где K_{22} и T_{12} — элементы матриц

$$K = I\cos(\alpha_1\tau_1)\cos(\alpha_2\tau_2/2) + M_1M_2\sin(\alpha_1\tau_1)\sin(\alpha_2\tau_2/2),$$

$$T = M_1\sin(\alpha_1\tau_1)\cos(\alpha_2\tau_2/2) + M_2\cos(\alpha_1\tau_1)\sin(\alpha_2\tau_2/2).$$

Следовательно,

$$z_0 = -\frac{P}{m\hbar}\frac{\operatorname{Im}K_{22}}{D}, \quad \dot{z}_0 = \frac{P}{m\hbar}\frac{\operatorname{Im}T_{12}}{D},$$

где $D = \operatorname{Re}T_{12}\operatorname{Im}K_{22} - \operatorname{Re}K_{22}\operatorname{Im}T_{12}$. Отсюда

$$z(t) = \begin{cases} z_0\cos\alpha_1 t + \dfrac{\dot{z}_0}{\alpha_1}\sin\alpha_1 t, \quad t\in[0;\ \tau_1], \\ z_1\cos\omega_0(t-\tau_1) + \dfrac{\dot{z}_1}{\omega_0}\sin\omega_0(t-\tau_1), \\ \qquad\qquad t\in[\tau_1;\ \tau_1+\tau_2/2], \end{cases}$$

где $z_1 = z_0\cos\alpha_1\tau_1 + \frac{\dot{z}_0}{\alpha_1}\sin\alpha_1\tau_1$, $\dot{z}_1 = -z_0\alpha_1\sin\alpha_1\tau_1 + +\dot{z}_0\cos\alpha_1\tau_1$. Таким образом, фильтрующая функция имеет вид

$$v(t) = \begin{cases} z_0\cos\alpha_{\mathrm{Re}}t\,\operatorname{ch}\alpha_{\mathrm{Im}}t + \\ +\dfrac{\dot{z}_0}{|\alpha_1|^2}(\alpha_{\mathrm{Re}}\cos\alpha_{\mathrm{Re}}t\,\operatorname{sh}\alpha_{\mathrm{Im}}t - \alpha_1\sin\alpha_{\mathrm{Im}}t\,\operatorname{ch}\alpha_{\mathrm{Im}}t); \\ \qquad\qquad t\in[0;\ \tau_1], \\ \operatorname{Im}z_1\cos\omega_0(t-\tau_1) + \dfrac{\operatorname{Im}\dot{z}_1}{\omega_0}\sin\omega_0(t-\tau_1); \\ \qquad\qquad t\in(\tau_1;\ \tau_1+\tau_2/2). \end{cases}$$

Вид функций $z(t)$ и $v(t)$ на промежутке $[\tau_1+\tau_2;\ 2\tau_1+\tau_2]$ определяется из их четности относительно точки $t = \tau_1 + +\tau_2/2$.

Отношение сигнал/шум с учетом того, что сила действовала кратковременно в точке $t = \tau_1 + \tau_2/2$, равно

$$\frac{s}{n} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)v(t)\,dt = Pv\Big(\tau_1 + \frac{\tau_2}{2}\Big) = = \frac{P^2}{m\hbar}\frac{1}{D}(\operatorname{Im}T_{12}\operatorname{Im}T_{21} - \operatorname{Im}K_{11}\operatorname{Im}K_{22}).$$

Подставив выражения для $\operatorname{Im}K_{ij}$ и $\operatorname{Im}T_{ij}$, после упрощения получим формулу (7).

Литература

1. *Брагинский В.Б., Воронцов Ю.И.* // УФН. 1974. **114**. С. 41.
2. *Брагинский В.Б., Воронцов Ю.И., Халили Ф.Я.* // Письма в ЖЭТФ. 1978. **27**. С. 296.
3. *Braginsky V.B., Khalili F.Ya.* // Phys. Lett. 1999. **A257**. P. 241.
4. *Брагинский В.Б., Манукин А.Б.* Измерение малых сил в физических экспериментах. М.: Наука, 1974.
5. *Braginsky V.B., Khalili F.Ya.* Quantum Measurement. Cambridge University Press, 1992.
6. *Левин Б.Р.* Статистическая радиотехника. М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию
27.10.99

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА GCV ДЛЯ КОРРЕКТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

В. Н. Титаренко, А. Г. Ягола

(*кафедра математики*)

На примере систем линейных алгебраических уравнений показано, что алгоритм решения некорректных задач, основанный на методе GCV, в общем случае не является регуляризирующим.

Многие практические задачи можно записать в форме операторного уравнения

$$Az = u, \quad z\in Z, \quad u\in U, \tag{1}$$

где пространства Z, U являются нормированными.

Задача (1) называется корректной (по Адамару) на классе «допустимых» данных $\Sigma = \{(A,u)\}$, если:

1) задача имеет решение для любых данных $(A,u)\in\Sigma$,

2) решение задачи единственно для любых данных $(A,u)\in\Sigma$,

3) решение задачи устойчиво относительно возмущения исходных данных задачи.

Последнее означает, что для любых данных $(A_h,u_\delta)\in\Sigma$ таких, что

$$\|A_hz - Az\|_U \leqslant h\|z\|_Z, \quad \|u_\delta - u\|_U \leqslant \delta,$$

решение $z(A_h,u_\delta)\xrightarrow{Z} z(A,u)$ при $h,\delta\to 0$. Если хотя бы одно из условий корректности не выполняется, то задача (1) называется некорректной. При нарушении условий существования и единственности за обобщенное решение задачи (1) обычно принимается нормальное псевдорешение, т.е. решение в смысле метода наименьших квадратов с минимальной нормой, если оно существует. В дальнейшем в качестве обобщенного решения задачи (1) будем рассматривать нормальное псевдорешение.

А. Н. Тихонов в работах [1, 2] определил, что подразумевается под решением некорректной задачи (1), и привел регуляризирующий алгоритм, основанный на минимизации сглаживающего функционала

$$M^\alpha[z] = \|A_hz - u_\delta\|^2 + \alpha\|z\|^2, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Для случая, когда пространства Z и U гильбертовы, можно записать элемент z^α, минимизирующий сглаживающий функционал (2), в виде

$$z^\alpha = (\alpha I + A_h^* A_h)^{-1} A_h^* u_\delta, \qquad (3)$$

где I — единичный оператор в пространстве Z, а A_h^* — оператор, сопряженный A_h.

В работах [3–7] показано, что нельзя решить некорректную задачу, не используя информации о погрешностях h (оператора) и δ (правой части) операторного уравнения (1). Регуляризирующий алгоритм, не использующий погрешностей h и δ, существует только для корректных задач. Поэтому все попытки таким образом обобщить алгоритм решения операторного уравнения (1) для корректных задач на некорректные задачи не могут получить теоретического обоснования, так как эти попытки изначально являются неправильными.

Тем не менее и до сих пор существуют попытки построения таких алгоритмов. Так, сейчас очень распространен метод GCV (generalized cross validation), предложенный в работе [8] и развитый в [9–16]. Этот метод имеет несколько (вообще говоря, не эквивалентных) вариантов. Рассмотрим наиболее популярный вариант: параметр α находится как точка глобального минимума функции

$$G(\alpha) = \frac{\|(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1} u_\delta\|}{\operatorname{tr}[(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1}]}$$

при $\alpha \geqslant 0$, где E — единичный оператор в пространстве U.

Ясно, что как метод, не использующий информацию о погрешностях h и δ, метод GCV не может применяться для решения некорректных задач. Рассмотрим применение метода GCV для некорректных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

П р и м е р 1. Пусть Z и U — двумерные евклидовы пространства с обычной евклидовой нормой. Оператору A сопоставим матрицу A. Матрица A и вектор u имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что нормальное псевдорешение (решение) представляет собой вектор $\overline{z} = (1,1)^T$. Рассмотрим возмущенную матрицу A_h:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1+h & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad u_\delta = u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

В этом случае нормальное псевдорешение для возмущенной матрицы имеет вид $z_h = (0,2)^T$. Ясно, что $z_h \not\to \overline{z}$ при $h \to 0$, т. е. задача является неустойчивой к погрешностям входных данных и, следовательно, некорректной.

Пусть

$$D = \alpha^2 + 10\alpha + 2h\alpha + h^2\alpha + 4h^2, \qquad (4)$$

тогда

$$(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \alpha+8 & -4-2h \\ -4-2h & \alpha+2+2h+h^2 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

$$\operatorname{tr}[(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1}] = \frac{1}{D}(2\alpha + 10 + 2h + h^2), \qquad (6)$$

$$(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1} u_\delta = \frac{2}{D} \begin{pmatrix} \alpha - 4h \\ 2(\alpha + h + h^2) \end{pmatrix}.$$

Запишем функцию $G(\alpha)$ для метода GCV:

$$G(\alpha) = \frac{2\sqrt{(\alpha-4h)^2 + 4(\alpha+h+h^2)^2}}{2\alpha + 10 + 2h + h^2},$$

$$\alpha_{\min} = \frac{8h^3 + 4h^4}{50 + 10h - 3h^2},$$

$$z^\alpha(h) = \frac{50 + 10h - 3h^2}{h^4 + 4h^3 + 8h^2 + 40h + 100} \times \begin{pmatrix} 2h\left(1 - \dfrac{3}{5+h}\right) \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{h\to 0} z^\alpha(h) = (0,2)^T \neq (1,1)^T.$$

Видно, что решение, найденное по методу GCV, при $h \to 0$ стремится не к нормальному псевдорешению системы (1), а к одному из обычных решений системы (1).

Можно рассмотреть еще один характерный пример применения метода GCV для некорректных СЛАУ.

П р и м е р 2. Рассмотрим матрицу A_h и вектор u_δ:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1+h & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad u_\delta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя (4)–(6), получим

$$(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1} u_\delta = \frac{2}{D} \begin{pmatrix} \alpha + 8 \\ -4 - 2h \end{pmatrix},$$

$$G(\alpha) = \frac{2\sqrt{(\alpha+8)^2 + 4(2+h)^2}}{2\alpha + 10 + 2h + h^2}, \quad \alpha_{\max} = \frac{16(5+h)}{h^2 + 2h - 6}.$$

Поскольку метод рассматривается при $h \to 0$, то будем считать, что $h < \sqrt{7} - 1$, тогда $\alpha_{\max} < 0$. Следовательно, при $\alpha \geqslant 0$ функция $G(\alpha)$ монотонно убывающая. Поэтому $\inf\limits_{\alpha \geqslant 0} G(\alpha) = G(+\infty) = 1$. Тогда по формуле (3): $z^{+\infty} = (0,0)^T \neq (1,1)^T$. Из этого следует, что полученное по методу GCV «решение» не сходится не только к нормальному псевдорешению, но и даже к обычному решению системы (1). Приведенные два примера показывают несостоятельность метода GCV при применении его к некорректным СЛАУ, что и следовало ожидать.

Покажем теперь, что метод GCV, вообще говоря, неприменим и для решения корректных СЛАУ.

П р и м е р 3. Рассмотрим матрицу A и вектор u:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (1) (оно же является нормальным псевдорешением) имеет вид $\overline{z} = (-3, 1)^T$. Рассмотрим теперь возмущенные матрицу A_h и вектор u_δ:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1+h & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad u_\delta = u = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$D = \alpha^2 + 7\alpha + 1 + 2h\alpha + 4h + h^2\alpha + 4h^2,$$

тогда

$$(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \alpha + 5 & -3-h \\ -3-h & \alpha + 2 + 2h + h^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{tr}[(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1}] = \frac{1}{D}(2\alpha + 7 + 2h + h^2),$$

$$(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1} u_\delta = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} -2\alpha - 7 + h \\ 4 - \alpha - h^2 \end{pmatrix},$$

$$G(\alpha) = \frac{\sqrt{(2\alpha + 7 - h)^2 + (\alpha - 4 + h^2)^2}}{2\alpha + 7 + 2h + h^2},$$

$$\alpha_{\min} = \frac{h^3 - 3h^2 - 18h + 20}{3h + 5}.$$

Так как метод рассматривается при $h \to 0$, то будем считать, что $h < 1$, тогда $\alpha_{\min} > 0$. Тогда по формуле (3)

$$z^{\alpha(h)} = \frac{3h + 5}{2h^4 - 3h^3 - 7h^2 + 35h - 75} \begin{pmatrix} 5 + 2h - h^2 \\ 5 - 5h \end{pmatrix},$$

$$\lim_{h \to 0} z^{\alpha(h)} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T \neq \overline{z}.$$

Таким образом, «решение», найденное по методу GCV, не стремится к решению системы (1). Рассмотрим еще некоторые характерные примеры.

П р и м е р 4. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (1) (оно же является нормальным псевдорешением) имеет вид $\overline{z} = (1, 1)^T$. Рассмотрим теперь возмущенные матрицу A_h и вектор u_δ:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1-h & 1 \\ 1 & -1+h \end{pmatrix}, \qquad u_\delta = u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для этого примера

$$D = \alpha + 2 - 2h + h^2, \quad (\alpha E + A_h A_h^*)^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{tr}[(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1}] = \frac{2}{D},$$

$$(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1} u_\delta = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G(\alpha) = 1.$$

Таким образом, в качестве параметра регуляризации для метода GCV может быть взято любое неотрицательное число. Пусть $\alpha = h$, тогда по формуле (3)

$$z^{\alpha = h} = \frac{2}{h^2 - h + 2} \begin{pmatrix} 1-h \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lim_{h \to 0} z^{\alpha = h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{z}.$$

Если же $\alpha = 1/h$, то

$$z^{\alpha = 1/h} = \frac{2h}{h^3 - 2h^2 + 2h + 1} \begin{pmatrix} 1-h \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{h \to 0} z^{\alpha = 1/h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \overline{z}.$$

Из этого результата следует, что «приближенное решение» уравнения (1) не является единственным для одной и той же возмущенной матрицы.

В следующем примере использование решения уравнения (1) по методу GCV дает правильное решение для возмущенной матрицы определенного вида.

П р и м е р 5. Запишем невозмущенную:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и возмущенную систему:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1+h & 1 \\ 1 & -1+h \end{pmatrix}, \qquad u_\delta = u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$D = \alpha^2 + 4\alpha + 2h^2\alpha + 4 + h^4 - 4h^2,$$

тогда

$$\mathrm{tr}[(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1}] = \frac{2}{D}(\alpha + 2 + h^2),$$

$$(\alpha E + A_h A_h^*)^{-1} u_\delta = \frac{2}{D} \begin{pmatrix} \alpha + 2 - 2h + h^2 \\ -2h \end{pmatrix},$$

$$G(\alpha) = \frac{\sqrt{(\alpha + 2 - 2h + h^2)^2 + 4h^2}}{\alpha + 2 + h^2},$$

$$\alpha_{\min} = 4h - h^2 - 2 < 0.$$

Поэтому $\alpha = 0$ и $z^\alpha = A_h^{-1} u_\delta$, тогда

$$\lim_{h \to 0} z^\alpha = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{2}{2 - h^2} \begin{pmatrix} 1-h \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{z}.$$

Из приведенных рассуждений и примеров видно, что метод GCV нельзя использовать для решения некорректно поставленных задач. В случае же корректных СЛАУ необходимо исследовать область применимости метода GCV. Пример 5 показывает, что существуют такие возмущенные системы линейных уравнений, для которых метод GCV дает нормальное псевдорешение системы (1). Но последний пример имеет характерную особенность: параметр регуляризации $\alpha = 0$ независимо от погрешности h. А такие ситуации, когда параметр $\alpha = 0$, часто возникают и при выборе параметра регуляризации другими методами. Поэтому данный пример не характерен для обоснования правильности выбора параметра регуляризации по методу GCV. В любом случае пример 4 показывает несостоятельность метода GCV для корректных задач, так как при одной и той же возмущенной матрице можно, согласно данному методу, различными способами выбрать параметр регуляризации так, что полученные «приближенные решения» находятся на конечном расстоянии друг от друга. Пример 3 показывает, что найденное по методу GCV «решение» таковым не является.

Работа выполнена при поддержке программы «Университеты России — Фундаментальные исследования» (грант 4-5220) и РФФИ (грант 99-01-00447).

Литература

1. *Тихонов А.Н.* // ДАН СССР. 1963. **153**, № 1. С. 49.
2. *Тихонов А.Н.* // ДАН СССР. 1963. **151**, № 3. С. 501.
3. *Леонов А.С., Ягола А.Г.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. № 4. С. 28 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 4. P. 25).
4. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
5. *Тихонов А.Н., Гончарский А.Н., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
6. *Тихонов А.Н.* // ДАН СССР. 1985. **280**, № 3. С. 559.
7. *Бакушинский А.Б.* // ЖВМ и МФ. 1984. **24**, № 8. С. 1258.
8. *Wahba G.* // SIAM J. Numer. Anal. 1977. **14**, No. 4. P. 651.
9. *O'Sullivan F., Wahba G.* // J. Comput. Phys. 1985. **59**, No. 3. P. 441.
10. *Wahba G.* // Remote Sensing Retrieval Methods / Eds. H. Fleming, M. Chahine. Hampton, VA, 1985. P. 385.
11. *Bates D. M., Wahba G.* // Treatment of Integral Equations by Numerical Methods / Eds. C.T.H. Baker, G.F. Miller. L.: Acad. Press, 1982. P. 283.
12. *Wahba G.* Spline Models for Observation Data (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics; 59). Philadelphia, Pensilvania: Soc. for Industr. and Appl. Mathem., 1990.
13. *Gu C., Heckman N., Wahba G.* // Statistics and Probability Letters. 1992. **14**. P. 283.
14. *Lukas M.A.* // Report No. 43, Centre for Mathematical Analysis, Australian National University. Canberra, 1990.
15. *Nychka D., Wahba G., Goldfarb S., Pugh T.* // J. Amer. Statist. Assoc. 1984. **79**, No. 38. P. 832.
16. *Wahba G.* // Remote Sensing Retrieval Methods / Eds. A. Deepak, H. Fleming, J. Theon. Hampton, VA, 1989. P. 347.

Поступила в редакцию
03.11.99

УДК 530.145

СТРУКТУРА ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ФОТОНА ВО ВНЕШНЕМ НЕОДНОРОДНОМ НЕАБЕЛЕВОМ ПОЛЕ

В. Ч. Жуковский, В. В. Худяков

(*кафедра теоретической физики*)

Рассматривается поляризационный оператор (ПО) фотона во внешнем постоянном хромомагнитном поле. Для случая слабого однородного хромомагнитного поля получены однопетлевые вклады в антисимметричную часть ПО за счет скалярных и спинорных кварков, а также индуцированная топологическая масса фотона. Рассмотрен ПО в случае неоднородного внешнего поля на примере поля инстантона.

Введение

Структура физического вакуума квантовой хромодинамики (КХД) во многом определяется наличием кваркового и глюонного конденсатов, $\langle \bar{q}q \rangle$ и $\langle (\alpha_s/\pi) G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu} \rangle$ соответственно [1]. Неабелевы калибровочные поля, описывающие глюоны, обладают нетривиальными топологическими свойствами. Конденсат может быть выбран в виде таких классических решений уравнений калибровочного поля, как монополи и инстантоны [2]. На фоне подобных полей поведение взаимодействующих кварков и глюонов является существенно непертурбативным [3]. В (2+1)-мерном аналоге КХД учет радиационных поправок индуцирует топологический член Черна–Саймонса, что сопровождается появлением массы калибровочного поля, не нарушающей калибровочную инвариантность теории (этот процесс альтернативен по отношению к механизму спонтанного нарушения симметрии [4]). Индуцированная топологическая масса играет важную роль в регуляризации инфракрасных расходимостей многопетлевых диаграмм [5]. Появление антисимметричной части ПО означает