Следовательно, для пропагатора W-бозона в общей R_ξ-калибровке в скрещенном электромагнитном поле справедливо представление

$$G^{R_\xi}_{\beta\mu}(x,x') \equiv G^{\alpha=1-\xi}_{\beta\mu}(x,x') =$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta^{R_\xi}_{\beta\rho} \Omega^\rho_\mu(x,x') \exp\{i\Gamma(x,x')\} = \tag{7}$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left[g_{\beta\rho} - \frac{\pi_\beta \pi_\rho}{M_W^2} \left[1 - \frac{p^2 - M_W^2}{(p^2 - M_W^2/\xi)} \right] \right] \times$$
$$\times \Omega^\rho_\mu(x,x') \exp\{i\Gamma(x,x')\},$$

где явный вид $\Gamma(x,x')$ приведен в (2).

При соответствующем выборе значения параметра ξ, фиксирующего калибровку, формула (7) дает выражение для пропагатора W-бозона в скрещенном электромагнитном поле для случаев фейнмановской и унитарной калибровок.

Если в формуле (7) «выключить» электромагнитное поле ($A_\mu \to 0$), то получится известный результат (см., напр., [10]) для пропагатора W-бозона в R_ξ-калибровке в вакууме. Кроме того, явный вид пропагатора W-бозона в R_ξ-калибровке позволяет строго обосновать дополнительную процедуру, которая была проведена с целью получения конечного результата при расчетах в унитарной калибровке полевого W-бозонного вклада в аномальный магнитный момент заряженного лептона [1, 3]. С использованием (7) можно также получить замкнутое выражение [7] для магнитного момента ν_e, точно учитывающее зависимость от отношений масс частиц (m_ν/m_W и m_e/m_W), участвующих в соответствующем процессе.

Литература

1. *Тернов И.М., Родионов В.Н., Перес-Фернандес В.К., Студеникин А.И.* // Изв. вузов, Физика. 1985. № 12. С. 55.
2. *Студеникин А.И., Тернов А.И.* // Изв. вузов, Физика. 1992. № 6. С. 65.
3. *Студеникин А.И.* // ЖЭТФ. 1990. **97**. С. 1407; *Studenikin A.* // Results and Perspectives in Particle Physics: Frascati Physics Series (Italy) / Ed. M. Greco. 1998. V. 12. P. 247.
4. *Жуковский В.Ч., Шония Т.Л., Эминов П.А.* // ЖЭТФ. 1993. **104**. С. 3269.
5. *Elmfors P., Persson D., Skagerstam B.* // Nucl. Phys. 1996. **B464**. P. 153.
6. *Erdas A., Kim C., Lee T.* // E-print Archives: hep-ph/9804318.
7. *Egorov A.M., Lobanov A.E., Studenikin A.I.* // New Worlds in Astroparticle Physics / Ed. A. Mourao. Singapore: World Scientific, 1999; E-print Archives: hep-ph/9902447.
8. *Ритус В.И.* // Тр. ФИАН. М.: Наука, 1979. **Т**. 111. С. 5.
9. *Студеникин А.И.* // Изв. вузов, Физика. 1988. № 8. С. 126; Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1992.
10. *Fujikawa K., Lee B., Sanda A.* // Phys. Rev. 1972. **D7**. P. 2923.

Поступила в редакцию
11.01.99

УДК 519.2:534

О ЗАДАЧЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ НЕЧЕТКОЙ МОДЕЛИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Т. В. Матвеева, Ю. П. Пытьев

(*кафедра компьютерных методов физики*)

Показано, каким образом априорная нечеткость модели эксперимента определяет нечеткость интерпретации измерений.

Введение

Для решения линейной статистической задачи интерпретации измерений требуется знание моментов первого и второго порядков случайных ошибок, в то время как на практике эти знания обычно нечетки, носят качественный характер и не могут быть использованы в рамках теоретико-вероятностных методов. Для использования нечеткой информации о математической модели эксперимента в работе предлагается теоретико-возможностный подход [1]. Приведем необходимые для дальнейшего изложения результаты по методам редукции измерений и теории возможностей [1, 2].

Пусть схема измерений представлена в виде

$$\xi = Af + \nu, \tag{1}$$

где ξ — искаженный шумом $\nu \in \mathcal{R}$ выходной сигнал Af прибора A, на вход которого поступил сигнал $f \in \widetilde{\mathcal{R}}$ от *измеряемого* объекта и среды; $\mathcal{R}, \widetilde{\mathcal{R}}$ — конечномерные евклидовы пространства; A — линейный оператор, моделирующий измерительный прибор. В задаче редукции измерения задан линейный оператор $U\colon \widetilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{U}$, моделирующий связь между сигналом f и параметрами $Uf \in \mathcal{U}$ *исследуемого* объекта. Оператор U моделирует так называемый идеальный измерительный прибор, на выходе которого исследователь получает параметры объекта, свойственные его естественному состоянию, не искаженному измерением. В простейшей задаче редукции измерения (1) требуется определить линейный оператор $R\colon \widetilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{U}$ так, чтобы преобразование $R\xi = RAf + R\nu$ наиболее точно приближало значения Uf параметров исследуемого объекта, при этом $R\xi$ можно рассматривать как искаженный шумом $R\nu$ выходной сигнал прибора RA. Описанная задача называется задачей редукции измерения к идеальному прибору [2]. Для ее решения необходимо задать модель схемы измерения (1). Остановимся на случае теоретико-вероятностной модели $[A, \Sigma]$, в которой шум ν является случайным элементом пространства $\mathcal{R}$ с математическим ожиданием $\mathbf{E}\nu = 0$ и ковариационным оператором Σ*), а f — априори произвольный элемент пространства $\widetilde{\mathcal{R}}$. Оператор редукции $R\colon \widetilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{U}$ определим как решение задачи на минимакс для среднеквадратичной погрешности оценивания Uf посредством $R\xi$:

$$\sup_{f\in\widetilde{\mathcal{R}}} \mathbf{E}\|R\xi - Uf\|^2 \sim \min_{R\colon \mathcal{R}\to\mathcal{U}}. \tag{2}$$

Если и только если $U \in \mathcal{D}_A = \{U'\colon \widetilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{U},\ U'(I - A^- A) = 0\}$, то решение задачи (2) существует; для невырожденного ковариационного оператора Σ решение единственно и имеет вид (черточка и звездочка у оператора символизируют соответственно псевдообращение и сопряжение) [2]

$$R\xi = U(A^*\Sigma^{-1}A)^- A^*\Sigma^{-1}\xi; \tag{3}$$

сопутствующая погрешность (2) оценивания Uf посредством $R\xi$ равна

$$h(U, \Sigma) = \operatorname{Tr} U(A^*\Sigma^{-1}A)^- U^*. \tag{4}$$

Если $U = I$, $\mathcal{U} = \widetilde{\mathcal{R}}$, операторы Σ и A^*A невырождены, то формулы (3), (4) преобразуются к простому виду:

$$R\xi = (A^*\Sigma^{-1}A)^{-1} A^*\Sigma^{-1}\xi; \tag{5}$$

$$h(I, \Sigma) = \operatorname{Tr}(A^*\Sigma^{-1}A)^{-1}. \tag{6}$$

Приведем некоторые определения и понятия теории возможностей [1]. В данной работе для того, чтобы охарактеризовать нечеткое множество $A \subset X$, достаточно задать его характеристическую функцию $\varphi_A(\cdot)\colon X \to [0,1]$. Значение $\varphi_A(x)$ есть возможность включения $x \in X$ в A; если $\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$, то A — «четкое» подмножество X. Нечеткий элемент ξ, принимающий значения в X, может быть задан распределением возможностей его значений — функцией $\varphi^\xi(\cdot)\colon X \to [0,1]$, значение $\varphi^\xi(x)$ которой для каждого $x \in X$ определяет возможность равенства $\xi = x$. Функция $\varphi^\xi(\cdot)$ определяет распределение возможностей $P^\xi(\cdot)\colon \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ и соответствующее возможностное пространство $\big(X, \mathcal{P}(X), P^\xi(\cdot)\big)$. Здесь $\mathcal{P}(X)$ — σ-алгебра всех подмножеств X. Возможность включения нечеткого элемента ξ в нечеткое множество A (возможность события $\xi \in A$) дается выражением

$$p_{\varphi^\xi}(\varphi_A(\cdot)) = \sup_{x\in X} \min\Big(\varphi_A(x), \varphi^\xi(x)\Big).$$

*) Напомним, что по определению $\Sigma x = \mathbf{E}\nu(x,\nu)$, $x \in \mathcal{R}$, и $\mathbf{E}\|\nu\|^2 = \operatorname{Tr}\Sigma$ [2].

Равенство

$$\varphi^\eta(y) = \sup_{x\in g^{-1}(\{y\})} \varphi^\xi(x), \quad y \in Y, \tag{7}$$

определяет распределение нечеткого элемента $\eta = g(\xi)$, где функция $g(\cdot)\colon X \to Y$.

1. Интерпретация измерения для модели с нечетким ковариационным оператором

В рассматриваемой задаче речь пойдет о нечеткой модели шума измерений. Будем считать, что в формулах (5), (6) ковариационный оператор $\Sigma\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ — нечеткий элемент с заданным распределением $\varphi^\Sigma(S) = \theta(\operatorname{tr} S)$ возможностей его значений, где $\theta(\cdot)\colon [0,\infty) \to [0,1]$ — непрерывная, строго монотонно убывающая функция, $\theta(0) = 1$, $\varphi^\Sigma(S)$ — возможность равенства $\Sigma = S$. В таком случае равенство (6) определяет нечеткий элемент $\mathcal{R}_+ = [0,\infty)$, моделирующий среднеквадратичную погрешность редукции измерения; требуется получить распределение возможностей его значений — функцию $\varphi^h(\cdot)\colon [0,\infty) \to [0,1]$, значение $\varphi^h(t)$ которой для каждого $t \in [0,\infty)$ определяет возможность того, что *среднеквадратичная погрешность редукции измерения равна* t. Согласно (7), для определения $\varphi^h(t)$ требуется найти

$$\varphi^h(t) = \sup_{S\colon t=\operatorname{tr}(A^*S^{-1}A)^{-1}} \varphi^\Sigma(S). \tag{8}$$

Поскольку $\theta(\cdot)$ — монотонно убывающая функция, то задачу (8) можно записать в виде

$$\varphi^h(t) = \theta\Big(\inf_{S\colon t=\operatorname{tr}(A^*S^{-1}A)^{-1}} \operatorname{tr} S\Big). \tag{9}$$

З а м е ч а н и е. В выражениях (8), (9) предполагается невырожденность оператора S. Однако точная нижняя грань (9) не достигается на невырожденном операторе S; можно показать, что точная нижняя грань в (9) достигается на вырожденном операторе, который является функцией оператора A^*A.

Чтобы найти решение задачи (9), введем ортонормированный базис $\{e_j\}$, $j = 1,\dots,n$, пространства $\mathcal{R}$, состоящий из собственных векторов самосопряженного неотрицательного оператора A^*A: $A^*Ae_j = \alpha_j^2 e_j$, $j = 1,\dots,n$, $\alpha_1^2 \leqslant \alpha_2^2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_n^2$, $n = \dim\mathcal{R}$. Положительно определенный ковариационный оператор S, согласно замечанию, имеет ту же систему собственных векторов $\{e_j\}$, $j = 1,\dots,n$. Обозначим $s_j^2 = (e_j, Se_j)$, $j = 1,\dots,n$. Задача (9) примет вид

$$\varphi^h(t) = \theta\left(\min_{s_j\colon t=\sum\limits_{j=1}^n s_j^2/\alpha_j^2} \sum_{j=1}^n s_j^2\right). \tag{10}$$

Заметим, что функция Лагранжа $\sum\limits_{j=1}^{n} s_j^2 + \omega\Big(t - \sum\limits_{j=1}^{n} s_j^2/\alpha_j^2\Big)$ задачи (10) по непрерывности может быть продолжена на класс всех (не только невырожденных) самосопряженных неотрицательных операторов $S = S(A^*A)$.

Теорема 1. *Решением задачи* (10) *является самосопряженный неотрицательный оператор* $S\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, $Se_1 = t\alpha_1^2 e_1$, $Se_2 = \ldots = Se_n = 0$, *и распределение возможностей нечеткой погрешности*

$$\varphi^h(t) = \theta(t\alpha_1^2), \quad t \in [0, \infty). \tag{11}$$

В теореме определено маргинальное распределение возможностей ошибки редукции измерения (1). Так как совместное распределение нечеткого вектора $R\xi$ из (5) и погрешности h из (6) есть $\varphi(h,t) = \theta(\operatorname{tr} S(r,t))$, где

$$\operatorname{tr} S(r,t) = \sup\{\operatorname{tr} S | S\colon\ \mathcal{R} \to \mathcal{R},\ S > 0,$$
$$(A^*S^{-1}A)^{-1}A^*S^{-1}\xi = r,\ \operatorname{tr}(A^*S^{-1}A)^{-1} = t\},$$

$t \in [0, \infty)$, $r \in \widetilde{\mathcal{R}}$, то $\varphi^h(t) = \sup\limits_{r \in \mathcal{R}} \varphi(r,t)$, $t \in [0,\infty)$, и $\varphi^h(t) \geqslant \varphi(r,t)$ для каждого $r \in \widetilde{\mathcal{R}}$. Иначе говоря, в теореме 1 определена «максимальная нечеткость» погрешности редукции.

2. Задача редукции измерений при дополнительных «нечетких» измерениях

Пусть кроме измерения (1) выполнено измерение $\xi' = A'f + \nu'$, где $A'\colon \widetilde{\mathcal{R}} \to \mathcal{R}$ — линейный оператор, шум $\nu' \in \mathcal{R}$ — случайный вектор с математическим ожиданием $\mathbf{E}\nu' = 0$ и ковариационным оператором Σ'. Схему с дополнительным измерением представим в виде

$$\tilde{\xi} = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} \nu \\ \nu' \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Рассмотрим модель измерения $[\widetilde{A}, \widetilde{\Sigma}]$, в которой $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}$ и $\widetilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma' \end{pmatrix}$. Пусть операторы A^*A, Σ, Σ' невырождены, оператор $U = I$, $A' = I$. Погрешность оценивания (2) в этом случае задается формулой

$$\tilde{h} = \operatorname{tr}(A^*\Sigma^{-1}A + \Sigma'^{-1})^{-1}. \tag{13}$$

Если исследователь может охарактеризовать лишь возможные значения оператора Σ' как нечеткого элемента $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$, то погрешность оценивания (13) как нечеткий элемент $\mathcal{R}_+$ будет определяться функцией распределения возможностей $\varphi^{\tilde{h}}(\cdot)$:

$$\varphi^{\tilde{h}}(t) = \sup_{S\colon\ t = \operatorname{tr}(A^*\Sigma^{-1}A + S^{-1})^{-1}} \varphi^{\Sigma'}(S), \quad t \in [0, \infty). \tag{14}$$

Задача (14) эквивалентна задаче

$$\varphi^{\tilde{h}}(t) = \theta\Big(\min_{S\colon\ t = \operatorname{tr}(Q + S^{-1})^{-1}} \operatorname{tr} S\Big), \quad t \in [0, \infty), \tag{15}$$

где $Q = A^*\Sigma^{-1}A$. Легко видеть, что решение задачи (15) является функцией самосопряженного неотрицательного оператора Q. Введем ортонормированный базис пространства $\mathcal{R}$, состоящий из собственных векторов этого оператора: $Qe_j = \alpha_j^2 e_j$, $j = 1, \ldots, n$, и упорядочим его по возрастанию собственных значений: $\alpha_1^2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n^2$. Поскольку $S = S(Q)$, то $Se_j = \sigma_j^2 e_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Теорема 2. *Решением задачи* (15) *является самосопряженный неотрицательный оператор* $S\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, $Se_1 = \dfrac{t}{1 - \alpha_1^2 t} e_1$, $Se_2 = \ldots = Se_n = 0$, *и функция распределения возможностей нечеткой погрешности имеет вид*

$$\varphi^h(t) = \theta\Big(\frac{t}{1 - \alpha_1^2 t}\Big), \quad 0 \leqslant t < \frac{1}{\alpha_1^2}. \tag{16}$$

Литература

1. *Пытьев Ю.П.*//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 2. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 2. P. 1).
2. *Пытьев Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989.

Поступила в редакцию
08.02.99