}{\rho^2}-1\right)V^\top U\rho\,d\rho,\qquad b(U,V)=\int_\varepsilon^R V^\top U\,\rho d\rho, \quad (16)$$

$$c_1(U,V)=-\frac{im}{\omega\varsigma}\left\{V^\top I_1I_2U|_R-V^\top I_1I_2U\Big|_\varepsilon\right\},$$
$$c_2(U,V)=\frac{i}{\omega\varsigma}\left\{\rho\,V^\top(I_1)^2U|_R+\rho\,V^\top(I_1)^2U|_\varepsilon\right\}. \quad (17)$$

Пространство с нормой $\sqrt{[U,U]}$ является гильбертовым. Назовем его h. В этом гильбертовом пространстве билинейные формы $a(U,V)$, $b(U,V)$, $c_1(U,V)$ и $c_2(U,V)$ ограничены, поэтому найдутся такие ограниченные операторы A, B, C_1 и C_2, что $a(U,V)=[AU,V]$, $b(U,V)=[BU,V]$, $c_1(U,V)=[C_1U,V]$ и $c_2(U,V)=[C_2U,V]$. При этом тождество (14) можно записать в виде $U+AU-(\omega^2-\gamma^2)(B+C_2)U+\gamma C_1U=0$ [3].

Будем говорить, что функция $U=(U_1\ U_2)^\top$ принадлежит пространству $h0$, если ее компоненты принадлежат L_2.

1. Рассмотрим оператор A. Для того чтобы он был вполне непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\alpha>0\ \exists k(\alpha)$:

$$|a(V,V)|\leqslant\alpha\|V\|_h^2+k(\alpha)h(V,V), \quad (18)$$

где $h(V,V)$ — симметричная, положительно определенная, вполне непрерывная (т. е. соответствующая компактному оператору) билинейная форма [4],

$$|a(V,V)|\leqslant\int_\varepsilon^R\left|\frac{m^2}{\rho^2}-1\right|\,|V|^2\rho\,d\rho\leqslant \leqslant\alpha\|V\|_h^2+\frac{R}{\alpha}\left|1+\frac{m^2}{\varepsilon^2}\right|(V,V)_{h0}. \quad (19)$$

Для любой ограниченной области Ω пространство $W_2^1(\Omega)$ вложено компактно в $L_2(\Omega)$. Поэтому h вложено компактно в $h0$. Скалярное произведение $(V,V)_{h0}$ является компактной билинейной формой в h. Таким образом, оператор A также является вполне непрерывным в h.

2. Аналогично можно доказать компактность оператора B в h:

$$|b(V,V)|=\left|\int_\varepsilon^R|V|^2\rho\,d\rho\right|\leqslant \leqslant\sqrt{\int_\varepsilon^R\rho^2|V|^2\,d\rho}\sqrt{\int_\varepsilon^R|V|^2\,d\rho}\leqslant\alpha\|V\|_h^2+\frac{R}{\alpha}\|V\|_{h0}^2. \quad (20)$$

3. Остается доказать компактность операторов C_1 и C_2 в h:

$$c_1(V,V)= =-\frac{im}{\omega}\left\{-\bar V_1\ V_2|_R+\bar V_1\ V_2|_\varepsilon+\bar V_2\ V_1|_R-\bar V_2\ V_1|_\varepsilon\right\}, \quad (21)$$

$$|c_1(V,V)|\leqslant\frac{2m}{\omega}\left\{|V|_R^2+|V|_\varepsilon^2\right\}\leqslant \leqslant\frac{2m}{\omega\varepsilon}\left(R\,|V|_R^2+\varepsilon\,|V|_\varepsilon^2\right)\leqslant\text{const}\left|\oint_{\partial S1}|V|^2dl-\oint_{\partial S2}|V|^2dl\right|, \quad (22)$$

$$c_2(V,V) = = \frac{i}{\omega}\left\{ R\left(\bar V_1 \;\; \bar V_2\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\varsigma}V_1 \\ \varsigma V_2 \end{pmatrix}_R + \varepsilon \left(\bar V_1 \;\; \bar V_2\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\varsigma}V_1 \\ \varsigma V_2 \end{pmatrix}_\varepsilon \right\}, \tag{23}$$

$$|c_2(V,V)| \leqslant \frac{\left(1+|\varsigma^2|\right)}{\omega|\varsigma|}\left|R|V|_R^2 + \varepsilon|V|_\varepsilon^2\right| \leqslant \leqslant \mathrm{const}_1 \left| \oint\limits_{\partial S1} |V|^2 dl - \oint\limits_{\partial S2} |V|^2 dl \right|. \tag{24}$$

Контур $\partial S1$ представляет собой внешнюю границу поперечного сечения волновода, а $\partial S2$ — его внутреннюю границу. Изменим направление обхода контура $\partial S2$ и сложим интегралы под модулем:

$$|c_1(V,V)| \leqslant \mathrm{const}\left|\oint\limits_{\partial S}|V|^2 dl\right|, \quad |c_2(V,V)| \leqslant \mathrm{const}_1\left|\oint\limits_{\partial S}|V|^2 dl\right|. \tag{25}$$

Воспользуемся теоремой Стокса:

$$\oint\limits_{\partial S}|V|^2 dl = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial\rho}\left(|V|^2\rho\right)d\rho d\varphi = = 2\pi\int\limits_\varepsilon^R \left\{|V|^2 + V^\top\rho\frac{dV}{d\rho} + \frac{dV^\top}{d\rho}\rho V\right\}d\rho \leqslant \leqslant \alpha\|V\|_h^2 + 2\pi\left(1+\frac{8\pi R}{\alpha}\right)\|V\|_{h0}^2. \tag{26}$$

Следовательно, $\oint\limits_{\partial\Omega}|V|^2 dl$ является вполне непрерывной билинейной формой, и поэтому операторы C_1 и C_2 — компактны.

Таким образом, показано, что однородная задача для полого импедансного волновода $\Omega = \{(x,y)\in S,\ z\in R_1\}$, где поперечное сечение S является кольцом с внутренним радиусом ε и внешним радиусом R, представима при помощи компактных операторов, и, значит, к ней применима теория возмущений.

3. Нормальные волны

Поскольку уравнения для функций φ и ψ одинаковые, удобно искать решения в виде

$$\mathbf{\Pi}^{\mathrm{e}} = A\,\varphi(x,y)\,e^{i\gamma\,z}\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{\Pi}^{\mathrm{m}} = B\,\varphi(x,y)\,e^{i\gamma\,z}\mathbf{e}_z. \tag{27}$$

Если область S односвязная, то решение однородной задачи непременно имеет вид $(A\varphi, B\varphi)$, где A и B — некоторые константы. В самом деле, уравнение

$$\Delta_2\chi + (\omega^2-\gamma^2)\chi = 0 \tag{28}$$

имеет два линейно независимых решения, одно из которых имеет особенность в начале координат, а другое регулярно. Так как нас интересуют ограниченные в S решения, то они будут представлять собой это регулярное решение, умноженное на константу.

Условие Щукина–Леонтовича даст систему линейных уравнений для определения констант A и B. Эта система разрешима тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю. Следовательно,

$$-i\omega\alpha^2\varphi_{\mathbf n}\varphi + \varsigma\left(\gamma^2\varphi_{\boldsymbol\tau}^2 + \omega^2\varphi_{\mathbf n}^2 + \alpha^4\varphi^2\right) - - i\varsigma^2\omega\alpha^2\varphi_{\mathbf n}\varphi = 0, \tag{29}$$

где $\alpha = \sqrt{\omega^2-\gamma^2}$. Поэтому имеет место

Теорема. *Пусть числа α_n и функции $\varphi_n(x,y)$ являются решением спектральной задачи*

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \alpha^2\varphi = 0, \quad (x,y)\in S, \\ \varphi_{\mathbf n}\varphi|_{\partial S} = \\ \quad = \dfrac{\varsigma}{i\omega\alpha^2(1+\varsigma^2)}\left((\omega^2-\alpha^2)\varphi_{\boldsymbol\tau}^2 + \omega^2\varphi_{\mathbf n}^2 + \alpha^4\varphi^2\right). \end{cases} \tag{30}$$

Тогда $\gamma_n = \pm\sqrt{\omega^2-\alpha_n^2}$ — собственные значения однородной задачи.

Как известно, в случае регулярного волновода ($\varsigma = 0$) выполняются условия $\mathbf{\Pi}^{\mathrm e}|_{\partial S} = 0$, $\left.\frac{\partial\mathbf{\Pi}^{\mathrm m}}{\partial\mathbf n}\right|_{\partial S} = 0$, и поэтому либо $A\neq 0$, $B=0$ и, следовательно, $\varphi_0|_{\partial S} = 0$, либо $A=0$, $B\neq 0$ и $\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial\mathbf n}\right|_{\partial S} = 0$, где φ_0 — собственная функция задачи Дирихле или Неймана на S соответственно. Все собственные значения α_n при $\varsigma = 0$ исчерпываются собственными значениями оператора Лапласа задач Дирихле и Неймана на сечении S. Задача (30) этому условию также удовлетворяет.

Доказанную теорему используем для расчета α_n при малых ς. Пусть e_0 — собственное значение задачи Дирихле или Неймана на S. Подставим в (30) ряды теории возмущений:

$$\alpha^2 = e_0 + e_1\varsigma + \ldots, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1\varsigma + \ldots.$$

Для φ_1 имеет место задача

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 + e_0\varphi_1 = -e_1\varphi_0, \quad (x,y)\in S, \\ \varphi_0\varphi_{1,\mathbf n} + \varphi_1\varphi_{0,\mathbf n}|_{\partial S} = \\ \quad = \dfrac{1}{i\omega e_0}\left((\omega^2-e_0)\varphi_{0,\boldsymbol\tau}^2 + \omega^2\varphi_{0,\mathbf n}^2 + e_0^2\varphi_0^2\right). \end{cases} \tag{31}$$

Поэтому если e_0 отвечает условию Дирихле, то

$$e_1 = \frac{\int\limits_{\partial S} dl\,\omega^2\varphi_{0,\mathbf n}^2}{i\omega\,e_0\int\limits_S dxdy\,\varphi_0^2}, \tag{32}$$

а если e_0 отвечает задаче Неймана, то

$$e_1 = -\frac{\int\limits_{\partial S} dl\left((\omega^2-e_0)\varphi_{0,\mathbf n}^2 + e_0^2\varphi_0^2\right)}{i\omega\,e_0\int\limits_S dxdy\,\varphi_0^2}. \tag{33}$$

Поскольку обычно на практике ς мало, этих поправок должно быть достаточно. При вещественном ς все γ_n уходят с вещественной оси, т. е. действительно происходит затухание.

То что в окрестности любого однократного собственного значения невозмущенной задачи решение задачи (30) существует и может быть разложено в ряд по степеням ς, следует из того, что у уравнения $\Delta_2\varphi + \alpha^2\varphi = 0$ существуют решения, зависящие от α^2 аналитически в окрестности вещественной оси, а их подстановка в граничное условие приводит к трансцендентному уравнению для определения $\alpha^2(\varsigma)$, к которому применима подготовительная теорема Вейерштрасса.

Исследование постоянных распространения и затухания собственных волн в волноводах с потерями проводилось в работе [1]. В предположении, что по волноводу распространяется только одна собственная волна, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(x,y,z) &= g_s(z)\mathbf{E}_s^0(x,y), \\ \mathbf{H}_s(x,y,z) &= g_s(z)\mathbf{H}_s^0(x,y), \end{aligned} \tag{34}$$

энергетическим методом получено

$$\alpha_s = \operatorname{Re} Z_s \frac{\oint\limits_{\partial S} \left|\mathbf{H}_{s\boldsymbol{\tau}}^0\right|^2 dl}{2\operatorname{Re}\int\limits_S \left[\mathbf{E}_s^0, \mathbf{H}_s^{0*}\right]\mathbf{e}_z ds}, \tag{35}$$

где $|g_s(z)|^2 = |g_s(0)|^2\, e^{-2\alpha_s z}$. При этом ввиду малости $|Z_s|$ предполагают, что поле в волноводе с потерями в формуле (35) можно приближенно заменить полем в волноводе с идеально проводящими стенками. Этот метод неприменим вблизи критической частоты и в закритической области.

При условии достаточно большой проводимости стенок и пренебрежимо малой связи волн различных номеров в работе [1] были найдены поправки γ_k первого порядка малости, по структуре схожие с полученными в данной работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 03-01-00166, 02-01-00271) и программы «Университеты России» (грант УР.02.03.010).

Литература

1. *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электромагнитных системах с потерями. М., 1983.
2. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1991
3. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973
4. *Stummel F.* Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. Berlin; Heidelberg; New York, 1969.

Поступила в редакцию
10.12.03