АСТРОНОМИЯ

УДК 550.3

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ЯДРА ЗЕМЛИ В ПОЛЕ НЕРАВНОВЕСНОЙ ОБОЛОЧКИ ЗЕМЛИ

С. Л. Пасынок

(*ГАИШ*)

Исследовано влияние неравновесной оболочки Земли на параметры вращения внутреннего ядра Земли. Получено выражение для части взаимной силовой функции эллиптического твердого ядра и неравновесной оболочки, содержащее углы Эйлера. Рассчитаны параметры вращения твердого ядра для случая, когда жидкое ядро отсутствует. Показано, что эффект наличия несимметричной оболочки должен быть учтен в теориях вращения, линейных по сжатию. Для этого учета можно использовать вычисленную в работе силовую функцию.

Введение

Исследованиям возможных движений внутреннего ядра Земли в последнее время уделяется все большее внимание. Предполагается, что они могут оказывать значительное влияние на многие геофизические и геодинамические процессы. Настоящая работа посвящена исследованию влияния неравновесной оболочки Земли на вращение внутреннего ядра Земли.

Постановка задачи

Будем исследовать вращательное движение Земли в следующей модели. Твердое ядро Земли будем считать однородным эллипсоидом вращения с плотностью σ_1, геометрическим сжатием ε и малой полуосью b. Границу ядро–мантия аппроксимируем сферой с радиусом a. Неравновесную (негидростатическую) часть силовой функции оболочки Земли будем моделировать потенциалом простого слоя, расположенным на сферической границе ядро–мантия. При исследовании вращательного движения твердого ядра пренебрежем воздействием на него жидкого ядра. Будем учитывать только силу притяжения его оболочкой и приливные силы. Все вычисления будем проводить с точностью до членов, линейных по ε.

В дальнейшем изложении будем использовать следующие три системы координат (СК).

Невращающаяся СК. Оси неподвижны относительно удаленных галактик, а направление оси Oz совпадает с направлением средней угловой скорости вращения Земли.

Вращающаяся СК. Оси неподвижны относительно мантии, а направление оси Oz совпадает с направлением оси Oz неподвижной СК. Вращающаяся СК может быть получена из неподвижной поворотом вокруг оси Oz на угол Ωt, если в момент $t = 0$ оси этих СК совпадают.

Система главных осей тензора инерции твердого ядра. Оси неподвижны относительно точек твердого ядра и совпадают с его главными осями инерции, а ось Oz соответствует вращению с максимальным моментом инерции C. В данной системе координат тензор инерции диагонален. Эта СК может быть получена из неподвижной следующей последовательностью поворотов. Начальный поворот производится вокруг оси Oz на угол прецессии Ψ против часовой стрелки, если смотреть навстречу направлению оси Oz. Затем следует поворот на угол нутации Θ по часовой стрелке вокруг смещенной с помощью предыдущего поворота оси Ox на угол Ψ против часовой стрелки, если смотреть навстречу направлению новой оси Ox. И наконец, последний поворот совершается на угол свободного вращения Φ вокруг смещенной с помощью предыдущего поворота оси Oz против часовой стрелки, если смотреть навстречу направлению этой оси Oz. Углы Эйлера Φ, Θ, Ψ введены так же, как в книге [1, с. 81].

Все эти системы координат являются правыми, и их начала совпадают между собой и с центром сферической границы ядро–мантия.

Собственные частоты вращения и лунно-солнечная прецессия и нутация

В этой модели ядро полностью аналогично твердой Земле, для которой собственные частоты вращения и лунно-солнечная прецессия и нутация уже были вычислены в [1, 2]. Используя материал работы [1, с. 52, 53, 86, 87] и полагая, что модуль угловой скорости вращения ядра χ приблизительно равен угловой скорости вращения оболочки Ω, получим, что для ядра эйлеров период составляет ~ 400 сут (в отличие от ~ 300 сут для Земли), а лунно-солнечная прецессия ядра $\dot{\Psi} \approx -37''$ в год (что соответствует периоду $\sim 36\,000$ лет).

Вынужденные прецессия и нутация твердого ядра в поле неравновесной оболочки Земли

Коэффициенты A_{11}, A_{10} и B_{11} определяют Δa — смещение центра твердого ядра относительно центра оболочки. По разным оценкам оно составляет от ~ 1 м до ~ 1 км. Тогда влияние этих коэффициентов скажется в появлении в решении некоторых функций, пропорциональных малому параметру $\Delta a/a$. Его значения заключены в пределах от $\sim 10^{-6}$ до $\sim 10^{-5}$, что по порядку величины равно квадрату геометрического сжатия Земли. Поскольку мы строим модель, линейную по геометрическому сжатию Земли, то можно положить дипольный момент оболочки равным нулю. В разложении аномального потенциала по сферическим функциям пренебрежем гармониками выше второго порядка. Тогда силовая функция аномального потенциала во вращающейся системе координат имеет вид

$$\nu_E = \frac{1}{a}\sum_{m=0}^{2}\left(\frac{\tilde{r}}{a}\right)^2 (A_{2m}\cos m\tilde{\lambda}+B_{2m}\sin m\tilde{\lambda})P_n^m(\cos\theta), \tag{1}$$

где $(\tilde{r},\tilde{\lambda},\tilde{\theta})$ — сферические координаты точки в системе координат, жестко связанной с мантией, а A_{2m} и B_{2m} — постоянные. В неподвижной же системе координат ν_E будет иметь вид

$$\nu_E = \frac{1}{a}\sum_{m=0}^{2}\left(\frac{\hat{r}}{a}\right)^2 (\hat{A}_{2m}\cos m\hat{\lambda}+\hat{B}_{2m}\sin m\hat{\lambda})P_n^m(\cos\hat{\theta}), \tag{2}$$

где $(\hat{r},\hat{\lambda},\hat{\theta})$ — сферические координаты точки в неподвижной системе координат, а $\hat{A}_{nm}$ и $\hat{B}_{nm}$ — следующие функции времени:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{2m} &= A_{2m}\cos m\Omega t - B_{2m}\sin m\Omega t,\\ \hat{B}_{2m} &= A_{2m}\sin m\Omega t + B_{2m}\cos m\Omega t,\\ \hat{A}_{20} &= A_{20}, \quad m=1,2. \end{aligned} \tag{3}$$

При переходе от (1) к (2) было учтено, что при вращении системы координат вокруг оси Oz не изменяются ни модуль радиус-вектора, ни координата z, а долготы вращающейся и не вращающейся систем координат связаны соотношением $\tilde{\lambda}=\hat{\lambda}-\Omega t$.

Вычисление силовой функции твердого ядра в поле несимметричной оболочки в системе главных осей инерции твердого ядра

Силовая функция системы n тел вычисляется по формуле [3, с. 48]

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}V_{ij},$$

где $V_{ij} = G\int\limits_{(T_i)}\sigma_i d\tau_i \int\limits_{(T_j)}(\sigma_j/r_{ij})d\tau = G\int\limits_{(T_i)}\sigma_i\nu_i d\tau$, σ_i — плотность i-го тела, $d\tau$ — элемент объема, r_{ij} — расстояние между текущей точкой тела i и текущей точкой тела j, ν_i — удельная силовая функция тела i.

В нашем случае $V=(1/2)(V_{II}+V_{EE}+V_{IE}+V_{EI})$, где индексы E и I относятся к простому слою, расположенному на границе ядро–мантия, и ядру соответственно.

Слагаемые V_{II} и V_{EE} не будут содержать углов Эйлера и потому не войдут в уравнения Пуассона. Для V_{IE} получим

$$\begin{aligned} V_{IE} = \sigma_I\int\limits_{V_I}\nu_E d\tau = \sigma_I\Bigg\{ &\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{b}\nu_E r^2\sin\theta\, d\theta\, d\lambda + \\ &+\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{b(1+\varepsilon\sin^2\theta)}\nu^E r^2 dr\sin\theta\, d\theta\, d\lambda\Bigg\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где r, λ, θ — сферические координаты точки в системе главных осей; при этом учтено, что с точностью до членов, пропорциональных сжатию, уравнение эллипсоида вращения в системе главных осей имеет вид $r=b(1+\varepsilon\sin^2\theta)$. Первый интеграл равен нулю, а для вычисления второго заметим, что

$$\nu_E(b+h,\lambda,\theta) = \nu_E(b,\lambda,\theta) + h\frac{\partial\nu_E}{\partial r}\Big|_{b,\lambda,\theta} + O(h^2).$$

Подставим это выражение во второй член формулы (4) и произведем замену переменных: $r=b+h$. Проинтегрировав по h получившийся в результате такой подстановки интеграл, получим

$$V_{IE} = \sigma_I b^4\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} d\lambda\, d\theta\sin^3\theta\frac{\partial\nu_E}{\partial r}\Big|_{b,\lambda,\theta} + O(\varepsilon^2), \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial\nu_E}{\partial r}\Big|_{b,\lambda,\theta} = \frac{2b}{a^3}\Bigg(&\left(3\hat{A}_{22}-\frac{\hat{A}_{20}}{2}\right)\hat{n}_x^2 - \left(3\hat{A}_{22}+\frac{\hat{A}_{20}}{2}\right)\hat{n}_y^2 + \\ &+\hat{A}_{20}\hat{n}_z^2 + 3\hat{A}_{21}\hat{n}_x\hat{n}_z + 3\hat{B}_{21}\hat{n}_y\hat{n}_z + 6\hat{B}_{22}\hat{n}_x\hat{n}_y\Bigg), \end{aligned} \tag{6}$$

$\hat{n}_i$ — компоненты единичного вектора в невращающейся системе координат: $\hat{n}_i=(\cos\hat{\lambda}\sin\hat{\theta}, \sin\hat{\lambda}\sin\hat{\theta}, \cos\hat{\theta})$. Последнее выражение получено дифференцированием по r формулы (2) с учетом инвариантности модуля радиус-вектора точки относительно вращений. Но чтобы им воспользоваться, необходимо выразить компоненты единичного радиус-вектора невращающейся системы координат $\hat{n}_k$ через компоненты единичного радиус-вектора системы главных осей ядра n_k. Если углы Эйлера Θ, Λ и Φ ввести так, как это сделано в книге [1, с. 81], то связь $\hat{n}_k$ и n_k будет иметь вид

$$\hat{n}_k = \sum_{i=1}^{3}R_{ki}^T n_i, \tag{7}$$

$$R_{ki}^T = \begin{pmatrix} \cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\sin\Psi\cos\Theta & -\sin\Phi\sin\Psi - \sin\Psi\cos\Phi\cos\Theta & -\sin\Theta\sin\Psi \\ \cos\Phi\sin\Psi + \sin\Phi\cos\Psi\cos\Theta & -\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos\Theta & \sin\Theta\cos\Psi \\ -\sin\Phi\sin\Theta & -\cos\Phi\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}.$$

Подставим последнее выражение в формулу (6), которую после этого подставим в интеграл (5) и проинтегрируем. Вычисление приводит к результату:

$$V_{IE} = -\frac{2C\varepsilon}{a^3}Q_{zz},$$

$$Q_{zz} = \left(3\widehat{A}_{22} - \frac{\widehat{A}_{20}}{2}\right)\sin^2\Psi\sin^2\Theta - \left(3\widehat{A}_{22} + \frac{\widehat{A}_{20}}{2}\right)\sin^2\Theta\cos^2\Psi + \widehat{A}_{20}\cos^2\Theta - 3\widehat{A}_{21}\sin\Theta\cos\Theta\sin\Psi + 3\widehat{B}_{21}\cos\Theta\sin\Theta\cos\Psi - 6\widehat{B}_{22}\sin^2\Theta\sin\Psi\cos\Psi.$$

В последней формуле так же, как и ранее, опущен член, который не зависит от углов Эйлера.

Теперь приступим к вычислению V_{EI}. Если простой слой имеет плотность

$$\sigma_E = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(a_{nm}\cos(m\lambda) + b_{nm}\sin(m\lambda))P_n^m(\cos\theta)$$

и создает силовую функцию

$$\nu_E = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\widehat{r}}{a}\right)^n \times (\widehat{A}_{nm}\cos(m\widehat{\lambda}) + \widehat{B}_{nm}\sin(m\widehat{\lambda}))P_n^m(\cos\widehat{\theta}),$$

то, согласно [3, с. 260], имеет место соотношение

$$\widehat{A}_{nm} = \frac{4\pi a^2 G}{2n+1}a_{nm},$$

где G — гравитационная постоянная. Отсюда сразу же следует, что в нашем случае

$$\sigma_E = \frac{5}{4\pi G a^2}\sum_{m=0}^{2}(\widehat{A}_{2m}\cos m\widehat{\lambda} + \widehat{B}_{2m}\sin m\widehat{\lambda})P_n^m(\cos\widehat{\theta}).$$

Теперь необходимо вычислить потенциал ядра на сферической границе радиуса a. Часть ядра, представляющая собой сферу радиуса b, не влияет на вращение. Плотность оставшейся части можно в собственной системе координат ядра с точностью до ε представить в виде

$$\sigma = b\sigma_I\varepsilon\sin^2\theta\delta(r-b) = \frac{2b\sigma_I\varepsilon}{3}(P_0(\cos\theta) - P_2(\cos\theta))\delta(r-b).$$

Рассмотрим выражение $1/|\overline{R} - \overline{r}|$, где $\overline{R}$ — радиус-вектор точки границы ядро–мантия, в которой вычисляется поле с модулем a, а $\overline{r}$ — радиус-вектор текущей точки ядра с модулем b. Разлагая $1/|\overline{R} - \overline{r}|$ в ряд по полиномам Лежандра с помощью известной формулы из работы [3, с. 213], а затем используя формулу сложения для полиномов Лежандра [3, с. 208] и подставляя результат в выражение $\nu_I = \int_I (\sigma/|\overline{R} - \overline{r}|)d\tau$, вычислим ν_I. Далее, выражая плотность простого слоя через координаты собственной системы ядра с помощью (7) и подставляя результаты в формулу для V_{EI}, найдем: $V_{EI} = (C\varepsilon/a^3)Q_{zz}$. Вычисляя суммарную силовую функцию и учитывая, что она равна потенциальной энергии с обратным знаком, для потенциальной энергии U, входящей в уравнения Пуассона, получим

$$U = \frac{C\varepsilon}{2a^3}\left(\left(3\widehat{A}_{22} - \frac{\widehat{A}_{20}}{2}\right)\sin^2\Psi\sin^2\Theta - \left(3\widehat{A}_{22} + \frac{\widehat{A}_{20}}{2}\right)\sin^2\Theta\cos^2\Psi + \widehat{A}_{20}\cos^2\Theta - 3\widehat{A}_{21}\sin\Theta\cos\Theta\sin\Psi + 3\widehat{B}_{21}\cos\Theta\sin\Theta\cos\Psi - 6\widehat{B}_{22}\sin^2\Theta\sin\Psi\cos\Psi\right). \tag{8}$$

Теперь мы можем использовать уравнения Пуассона для вынужденных прецессии и нутации [1, с. 83]:

$$\dot{\Theta} = \frac{1}{C\chi\sin\Theta}\frac{\partial U}{\partial\Psi}, \quad \dot{\Psi} = -\frac{1}{C\chi\sin\Theta}\frac{\partial U}{\partial\Theta},$$

где χ — модуль угловой скорости вращения твердого ядра относительно неподвижной системы координат. После вычисления правых частей этих формул получим следующую систему уравнений:

$$\dot{\Theta} = -\frac{3\varepsilon}{2\chi a^3}\Big\{(\widehat{A}_{21}\cos\Psi + \widehat{B}_{21}\sin\Psi)\cos\Theta - 2(\widehat{A}_{22}\sin2\Psi - \widehat{B}_{22}\cos2\Psi)\sin\Theta\Big\},$$

$$\dot{\Psi} = \frac{3\varepsilon}{2\chi a^3}\Big\{\widehat{A}_{20}\cos\Theta + (\widehat{A}_{21}\sin\Psi - \widehat{B}_{21}\cos\Psi)\frac{\cos2\Theta}{\sin\Theta} + 2(\widehat{A}_{22}\sin2\Psi + \widehat{B}_{22}\cos2\Psi)\Big\}.$$

Так как проводимые вычисления учитывают члены первого порядка по ε, то будем искать решение этих уравнений в виде рядов по степеням ε, а затем отбросим члены выше первого порядка по ε. Тогда получим решение, используя определение коэффициентов $\widehat{A}_{nm}$ и $\widehat{B}_{nm}$ и тригонометрические тождества, в виде

$$\Theta(t) = \Theta_0 - \\ - A_1 \cos\Theta_0 \Big(\sin(\Omega t - \Psi_0 + \varphi_1) - \sin(\varphi_1 - \Psi_0) \Big) - \\ - A_2 \sin\Theta_0 \Big(\sin(2\Omega t - 2\Psi_0 - \varphi_2) + \sin(2\Psi_0 + \varphi_2) \Big),$$

$$\Psi(t) = \Psi_0 + A_0 \cos\Theta_0 t + \\ + A_1 \frac{\cos 2\Theta_0}{\sin\Theta_0} \Big(\cos(\Omega t - \Psi_0 + \varphi_1) - \cos(\varphi_1 - \Psi_0) \Big) + \\ + A_2 \sin\Theta_0 \Big(\sin(2\Omega t + 2\Psi_0 - \varphi_2) + \sin(\varphi_2 - 2\Psi_0) \Big), \tag{9}$$

где

$$A_i = \frac{3\varepsilon}{2\Omega\chi a^3} \sqrt{A_{2i}^2 + B_{2i}^2}, \quad A_0 = \frac{3\varepsilon}{2\chi a^3} A_{20},$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{B_{21}}{A_{21}}\right), \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{A_{22}}{B_{22}}\right),$$

а $\Psi(0) = \Psi_0$, $\Theta(0) = \Theta_0$ — начальные условия.

Анализ полученного решения

Уравнения (9) показывают, что угловая координата Θ осциллирует вблизи среднего значения с амплитудами $A_1 \cos\Theta_0$, $A_2 \sin\Theta_0$ и частотами Ω и 2Ω соответственно. Изменение же угловой координаты Ψ складывается из гармоник с амплитудами $A_1 \cos 2\Theta_0 / \sin\Theta_0$, $A_2 \sin\Theta_0$ и частотами Ω, 2Ω соответственно. Изменение векового члена пропорционально времени. Это приводит к вращению линии узлов в экваториальной плоскости с периодом $T = 4\pi\chi a^3/(3A_{20}\cos\Theta_0\varepsilon)$. Для оценки периода положим $\chi = \Omega$ и $\Psi_0 = 0$, $\Theta_0 = 11°$. А коэффициенты, согласно модели 3 из [4], положим равными $A_{22} = 4{,}116087269 \cdot 10^9$, $A_{21} = -2{,}424881732 \cdot 10^9$, $A_{20} = -3{,}312125693 \cdot 10^9$, $B_{21} = -2{,}151205533 \cdot 10^9$, $B_{22} = -1{,}712842689 \cdot 10^9$. Тогда для периода вращения линии узлов получим значение $T = 14228{,}74$ сут ≈ 39 лет, а для амплитуд: $A_1 \cos 2\Theta_0 / \sin\Theta_0 \approx 69''$, $A_1 cos\Theta_0 \approx 14''$, $A_2 \sin\Theta_0 \approx 4''$.

В заключение выражаю благодарность научному руководителю д-ру физ.-мат. наук Н. А. Чуйковой за плодотворные дискуссии и помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 97-05-64342 и 96-05-65015) и программы "Университеты России" (грант 2-5547).

Литература

1. *Мориц Г., Мюллер А.* Вращение Земли: теория и наблюдения. Киев, 1992.
2. *Мельхиор П.* Земные приливы. М., 1968. С. 382–383.
3. *Дубошин Г.Н.* Теория притяжения. М., 1961.
4. *Чуйкова Н.А., Казарян С.А., Пасынок С.Л.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. №2. С. 40 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 2. P. 53).

Поступила в редакцию
20.03.98