УДК 539.12.01

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ДВИЖЕНИЯ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ САЗЕРЛЕНДА–КАЛОДЖЕРО ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Д. В. Мещеряков, В. Б. Тверской

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Рассмотрена трехчастичная система Сазерленда–Калоджеро во внешнем поле. Предложен рецепт упорядочения некоммутирующих переменных в интегралах движения. Интегралы движения найдены в явном виде.

Введение

Со времени открытия первой вполне интегрируемой квантовой модели многих частиц, расположенных на прямой, исследование подобных задач вызывает неослабевающий интерес [1–7]. Термин «вполне интегрируемая система» понимается здесь и в дальнейшем в смысле Лиувилля, т. е. вполне интегрируемая система обладает глобальными интегралами движения, находящимися в инволюции, в количестве, равном числу степеней свободы системы. В классическом случае инволютивность означает равенство нулю скобок Пуассона, а в квантовом — коммутативность интегралов движения.

Среди нерешенных проблем остается доказательство того факта, что квантовые обобщения вполне интегрируемых классических систем также являются вполне интегрируемыми. Для некоторых систем с достаточно простой структурой матриц Лакса такое доказательство было найдено Калоджеро [3]. Ольшанецкий и Переломов доказали, что весьма общий класс квантовых систем, связанных с полупростыми алгебрами Ли, является вполне интегрируемым [4]. Однако для более общих систем N частиц на прямой во внешнем поле разработанные методы неприменимы. К таким системам относится модель Сазерленда–Калоджеро во внешнем поле. Ее гамильтониан имеет вид

$$H=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2}+W(x_i)\right)+\sum_{i>j}^{N}V(x_i-x_j) \qquad (1)$$

и описывает N взаимодействующих посредством парного потенциала

$$V(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)a^2}{\operatorname{sh}^2(ax)} \qquad (2)$$

частиц единичной массы, находящихся во внешнем поле

$$W(x)=\frac{1}{4}b^2\operatorname{ch}(4ax)-ab[1+\alpha(N-1)]\operatorname{ch}(2ax), \qquad (3)$$

где a, b, α — произвольные константы, определяющие потенциалы. Классическая система (1)–(3) вполне интегрируема. Этот факт был доказан Иноземцевым [5]. Матрица Лакса, приводящая к потенциалам (2), (3), имеет следующие матричные элементы:

$$L_{11}=l,\quad L_{12}=m,\quad L_{21}=n,\quad L_{22}=-l, \qquad (4)$$

где l, n, m — матрицы размером $N\times N$:

$$l_{jn}=p_j\delta_{jn}+i(1-\delta_{jn})R_{jn},$$
$$m_{jn}=\delta_{jn}m(x_n),\quad n_{jn}=\delta_{jn}m(x_n+\delta),$$
$$R_{jn}=R(x_j-x_n),\quad j,n=1,\ldots,N.$$

Здесь δ — произвольная константа, а функции $R_{jn}, m(x_j), n(x_j)$ определяют потенциалы (2), (3):

$$V(x_j-x_n)=R_{jn}^2+\text{const},\quad W(x_j)=\frac{1}{2}m(x_j)n(x_j).$$

Для того чтобы система (1) с потенциалами V, W была вполне интегрируемой, функции m, n, R должны удовлетворять следующим функциональным уравнениям (штрих обозначает производную по аргументу) [6]:

$$\begin{aligned}[m'(x_j)-m'(x_k)]R_{jk}&=-2R'_{jk}[m(x_j)-m(x_k)],\\ [n'(x_j)-n'(x_k)]R_{jk}&=-2R'_{jk}[n(x_j)-n(x_k)].\end{aligned} \qquad (5)$$

В работе [7] было доказано, что квантовая система двух частиц ($N=2$) является вполне интегрируемой. Здесь мы покажем, что система трех частиц также вполне интегрируема, и приведем явный вид интегралов движения.

Интегралы движения в классическом случае определяются как симметризованные функции собственных значений матрицы Лакса L и могут быть найдены по формуле

$$I_n=\frac{1}{2n}\operatorname{tr}L^{2n},\quad n=1,..,N. \qquad (6)$$

Это выражение наиболее удобно для нахождения интегралов движения и в квантовом случае. Из (4) видно, что интегралы I_n содержат произведения некоммутирующих сомножителей, и поэтому для определения квантовых интегралов движения в (6) необходимо выбрать рецепт упорядочения. Найденный в [7] рецепт упорядочения для случая $N=2$ может быть обобщен следующим образом: в качестве интеграла движения следует брать эрмитову часть I_n, т. е.

$$I_n\to\frac{I_n+I_n^+}{2}.$$

Для $N=3$ матрица L имеет размер 6×6, поэтому вычисления проводились на компьютере с использованием системы аналитических вычислений REDUCE. Для вычислений с некоммутирующими переменными использовался пакет NCMP, разработанный для операций с некоммутирующими переменными в системе REDUCE [8]. Для ускорения вычислений каждый коммутатор был разбит на несколько более простых и быстрых для вычисления коммутаторов. Сумма всех членов, содержащих в качестве множителей функции $m(x_j), n(x_j)$, оказалась равной нулю вследствие функциональных соотношений (5). Оставшаяся часть коммутаторов представляет собой полином по импульсам частиц и равна нулю в силу соотношений

$$[p_i+p_j, R_{ij}]=0, \quad i\neq j=1,2,3,$$

т.е. вследствие антисимметрии функции R_{ij} относительно перестановок координат частиц. В результате получаем

$$[I_i, I_j]=0, \quad i<j=1,2,3,$$

т.е. квантовая система (1)–(3) в случае $N=3$ является вполне интегрируемой. Интеграл движения I_1 совпадает с гамильтонианом (1), а остальные два интеграла движения в частном случае $m(x)=n(x)=\gamma\mathrm{ch}(2ax)+\mu$, где γ и μ — произвольные константы, имеют вид

$$I_2=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{p_i^4}{2}+\sum_{k\neq i}^{3}\Big[\{p_i^2, R_{ki}^2\}+2m(x_i)^2R_{ik}^2+ \right.$$
$$+\{p_ip_k, R_{ki}^2\}+R_{ik}^2R_{ki}^2+2m(x_i)^2p_k^2+$$
$$\left.+2m(x_i)m(x_k)R_{ik}^2+2R_{ik}^4\Big]+\frac{m(x_i)^4}{2}\right),$$

$$I_3=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{p_i^6}{2}+\sum_{k\neq i}^{3}\Big[\{p_i^4, R_{ki}^2\}+\{p_i^2, R_{ki}^4\}+2\{p_i^3p_k, R_{ki}^2\}+\right.$$
$$+2\{p_ip_k, R_{ki}^4\}+4m(x_i)^3m(x_k)R_{ik}^2+\tfrac{1}{3}R_{ik}^6\Big]+$$
$$+\sum_{k,l\neq i}\Big[\{p_i^2, R_{ik}^2R_{il}^2\}+\{p_ip_k, R_{ik}^2R_{il}^2\}+R_{ik}^2R_{il}^2\sum_{m\neq i}R_{im}^2+$$
$$+2m(x_i)^2R_{kl}^4+2m(x_i)^4R_{kl}^2+2m(x_k)m(x_l)R_{ki}^2R_{il}^2+$$
$$+2m(x_k)m(x_l)p_i^2R_{kl}^2+2m(x_i)^2p_l^2p_k^2+$$
$$\left.+2m(x_k)^2m(x_l)^2p_i^2\Big]+\frac{1}{3}m(x_i)^6\right),$$

где фигурными скобками обозначен антикоммутатор.

Проблема аналитического доказательства полной интегрируемости системы (1)–(3) при произвольных N остается открытой. Предложенный в данной работе рецепт упорядочения некоммутирующих переменных в I_n может быть использован при проведении общего доказательства.

Литература

1. *Dittrich J., Inozemtsev V.I.* // J. Phys. A. 1993. **20**. P. 753.
2. *Мещеряков Д.В., Тверской В.Б.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 1. С. 56 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 66).
3. *Calogero F.* // Lett. Nuovo Cimento. 1975. **13**. P. 507.
4. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Phys. Reports. 1983. **94**. P. 312.
5. *Inozemtsev V.I.* // Phys. Scripta. 1984. **25**. P. 517.
6. *Inozemtsev V.I.* // Phys. Lett. 1983. **A98**, No. 7. P. 316.
7. *Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V.* // Phys. Lett. 1984. **A106**, No. 3. P. 101.
8. *Rodionov A.Ya.* // SIGSAM Bull. 1984. No. 3. P. 16.

Поступила в редакцию
10.01.00

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 533.9

ДВУХПОТОКОВАЯ ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В АТОМАРНЫХ СРЕДАХ

В. К. Гришин

(*НИИЯФ*)

Показывается, что потоки быстрых атомов или сложных ионов за счет аномальных доплеровских переходов на медленных волнах в нейтральном газе могут быть нестабильными и служить источником индуцированного высокочастотного излучения. Оцениваются возможные параметры подобных физических систем.

Атомарный поток с электродинамической точки зрения — это поток электронных осцилляторов, которые благодаря аномальному эффекту Доплера даже в невозбужденном состоянии могут быть источником индуцированного излучения. Излучение фотонов в данном случае обеспечивается за счет поступательной энергии частиц. При этом происходит инверсное изменение внутреннего состояния самих осцилляторов — их автовозбуждение. Подобное явление, отмеченное на эвристическом уровне еще в работах