ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.19

О ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ ТОЧНО РЕШАЕМОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЩИХ ФЕРМИОНОВ СПИНА 1/2 ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

В. И. Иноземцев*), Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

E-mail: sadovnikov@phys.msu.ru

Показано, что гиперболические системы частиц Сазерленда со спином 1/2, находящиеся во внешнем поле с потенциалом Морса, характеризуемом параметром τ^2, имеют дискретную часть спектра при определенном ограничении, накладываемом на τ, параметр двухчастичного взаимодействия λ и число частиц. Основное состояние описывается волновой функцией в форме Джастрова. Известные результаты для систем с взаимодействием, обратным квадрату расстояния между частицами, воспроизводятся в пределе $\tau \to \infty$.

Нахождение точных волновых функций основного состояния квантовых систем многих взаимодействующих частиц в одном измерении и возбуждений над ним является одной из актуальных задач математической физики. Наиболее исследованными к настоящему времени системами, для которых известен весь дискретный спектр, являются системы Калоджеро–Сазерленда (КС) [1, 2] с дальнодействием, описываемым парным потенциалом $V(x) = \lambda(\lambda+1)x^{-2}$, и находящиеся в поле с потенциалом гармонического осциллятора $W(x) = \omega^2 x^2/2$. Простой вид этого спектра позволяет исследовать термодинамику моделей в пределе бесконечного числа частиц [3, 4]. Менее известны результаты для систем с короткодействущим потенциалом бинарного взаимодействия $[a^{-1}\operatorname{sh}(ax)]^{-2}$, аналогичным оригинальному тригонометрическому потенциалу, предложенному Сазерлендом [3], находящихся во внешнем поле с потенциалом Морса [5]. Гамильтониан этих систем (далее обозначающихся СМ) имеет вид

$$H = \sum_{j}^{N} \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + W(x_j) \right] + \sum_{j<k}^{N} \frac{\lambda(\lambda+1)a^2}{\operatorname{sh}^2 a(x_j - x_k)}, \tag{1}$$

где

$$W(x) = 2\tau^2 a^2 (\exp(2ax) - 1)^2. \tag{2}$$

Динамика систем, описывающихся (1), (2), намного более сложна по сравнению с системами КС в поле с потенциалом гармонического осциллятора. Последние могут быть рассмотрены как предел СМ-моделей, когда параметр потенциала Морса τ неограниченно возрастает как $\omega/4a^2$ при $a \to 0$. В частности, в работе [5] было показано, что в случае статистики Бозе дискретная часть спектра для СМ-систем существует лишь при выполнении условия на параметры τ и λ, $\tau - 1/2 - (\lambda+1)(N-1) > 0$, и содержит конечное число уровней.

В работах Ха и Холдейна [6] и Поликронакоса [7] было предложено обобщение модели КС для частиц с внутренними степенями свободы ($su(n)$-спинами) и обменным спиновым взаимодействием вида $\lambda(\lambda + P_{jk})V(x_j - x_k)$, где оператор P_{jk} переставляет спины частиц с номерами j и k,

$$P_{jk} = \sum_{p,q=1}^{n} e_j^{pq} e_k^{qp}, \tag{3}$$

$\{e_j^{pq}\}$ — элементарные спиновые операторы, подчиняющиеся коммутационным соотношениям

$$[e_j^{pq}, e_k^{rs}] = \delta_{jk}(\delta^{rq} e_j^{ps} - \delta^{ps} e_j^{rq}). \tag{4}$$

Важные физические приложения систем фермионов с $su(2)$-спинами и дальнодействующим КС-взаимодействием были найдены и подробно исследованы в [8]. Для более сложных систем типа СМ спектральная задача рассматривалась только для предельного случая неоднородных спиновых цепочек [9].

В свете результатов работ [6–9] возникает естественный вопрос: можно ли найти в явной форме волновые функции спиновых СМ-систем, описываемых гамильтонианом

$$H_{SM}^{(s)} = \sum_{j}^{N} \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + 2\tau^2 a^2 (\exp(2ax_j) - 1)^2 \right] +$$

*) Лаборатория теоретической физики ОИЯИ, 141980, г. Дубна Московской обл.

$$+\sum_{j<k}^{N}\frac{\lambda(\lambda+P_{jk})a^2}{\operatorname{sh}^2 a(x_j-x_k)}\,? \qquad (5)$$

В предыдущей статье [10] нами было показано, что для таких систем существует множество интегралов движения-операторов, коммутирующих с $H_{SM}^{(s)}$. Цель настоящей работы — построение определенного класса собственных функций оператора (5) для физически интересного случая спинов 1/2 ($n=2$), который наиболее важен в связи с возможностью практического применения результатов к описанию процессов в конфаймированном квазиодномерном электронном газе [8]. Для того чтобы найти энергию основного состояния систем, описываемых гамильтонианом (5), естественно использовать пробную волновую функцию в форме Джастрова, как это было сделано в [6, 8],

$$\Psi(z_1\sigma_1,\ldots,z_N\sigma_N)=C^{-1/2}\times$$
$$\times\prod_{1\leqslant j<k\leqslant N}|z_j-z_k|^{\lambda}(z_j-z_k)^{\delta_{\sigma_j\sigma_k}}\exp\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(\sigma_j-\sigma_k)\times$$
$$\times\prod_{l=1}^{N}z_l^{\rho+\varepsilon\sigma_l}\exp(-\tau z_l). \qquad (6)$$

Здесь $\sigma_j=2s_j^{(3)}$, $s_j^{(3)}=\pm 1/2$— значения проекции спина j-й частицы. Собственные состояния допускают классификацию по значениям проекции полного спина $S_3=1/2(N_+-N_-)$, где $N_\pm$ — числа частиц с $\sigma=\pm 1$, $N_++N_-=N$. Значения параметров ρ и ε должны быть найдены из соответствующего уравнения Шрёдингера.

При действии оператора (5) на Ψ возникает множество членов, которые могут быть записаны в форме

$$\mathcal{H}_{SM}^{(s)}\Psi=[A_1+\tau A_2(z,\sigma)+\lambda A_3(z,\sigma)]\Psi,$$

где

$$A_1=-\frac{1}{2}\left[\lambda N(N-1)\left(\frac{\lambda}{6}(2N-1)+\rho\right)+\right.$$
$$\left.+(N_+^2+N_-^2)\left(\rho+\lambda+\frac{N}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{N}{2}\left(\tau^2-\rho^2-\varepsilon^2+\rho+\lambda+\frac{N^2-1}{6}\right)-$$
$$-\varepsilon(N_+-N_-)\left(\rho+\frac{N-1}{2}\right), \qquad (7)$$

$$A_2(z,\sigma)=\left[\rho-\tau+(N-1)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\right]\sum_{k=1}^{N}z_k+$$
$$+\left(\varepsilon+\frac{N_+-N_-}{2}\right)\sum_{k=1}^{N}\sigma_k z_k, \qquad (8)$$

$$A_3(z,\sigma)=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\neq l}^{N}\frac{\sigma_k z_k-\sigma_l z_l}{z_l-z_k}-\sum_{k\neq l\neq m}^{N}\frac{z_k^2\delta_{\sigma_k\sigma_l}}{(z_k-z_l)(z_k-z_m)}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k\neq l}\frac{z_k z_l}{(z_k-z_l)^2}(1-\delta_{\sigma_k\sigma_l})\times$$
$$\times\left[1-\left(\frac{z_l}{z_k}\right)^{\varepsilon(\sigma_k-\sigma_l)}\prod_{j\neq k,l}^{N}\left(\frac{z_j-z_l}{z_j-z_k}\right)^{\delta_{\sigma_j\sigma_k}-\delta_{\sigma_j\sigma_l}}\right]. \qquad (9)$$

Последнее слагаемое в правой части (9) соответствует вкладу спиново-обменной части гамильтониана (5).

Можно показать, что слагаемые, линейные по $\{z\}$, которые присутствуют в $A_2(z,\sigma)$, исчезают, если параметры ρ и ε удовлетворяют условиям

$$\rho=\tau-(\lambda+1/2)(N-1), \qquad (10)$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}(N_--N_+). \qquad (11)$$

Явная зависимость от спиновых переменных в формуле (9) для $A_3(z,\sigma)$ может быть устранена, если рассматривать отдельно координаты частиц с $\sigma=\pm 1$ и обозначить $\{z_j\}_{\sigma=1}=\{p_\nu\}$, $\nu=1,\ldots,N_+$, $\{z_j\}_{\sigma=-1}=\{q_\mu\}$, $\mu=1,\ldots,N_-$,

$$A_3(z,\sigma)=\frac{N-1}{4}(N_+-N_-)^2-$$
$$-\frac{1}{3}[N_+(N_+-1)(N_+-2)+N_-(N_--1)(N_--2)]+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{N_+}\sum_{\mu=1}^{N_-}\left\{\frac{(N_+-N_-)(p_\nu+q_\mu)}{2(p_\nu-q_\mu)}-\right.$$
$$\left.-\sum_{l\neq\nu}^{N_+}\frac{p_\nu^2}{(p_\nu-p_l)(p_\nu-q_\mu)}-\sum_{m\neq\mu}^{N_-}\frac{q_\mu^2}{(q_\mu-q_m)(q_\mu-p_\nu)}\right\}+$$
$$+\sum_{\nu=1}^{N_+}\sum_{\mu=1}^{N_-}\frac{p_\nu q_\mu}{(p_\nu-q_\mu)^2}\times$$
$$\times\left[1-\left(\frac{p_\nu}{q_\mu}\right)^{N_+-N_-}\prod_{l\neq\nu}^{N_+}\frac{p_l-q_\mu}{p_l-p_\nu}\prod_{m\neq\mu}^{N_-}\frac{q_m-p_\nu}{q_m-q_\mu}\right]. \qquad (12)$$

Это выражение выглядит чрезвычайно громоздким. Однако оно может быть значительно упрощено с помощью следующего приема. Рассмотрим интеграл

$$I_{N_+,N_-}=\int\limits_{\mathcal{C}}\int\limits_{\mathcal{C}'}\frac{dz\,dz'}{(z-z')^4}z^{N_+-N_-+1}z'^{N_--N_++1}\times$$
$$\times\prod_{\nu=1}^{N_+}\frac{z'-p_\nu}{z-p_\nu}\prod_{\mu=1}^{N_-}\frac{z-q_\mu}{z'-q_\mu}. \qquad (13)$$

Выберем контуры $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, окружающие $\{p_\nu\}$, $\{q_\mu\}$ следующим образом: пусть $\mathcal{C}'$ лежит внутри $\mathcal{C}$ при $N_+-N_-\geqslant 0$, $\mathcal{C}$ лежит внутри $\mathcal{C}'$ при $N_--N_+\geqslant 0$

и внешний контур не обходит 0 в обоих случаях. Как легко видеть, при расширении внешнего контура до бесконечности

$$I_{N_+,N_-}=0. \tag{14}$$

С другой стороны, оценка I_{N_+,N_-} может быть произведена посредством последовательного вычисления вычетов при полюсах подынтегрального выражения (13). Эта процедура позволяет вычислить двойные и тройные суммы в (12). Можно показать посредством простых вычислений, что (14) эквивалентно соотношению

$$\sum_{\nu=1}^{N_+}\sum_{\mu=1}^{N_-}\frac{p_\nu q_\mu}{(p_\nu-q_\mu)^2}\times \left[1-\left(\frac{p_\nu}{q_\mu}\right)^{N_+-N_-}\prod_{l\neq\nu}^{N_+}\frac{p_l-q_\mu}{p_l-p_\nu}\prod_{m\neq\mu}^{N_-}\frac{q_m-p_\nu}{q_m-q_\mu}\right]= =\sum_{\nu=1}^{N_+}\sum_{\mu=1}^{N_-}(p_\nu-q_\mu)^{-1}\times \left[\frac{(N_--N_+)(p_\nu+q_\mu)}{2}+\sum_{l\neq\nu}^{N_+}\frac{p_\nu^2}{p_\nu-p_l}-\sum_{m\neq\mu}^{N_-}\frac{q_\mu^2}{q_\mu-q_m}\right]- -\Phi(N)+\Phi(\Delta), \tag{15}$$

где

$$\Phi(x)=\frac{x}{24}(2x^2-3x-2),\quad \Delta=|N_+-N_-|.$$

Сравнивая (15) с правой частью (12), легко показать, что $A_3(z,\sigma)$ не зависит от $\{z\}$ и спиновые переменные входят в это выражение только в виде проекции полного спина. Таким образом, волновые функции в форме Джастрова (6) действительно являются собственными функциями гамильтониана (5) при условии, что ρ и ε определяются формулами (10), (11). Соответствующие собственные значения могут быть получены из (7), (15):

$$E_\Delta=a^2\Big\{-\frac{N}{6}[2\lambda^2(N-1)(2N-1)+ +\lambda(4N^2-3N-4)+N^2-1]+\tau N[2\lambda(N-1)+N]+ +\frac{\lambda}{3}\Delta(\Delta^2-1)+\Delta^2\left[\tau-N\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\frac{\lambda}{2}\right]\Big\}. \tag{16}$$

Минимум выражения (16) достигается при $\Delta=0$ для четных N и $\Delta=1$ для нечетных N. В обоих случаях проекция полного спина имеет минимальное из возможных значений, т. е. упорядочение спинов осуществляется по антиферромагнитному типу. Функции (6) не имеют нулей, кроме тех, что локализованы на гиперплоскостях $z_j-z_k=0$. Таким образом, можно использовать обычную аргументацию [4] для подтверждения гипотезы об основном состоянии: оно существует, если параметр потенциала Морса удовлетворяет неравенству $\tau-(\lambda+1/2)(N-1)-\Delta/2>0$ и описывается формулами (6), (16) при минимальном из возможных значений Δ. В пределе $a\to 0$ в (16) при переопределении $\tau=\omega/4a^2$ можно получить известные формулы для спектра систем $s=1/2$ фермионов с дальнодействием, находящихся в поле с потенциалом гармонического осциллятора [8]. Нормировочный множитель для волновой функции основного состояния для четных $N=2M$ определяется по формуле

$$C_M(\lambda,\tau)=\frac{(2M)!}{(M!)^2}(2a)^{-2M}\tau^{-2M(2\tau-\lambda(2M-1)+M)}I_M(\lambda,\rho),$$

где

$$I_M(\lambda,\rho)=\left(\prod_{l=1}^{2M}\int_0^\infty dz_l z_l^{2\rho-1}\exp(-z_l)\right)\prod_{j<k}^{2M}|z_j-z_k|^{2\lambda}\times \times\prod_{j'<k'}^{M}(z_{j'}-z_{k'})^2(z_{j'+M}-z_{k'+M})^2. \tag{17}$$

Последний множитель в подынтегральном выражении в (17) возникает благодаря спиновым степеням свободы и нарушает его симметрию относительно перестановок всего набора пространственных переменных $2M$. Как следствие явное вычисление $I_M(\lambda,\rho)$ представляет значительно более сложную задачу, чем оценка той же величины для систем бесспиновых бозонов [5]. Нам не удалось найти аналитическое выражение для $I_M(\lambda,\rho)$ при произвольных M. Исключение составляет случай $M=2$, для которого удается найти связь нормировочного интеграла с корреляционными интегралами Сельберга [11, 12]. В этом случае громоздкие, но по сути простые вычисления приводят к формуле

$$I_2(\lambda,\rho)=\frac{2(1+3\lambda)(1+4\lambda)}{\rho(2\rho+\lambda)}\times \times\prod_{j=1}^{4}\frac{\Gamma(1+j\lambda)}{\Gamma(1+\lambda)}\Gamma(2\rho+1+\lambda(j-1)).$$

Итак, нами продемонстрировано, что для СМ-систем фермионов со спином $s=1/2$ можно найти энергию основного состояния и часть дискретного спектра, характеризуемую «спиновыми» возбуждениями, при использовании волновых функций типа Джастрова. Разумеется, должны существовать также возбужденные состояния «пространственного» типа, подобные найденным в [8] для КС-систем бесспиновых бозонов. Пока неясно, как следует модифицировать анзац (6) для построения соответствующих волновых функций. Элегантный способ введения «пространственных» возбуждений для КС-систем [13], состоящий в умножении волновой функции основного состояния на симметричные комбинации полиномов Эрмита, по-видимому, не подходит для СМ-моделей из-за более сложных рекуррентных соотношений между полиномами Лагерра, которые описывают элементарные возбуждения для осциллятора Морса при отсутствии взаимодействия между частицами. Использование более общего подхода, предложенного Като и Курамото [14] для изучения тригонометрических систем Сазерленда с внутренними степенями свободы, может оказаться более перспективным. Описание состояний непрерывного спектра, однако, не может быть проведено в рамках известных схем и по-прежнему остается нерешенной проблемой.

Литература

1. *Calogero F.* // J. Math. Phys. 1969. **10**. P. 2191; 1971. **12**. P. 419.
2. *Sutherland B.* // J. Math. Phys. 1971. **12**. P. 247.
3. *Sutherland B.* // Phys. Rev. 1972. **A5**. P. 1372.
4. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Phys. Rep. 1983. **94**. P. 313.
5. *Inozemtsev V.I.* // Physica Scripta 1984. **29**. P. 518.
6. *Ha Z.N.C., Haldane F.D.M.* // Phys. Rev. 1992. **B46**. P. 9359.
7. *Polychronakos A.P.* // Phys. Rev. Lett. 1992. **69**. P. 703.
8. *Vacek K., Okiji A., Kawakami N.* // Phys. Rev. 1994. **B49**. P. 4635.
9. *Frahm H., Inozemtsev V.I.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. **27**. P. 801.
10. *Иноземцев В.И., Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2008. № 2. С. 3.
11. *Selberg A.* // Norsk. Mat. Tidsskr. 1944. **26**. P. 71.
12. *Kaneko J.* // SIAM J. Math. Anal. 1993. **24**. P. 1086.
13. *Vacek K., Okiji A., Kawakami N.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. **27**. P. 201.
14. *Kato Y., Kuramoto Y.* // Phys. Rev. Lett. 1995. **74**. P. 1222.

Поступила в редакцию
18.04.2007