Автор благодарен Д.В. Тихомирову за любезно предоставленные иллюстрации и профессору А.Г. Попову за полезное обсуждение работы.

Литература

1. *Давыдов А.С.* Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1984.
2. *Хуберт А.* Теория доменных стенок в упорядоченных средах. М.: Мир, 1977.
3. *Skyrme T.H.R.* // Proc. Roy. Soc. 1981. **A262**. P. 237.
4. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. 1991. Т. 23. С. 99.
5. *Попов А.Г.* Точное решение основных уравнений теории поверхностей для односолитонного решения уравнения sin-Гордона: Деп. ВИНИТИ №4336-В86 от 12.06.86.
6. *Bianchi L.* Lezioni di geometria differenziale. Vol. 1, Parte 2. Bologna, 1927.
7. *Тихомиров Д.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. №1. С. 19 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 1. P. 20).

Поступила в редакцию
21.11.01

УДК 517.958; 621.372.8

ПОВЕДЕНИЕ ВЛОЖЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

М.Д. Малых

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Приведен пример задачи, близкой к спектральной задаче теории волноводов со вставкой, вложенные собственные значения которой исчезают при малом изменении коэффициентов, характеризующих заполнение. Рассмотрение этой задачи основано на методе Фубини.

В настоящее время известны многочисленные примеры волноведущих систем, обладающих собственными значениями, вложенными в непрерывный спектр [1–6]. Однако не вполне ясно, сохранятся ли они при малом изменении границы или заполнения волновода, поскольку в общем случае вложенное собственное значение при малых возмущениях может превращаться в комплексный резонанс [4, 7, 8].

В настоящей работе рассмотрен простой пример спектральной задачи, у которой исчезают вложенные собственные значения, а именно:

$$\begin{cases} u'' + (k^2 q(x) - \alpha)u = k^2 p(x) v, \\ v'' + (k^2 q(x) - \beta)v = k^2 p(x) u. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\alpha < \beta$, а функции $q(x) - 1$ и $p(x)$ — аналитические функции, регулярные в любой конечной точке вещественной оси и убывающие быстрее любой экспоненты.

Эта задача является модельным приближением для изучения спектральной задачи

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 q(x,y) u = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=\pi} = 0, \\ u \in L_2(\Omega) \end{cases} \tag{2}$$

в полом волноводе постоянного сечения

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, \;\; y \in [0, +\pi]\},$$

заполненном неоднородным веществом, которое характеризуется кусочно-постоянной функцией $q(x,y)$.

В силу полноты системы тригонометрических функций решение (2) всегда можно представить в виде

$$u(x,y;\,k) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x;\,k) \sin(ny),$$

причем $u_n(x) \in L^2(\mathbb{R}^1) \cap C^1$. Подставляя это выражение в (2), получим вместо (2) бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_n'' - n^2 u_n + k^2 \sum\limits_{m=1}^{\infty} q_{n,m} u_m = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx\, |u_n(x)|^2 < \infty, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$q_{n,m}(x) = \int\limits_S dy\, q(x,y) \sin(ny) \sin(my).$$

Нетрудно видеть, что задача (1) является весьма частным случаем задачи (3), однако можно надеяться, что и она передает характерные особенности поведения спектра задачи (2).

Предположим, что у задачи (1) существует вложенное собственное значение $k^2 \in (\alpha, \beta)$ и ему отвечает собственная функция $(u_1(x),\, v_1(x)) \in L^2(\mathbb{R}^1)$. Система (1) имеет еще три линейно-независимых решения $(u_n(x), v_n(x))$ $(n = 2, 3, 4)$. Переписав (1) в виде системы уравнений первого порядка и применив к ней теорему Линделефа [9], видим, что все четыре решения задачи (1) растут не быстрее экспоненты. Это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если решение (u_1, v_1) задачи 1 принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ и $u(x)_1 \not\equiv 0$, то у задачи 1 имеется другое решение, которое (само или его первая производная) стремится к бесконечности.*

Доказательство. Пусть (u_n, v_n) $(n = 2, \ldots, 4)$ — оставшиеся три линейно-независимых решения 1 и пусть $u(x_0) \neq 0$. Составим матрицу

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} u_1, \, u_1', \, v_1, \, v_1' \\ u_2, \, u_2', \, v_2, \, v_2' \\ u_3, \, u_3', \, v_3, \, v_3' \\ u_4, \, u_4', \, v_4, \, v_4' \end{pmatrix}$$

и заметим, что ее определитель не зависит от x.

Из уравнений

$$\begin{cases} v_n'' + (k^2 q(x) - \alpha) v_n = k^2 p(x) u_n, \\ v_m'' + (k^2 q(x) - \alpha) v_m = k^2 p(x) u_m \end{cases}$$

следует, что

$$v_n v_m'' - v_m v_n'' = k^2 p(x)(u_m v_n - u_1 v_m)$$

или

$$\frac{d}{dx} W[v_n, v_m] = k^2 p(x) \begin{vmatrix} v_n(x), \, v_m(x) \\ u_n(x), \, u_m(x) \end{vmatrix}.$$

Так как u_m, u_n, v_m, v_n растут не быстрее экспоненты, то $p(x)$ убывает быстрее и, значит, $W[v_n, v_m](x)$ все время остаются меньше некоторой константы C.

Аналогично

$$\frac{d}{dx} W[u_n, u_m] = -k^2 p(x) \begin{vmatrix} v_n(x), \, v_m(x) \\ u_n(x), \, u_m(x) \end{vmatrix},$$

поэтому предел $W[u_1, u_m] \to W^{\pm}$, когда $x \to \pm\infty$, существует и равен

$$W[u_n, u_m](x) = W^{\pm} - k^2 \int\limits_{\pm\infty}^{x} p(x) \begin{vmatrix} v_n(x), \, v_m(x) \\ u_n(x), \, u_m(x) \end{vmatrix} dx.$$

Предположим, что все определители Вронского $W[u_1, u_m]$ стремятся к нулю, когда $x \to \pm\infty$. Так как $p(x)$ убывает быстрее любой экспоненты, а u_1, u_2 растут не быстрее некоторой экспоненты, то

$$\left| k^2 p(x) \begin{vmatrix} v_n(x), \, v_m(x) \\ u_n(x), \, u_m(x) \end{vmatrix} \right| \leqslant P_0 \, \mathrm{e}^{-\gamma x}, \quad x > x_0,$$

при любом γ, если взять x_0 достаточно большим. Тогда при $x > x_0$

$$|W[u_1, u_m](x)| \leqslant \int\limits_{x}^{\infty} P_0 \, \mathrm{e}^{-\gamma x} \, dx = \frac{P_0}{\gamma} \mathrm{e}^{-\gamma x},$$

т. е. $W[u_1, u_m]$ убывает быстрее любой экспоненты. Но поскольку, например,

$$W[u_2, u_3] = \frac{1}{u_1}(u_2 W[u_1, u_3] - u_3 W[u_1, u_2]),$$

все $W[u_n, u_m]$ стремятся к нулю и в силу ограниченности $W[v_n, v_m](x)$ определитель $|\mathfrak{W}|$ тоже стремится к нулю, что невозможно ввиду того, что он вообще не зависит от x. Значит, предположение о том, что все $W[u_1, u_m] \to 0$, когда $x \to \pm\infty$, неверно, и поэтому u_m должна неограниченно возрастать, чтобы скомпенсировать убывание u_1. ■

Однако, с другой стороны, оценив любое решение $(u(x), v(x))$ системы (1) по методу Фубини [10], можно показать, что все u_m ограничены.

Теорема 2. *Все решения задачи (1) и их первые производные ограничены на всей вещественной оси.*

Доказательство. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения уравнения

$$u'' + (k^2 q(x) - \alpha) u = 0$$

с вронскианом $W = 1$, а $v_1(x)$ и $v_2(x)$ — решения уравнения

$$v'' + (k^2 q(x) - \beta) v = 0$$

с вронскианом $W = 1$. Будем искать решение (1) методом вариации постоянных. Положим

$$\begin{cases} u = a_1(x) u_1(x) + a_2(x) u_2(x), \\ v = b_1(x) v_1(x) + b_2(x) v_2(x), \end{cases}$$

тогда имеем:

$$\begin{cases} a_1(x) = \gamma_1 - k^2 \int\limits_0^x d\xi \, u_2(\xi) p(\xi) v(\xi), \\ a_2(x) = \gamma_2 + k^2 \int\limits_0^x d\xi \, u_1(\xi) p(\xi) v(\xi), \\ b_1(x) = \gamma_3 - k^2 \int\limits_0^x d\xi \, v_2(\xi) p(\xi) v(\xi), \\ b_2(x) = \gamma_4 + k^2 \int\limits_0^x d\xi \, v_1(\xi) p(\xi) v(\xi), \end{cases}$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$ — постоянные интегрирования. Значит, функции u и v выражаются одна через другую:

$$\begin{cases} u(x) - k^2 \int\limits_0^x d\xi \, \mathfrak{L}(x, \xi) p(\xi) v(\xi) = \gamma_1 u_1(x) + \gamma_2 u_2(x), \\ v(x) - k^2 \int\limits_0^x d\xi \, \mathfrak{M}(x, \xi) p(\xi) u(\xi) = \gamma_3 v_1(x) + \gamma_4 v_2(x), \end{cases}$$

где

$$\mathfrak{L}(x, \xi) = \begin{vmatrix} u_1(\xi), \, u_2(\xi) \\ u_1(x), \, u_2(x) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}(x, \xi) = \begin{vmatrix} v_1(\xi), \, v_2(\xi) \\ v_1(x), \, v_2(x) \end{vmatrix}.$$

Отсюда для u получается уравнение Вольтерра:

$$u(x) - k^4 \int\limits_0^x d\eta \, \mathfrak{k}(x, \eta) u(\eta) = F(x) \qquad (4)$$

с ядром
$$\mathfrak{k}(x,\eta)=\int\limits_{\eta}^{x} d\xi\, \mathfrak{L}(x,\xi)p(\xi)\mathfrak{M}(\xi,\eta)p(\eta)$$
и правой частью
$$F(x)=\gamma_1 u_1(x)+\gamma_2 u_2(x)+ \\ +k^2\int\limits_0^x d\xi\, \mathfrak{L}(x,\xi)p(\xi)[\gamma_3 v_1(\xi)+\gamma_4 v_2(\xi)].$$

Если $k^2\in(\alpha,\beta)$, то функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ равномерно при всех x ограничены некоторой константой C, поэтому и $|\mathfrak{L}(x,\xi)|<C^2$ при всех x и ξ. Хотя функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ могут возрастать неограниченно, но в силу того, что $p(x)$ убывает быстрее любой экспоненты, найдется такая функция $P(x)$, убывающая столь же быстро, что $|p(\xi)\mathfrak{M}(\xi,\eta)p(\eta)|<P(\xi)P(\eta)$. Поэтому ядро уравнения Вольтерра удовлетворяет неравенству
$$|k(x,\eta)|<P(\eta)C^2\int\limits_0^x d\xi\, P(\xi)\leqslant C''P(\eta),$$
где
$$C''=C^2\int\limits_0^\infty d\xi\, P(\xi)$$
при всех x и η. В силу леммы об интегральных уравнениях Вольтерра [10] решение уравнения (4) удовлетворяет неравенству
$$|u(x)-F(x)|\leqslant k^4C''J_1(x)\exp[k^4C''J_2(x)], \qquad (5)$$
где интегралы
$$J_1(x)=\int\limits_0^x P(y)\,dy \quad \text{и} \quad J_2(x)=\int\limits_0^x P(y)|F(y)|\,dy$$
ограничены равномерно некоторой константой C'''.

Остается заметить, что функция $F(x)$ ограничена на вещественной оси. В самом деле, с учетом выражения для $\mathfrak{L}$ имеем:
$$F=\gamma_1 u_1(x)+\gamma_2 u_2(x)+ \\ +k^2\int\limits_0^x d\xi\, \mathfrak{L}(x,\xi)p(\xi)[\gamma_3 v_1(\xi)+\gamma_4 v_2(\xi)]= \\ =\left(\gamma_1-k^2\int\limits_0^x d\xi\, u_2(\xi)p(\xi)[\gamma_3 v_1(\xi)+\gamma_4 v_2(\xi)]\right)u_1(x)+ \\ +\left(\gamma_2+k^2\int\limits_0^x d\xi\, u_1(\xi)p(\xi)[\gamma_3 v_1(\xi)+\gamma_4 v_2(\xi)]\right)u_2(x).$$

В силу ограниченности интегралов эта функция — ограниченная на всей вещественной оси. Таким образом, в силу оценки (5) и функция $u(x)$ — ограниченная на всей вещественной оси.

Дифференцируя (4), получим уранение Вольтерра для $u'(x)$ и тем же приемом докажем ограниченность $u'(x)$ на всей вещественной оси. ■

Сравнивая теоремы 1 и 2, видим, что при $p(x)\not\equiv 0$ все принадлежащие L^2 собственные функции $(u(x),v(x))$ задачи (1), соответствующие собственному значению $k^2\in(\alpha,\beta)$, удовлетворяют равенству $u(x)\equiv 0$, которое в силу (1) приводит к тождеству $p(x)v(x)\equiv 0$. Поскольку функция $p(x)$ — аналитическая, это тождество означает, что и $v(x)\equiv 0$. Иными словами, если $p(x)\not\equiv 0$, то у задачи (1) нет вложенного собственного значения. Заметим теперь, что при $p(x)\equiv 0$ задача (1) может иметь вложенное собственное значение вида $(0,v(x))$, если $q(x)-1>0$ и достаточно мало [5]. Значит, малейшее возмущение $p(x)$ приведет к исчезновению этого собственного значения. Таким образом, задача (1) действительно является примером такой задачи, у которой пропадают вложенные собственные значения при малом возмущении коэффициентов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-01-00111) и программы «Университеты России» (грант 015.03.02.001).

Литература

1. *Jones D.S.* // Proc. Camb. Phil. Soc. 1954. **49**. P. 668.
2. *Werner P.* // Z. Angew. Math. Mech. 1987. **67**, No. 4. P. 43.
3. *Evans D.V., Levitin M., Vassiliev D.* // J. Fluid Mech. 1994. **261**. P. 21.
4. *Davies E.B., Parnovski L.* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. **51**. P. 477.
5. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 5. С. 23 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 5. P. 29).
6. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 6. С. 69 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 6. P. 79).
7. *Howland J.S.* // Pacific J. Math. 1974. **55**, No. 1. P. 157.
8. *Agmon S.* // Comm. Pure Appl. Math. 1998. **51**, No. 11–12. P. 1255.
9. *Painlevé P.* // Bull. Soc. Math. France. 1899. **21**. P. 149.
10. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1965.

Поступила в редакцию
05.12.01