УДК 530.145

ОБ АНАЛОГАХ ИНСТАНТОННЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИЯХ, РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ ВЫСШИМИ КОВАРИАНТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Е.В. Багдасарова, К.В. Степаньянц

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: stepan@phys.msu.su

В качестве аналогов инстантонных решений в теориях, регуляризованных при помощи высших ковариантных производных, рассматриваются полевые конфигурации, для которых вариация действия равна нулю при условии, что вариация калибровочного поля ортогональна масштабной моде. Построены уравнения, которым удовлетворяют такие конфигурации, и проведен анализ их основных свойств.

Введение

Классические решения [1] играют важную роль при исследовании динамики теории поля вне рамок теории возмущений [2]. Например, в трехмерной теории Янга–Миллса инстантонные решения приводят к появлению конфайнмента кварков [3, 4]. Многие попытки объяснить это явление в четырехмерном случае также основаны на изучении структуры классических решений [5, 6]. Особый интерес при этом вызывают инстантонные конфигурации [7–9], которые являются решениями классических евклидовых полевых уравнений с конечным действием. Существование таких решений тесно связано с наличием масштабной инвариантности [10, 11], которая, однако, отсутствует для многих физически интересных теорий, даже в теории Янга–Миллса, регуляризованной при помощи высших ковариантных производных [12]:

$$S = -\mathrm{tr}\int d^4x\,\frac{1}{2e^2}\left(F_{\mu\nu}^2 + F_{\mu\nu}\frac{\mathcal{D}^{2n}}{\Lambda^{2n}}F^{\mu\nu}\right). \qquad (1)$$

Поэтому возникает вопрос о том, каким образом можно построить аналоги классических решений для теорий с нарушенной масштабной инвариантностью. Один из способов предложен в работе [13], где построена конструкция локализованного инстантона. Локализованные инстантоны являются классическими решениями в модифицированной теории, которая появляется при фиксации масштабной инвариантности специальным дополнительным условием. Однако здесь мы будем использовать несколько иное решение, в определенной степени аналогичное идее работы [14] об описании инстантон-антиинстантонных конфигураций. Мы построим полевые конфигурации, на которых действие имеет минимум, если его вариация ортогональна масштабной моде. Такие конфигурации, вообще говоря, не являются классическими решениями уравнений движения в какой бы то ни было теории и, следовательно, не являются локализованными инстантонами.

Исследование свойств аналогов инстантонных решений будем проводить для теории Янга–Миллса, регуляризованной высшими ковариантными производными. Для такой теории будут построены уравнения для аналогов инстантонных решений.

1. Аналоги классических решений в теориях с нарушенной масштабной инвариантностью

Несложно убедиться, что под действием масштабного преобразования

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = \alpha A_\mu(\alpha x) \qquad (2)$$

действие (1) меняется по закону

$$S \to -\frac{1}{2e^2}\mathrm{tr}\int d^4x\,\left(F_{\mu\nu}^2 + \alpha^{2n}F_{\mu\nu}\frac{\mathcal{D}^{2n}}{\Lambda^{2n}}F^{\mu\nu}\right).$$

В случае существования инстантонного решения это выражение должно иметь минимум при $\alpha = 1$, т. е.

$$\frac{d}{d\alpha}S(\alpha)\bigg|_{\alpha=1} = -\frac{n}{e^2}\mathrm{tr}\int d^4x\,F_{\mu\nu}\frac{\mathcal{D}^{2n}}{\Lambda^{2n}}F^{\mu\nu} = 0,$$

откуда следует, что $A_\mu = 0$. Другими словами, в силу нарушения масштабной инвариантности в регуляризованной теории Янга–Миллса существует только тривиальное решение.

Однако даже для теорий с нарушенной масштабной инвариантностью можно строить аналоги классических решений. Для определенности будем считать, что динамической переменной является поле A_μ. Тем не менее приведенные далее рассуждения могут быть легко перенесены и на более общий случай.

Заметим, что при наличии нарушения масштабной инвариантности классическое действие всегда может быть уменьшено при помощи масштабного преобразования. Это означает, что если δA_μ пропорционально масштабной моде

$$M_\mu \equiv \frac{dA'_\mu}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=1} + \mathcal{D}_\mu f(x) = x^\nu\partial_\nu A_\mu + A_\mu + \mathcal{D}_\mu f(x), \qquad (3)$$

где функция $f(x)$ подбирается из условия $\mathcal{D}_\mu M_\mu = 0$, то $dS/d\alpha \neq 0$ и, следовательно, можно подобрать относительный знак δA_μ и M_μ таким образом, что $\delta S < 0$.

Запишем теперь произвольную вариацию поля A_μ в виде разложения по некоторому ортонормированному базису $\phi_\mu^{(n)}$ в пространстве функций со скалярным произведением

$$(\chi, \phi) = \mathrm{tr} \int d^4x \, \chi_\mu(x) \phi_\mu(x),$$

взяв в качестве одного из базисных элементов функцию M_μ:

$$\delta A_\mu = (\alpha - 1) M_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_\mu^{(n)}.$$

При этом предполагается, что калибровка фиксируется условиями $\mathcal{D}_\mu M^\mu = 0$ и $\mathcal{D}_\mu \phi_\mu^{(n)} = 0$, где ковариантная производная берется по полю A_μ.

Вариация действия δS при этом будет линейной функцией переменных α и α_n. Как уже было отмечено ранее, выбором функции A_μ не удается добиться выполнения условия $\delta S = 0$ для произвольных значений α. Однако можно положить $\alpha = 1$ и подобрать A_μ таким образом, чтобы

$$\delta S(\alpha = 1, \alpha_n) = 0.$$

Другими словами, действие, соответствующее полученной функции A_μ, может быть уменьшено только путем масштабного преобразования, тогда как при любых других смещениях оно увеличивается. Соответствующая полевая конфигурация имеет конечное действие, но не является решением уравнений движения. Она и может рассматриваться как аналог инстантонного решения для теории с нарушенной масштабной инвариантностью.

Обратим внимание на то, что в силу ортонормированности базиса $(M_\mu, \phi_\mu^{(n)})$ вариация действия вблизи аналога инстантонного решения оказывается равной нулю для значений δA_μ, ортогональных масштабной моде M_μ. Поэтому для нахождения соответствующей полевой конфигурации удобно использовать метод неопределенных множителей Лагранжа. Действительно, добавим к вариации действия δS величину

$$\frac{2c}{e^2} \mathrm{tr} \int d^4x \, \delta A_\mu \, M_\mu,$$

где M_μ — масштабная мода, определяемая уравнением (3), а c — некоторая постоянная. Тогда, приравнивая к нулю коэффициент при δA_μ, получаем уравнение для аналога инстантонного решения в виде

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} + \frac{2}{e^2} c M_\mu = 0. \tag{4}$$

При этом постоянная c определяется из условия существования решения с необходимым асимптотическим поведением.

Заметим также, что уравнение (4) на первый взгляд не является калибровочно инвариантным. Однако нашим стандартным предположением является фиксация калибровки при помощи условий $\partial_\mu A_\mu = 0$ и $\mathcal{D}_\mu M_\mu = 0$, что позволяет избежать различного рода неоднозначностей. Действительно, легко проверить, что под действием калибровочного преобразования

$$A_\mu \to A'_\mu = \omega A_\mu \omega^{-1} + \omega \, \partial_\mu \omega^{-1}$$

масштабная мода преобразуется как

$$M_\mu \to M'_\mu = \omega M_\mu \omega^{-1}, \tag{5}$$

если $f \to f' = \omega f \omega^{-1} - x^\nu \omega \, \partial_\nu \omega^{-1}$. При этом новая масштабная мода M'_μ с очевидностью удовлетворяет условию $\mathcal{D}'_\mu M'_\mu = 0$, если $\mathcal{D}_\mu M_\mu = 0$.

Из закона преобразования (5) немедленно следует, что уравнения для нахождения аналогов инстантонных решений являются калибровочно инвариантными.

Аналогичным образом можно убедиться и в трансляционной инвариантности уравнения (4) при наложении дополнительного условия ортогональности δA_μ трансляционным модам.

2. Аналоги инстантонных решений в теории Янга–Миллса, регуляризованной с помощью высших ковариантных производных

Для иллюстрации предлагаемого метода рассмотрим простейшую теорию Янга–Миллса, регуляризованную при помощи метода высших ковариантных производных, которая описывается действием (1) при $n = 2$, и построим для нее уравнения для аналогов инстантонных решений. Записывая вариацию действия с точностью до членов первого порядка по δA_μ и добавляя к ней левую часть условия связи

$$\frac{2}{e^2} \mathrm{tr} \int d^4x \, \delta A^\mu M_\mu = 0,$$

умноженную на некоторый множитель Лагранжа c, после несложных преобразований получаем уравнение

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}^\nu F_{\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^4} \big(2\mathcal{D}^\nu \mathcal{D}^4 F_{\mu\nu} + [\mathcal{D}^\nu \mathcal{D}^2 F_{\alpha\beta}, F_{\alpha\beta}] + \\ + [\mathcal{D}^\nu F_{\alpha\beta}, \mathcal{D}^2 F_{\alpha\beta}] \big) - 4c M_\mu = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где масштабная мода M_μ определяется уравнением (3), а постоянная c должна быть найдена из условия существования нетривиального решения с конечным действием.

Будем искать решение уравнения (6) в виде

$$A_\mu = -i \sigma_{\mu\nu} x^\nu a(x^2). \tag{7}$$

Было проверено, что этот анзац проходит через уравнение (6) и приводит к следующему уравнению для функции a:

$$
\begin{aligned}
&2\xi a'' + 6a' + 3a^2 - \xi a^3 + c\,(\xi a' + a) - \\
&- \frac{1}{\Lambda^4}\Big(-32\xi^3 a'''''' - 480\xi^2 a''''' - 1920\xi a''''- \\
&\quad - 128\xi^2 a''''a - 1920a''' - 1024\xi a'''a - 256\xi^2 a'''a' + \\
&\quad + 640\xi^2 a'''a^2 + 256\xi^3 a'''a'a + 64\xi^3 a'''a^2 - \\
&\quad - 1536a''a - 1536\xi a''a' + 1056\xi a''a^2 + \\
&\quad + 1920\xi^2 a''a'a - 192\xi^2 a''^2 + 288\xi^2 a''a^3 192\xi^3 a''a + \\
&\quad + 192\xi^3 a''a'^2 - 72\xi^3 a''a^4 - 768a'^2 - 672a'a^2 + \\
&\quad + 1152\xi a'a^3 + 1056\xi a'^2 a + 320\xi^2 a'^3 - 360\xi^2 a'a^4 + \\
&\quad + 432\xi^2 a'^2 a^2 - 144\xi^3 a'^2 a^3 - 16a^4 + 72\xi a^5 - \\
&\qquad\qquad - 56\xi^2 a^6 + 8\xi^3 a^7\Big) = 0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $\xi \equiv x^2$.

Предполагая, что все производные решения являются конечными, и раскладывая функцию $a(\xi)$ вблизи $\xi = 0$ до членов 5-го порядка, из уравнения (8) можно выразить начальные значения производных $a'''(0)$, $a''''(0)$ и $a'''''(0)$ через $a(0) \equiv 2/\rho^2$, $a'(0)$ и $a''(0)$. При этом значение ρ является произвольным, а остальные независимые постоянные c, $a'(0)$ и $a''(0)$ находятся из условия существования решения, стремящегося к нулю на бесконечности.

После подстановки анзаца (7) в действие (1) при $n = 2$ получается:

$$
\begin{aligned}
S = -\frac{3\pi^2}{2e^2}\int\limits_0^\infty d\xi\,\xi\Big(&-12\xi^2(a')^2 - 24\xi a a' - 24a^2 + \\
&+12\xi a^3 - 3\xi^2 a^4 + \frac{1}{\Lambda^4}\Big(192a'''''a\xi^3 + \\
&+ 192a'''''a'\xi^4 + 96a''''a^3\xi^4 - 288a''''a^2\xi^3 + \\
&+ 2112a''''a'\xi^3 + 2304a''''a\xi^2 + 960a'''a^3\xi^3 - \\
&- 2688a'''a^2\xi^2 + 5376a'''a'\xi^2 - 384a'''a'a\xi^3 + \\
&+ 6912a'''a\xi + 192a'''a'a^2\xi^4 + 1728a''a'a^2\xi^3 - \\
&- 576a''a'^2a\xi^4 - 4608a'''a'a\xi^2 - 144a''a^5\xi^4 + \\
&+ 288a''^2a^2\xi^4 + 4608a''a + 1152a''a^3\xi^2 + \\
&+ 576a''a'^2\xi^3 - 576a''^2a\xi^3 - 5760a''a^2\xi + \\
&+ 2304a''a'\xi + 720a''a^4\xi^3 + 1152a'^2a^3\xi^3 - \\
&- 3072a'a^3\xi + 576a'^2a^2\xi^2 - 288a'^2a^4\xi^4 - \\
&- 864a'a^5\xi^3 + 3744a'a^4\xi^2 - 5760a'^2a\xi - \\
&- 192a'^4\xi^4 - 2304a'a^2 + 384a'^3\xi^2 - 1152a'^3a\xi^3 + \\
&+ 48a^6\xi^2 - 96a^7\xi^3 + 480a^5\xi + 12a^8\xi^4 - 384a^4\Big)\Big).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Для того чтобы избежать возможных арифметических ошибок, было проверено, что получающееся отсюда уравнение Лагранжа совпадает с уравнением (8) в случае $c = 0$.

Уравнение (8) было исследовано численно при помощи метода стрельбы. В качестве исходного параметра задавалось значение $\rho = \sqrt{2/a(0)}$, а величины c, $a'(0)$ и $a''(0)$ подбирались из условия $a \to 0$ при $\xi \to \infty$. При этом было достаточно хорошо видно, что в случае $c = 0$ и $\Lambda \neq 0$ решение отсутствует, и это соответствует приведенным ранее масштабным аргументам. Тем не менее существования решения удавалось добиться при помощи специального выбора постоянной c.

Как оказалось, в пределе $\rho\Lambda \to \infty$ аналог инстантонного решения гладко переходит в инстантонное решение $a = 2/(\xi + \rho^2)$, а соответствующее действие стремится к $8\pi^2/e^2$. В пределе $\rho\Lambda \to 0$ поведение решения значительно более сложное, но действие оказывается пропорциональным $1/(\rho\Lambda)^4$. Это указывает на то, что в таком пределе аналоги инстантонных решений практически полностью определяются регуляризующим слагаемым в действии (1).

Заключение

Таким образом, проведенное исследование показало, что для теорий с нарушенной масштабной инвариантностью можно определить аналоги классических решений. Однако такие полевые конфигурации не будут решениями уравнений движения, и они не минимизируют функционал действия. Тем не менее при предельном переходе к масштабно инвариантной теории они гладко переходят в классические решения. Свойства таких полевых конфигураций были исследованы на примере простейшей теории Янга–Миллса, регуляризованной при помощи высших ковариантных производных. Было построено уравнение для их исследования и вычислено соответствующее классическое действие. Численный анализ решений показал, что в пределе, когда регуляризующее слагаемое стремится к нулю, рассматриваемые полевые конфигурации гладко переходят в инстантонные решения, тогда как в пределе $\Lambda \to 0$ их свойства полностью определяются регуляризирующим слагаемым. В частности, в пределе $\rho\Lambda \to 0$ классическое действие будет вести себя, как $(\rho\Lambda)^{-2n}$.

Литература

1. *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в теории поля. М.: Мир, 1985.
2. *t'Hooft G.* // Phys. Rev. 1976. **D14**. P. 3432.
3. *Polyakov A.M.* // Nucl. Phys. 1977. **B120**. P. 429.
4. *Поляков А.М.* Калибровочные поля и струны. Черноголовка: ИТФ им. Л.Д. Ландау, 1995.
5. *Callan C., Dashen R., Gross D.* // Phys. Rev. 1978. **D17**. P. 2717.
6. *Симонов Ю.А.* // УФН. 1996. **166**. С. 337.
7. *Белавин А.А., Поляков А.М.* // Письма в ЖЭТФ. 1975. **22**. С. 245.

8. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S.* // Phys. Lett. 1975. **59B**. P. 85.
9. *Schafer T., Shuryak E.* E-print: hep-ph/9610451.
10. *Derrick G.H.* // J. Math. Phys. 1964. **5**. P. 1252.
11. *Рубаков В.А.* Классические калибровочные поля. М.: УРСС, 1999.
12. *Славнов А.А.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1978.
13. *Affleck I.* // Nucl. Phys. 1981. **B 191**. P. 429.
14. *Balitsky I., Yung A.* // Phys. Lett. 1986. **B168**. P. 113.

Поступила в редакцию
10.12.01

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.172.3

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СЕЧЕНИЙ ФОТОЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ИССЛЕДОВАНИЯХ С ТОРМОЗНЫМИ γ-ПУЧКАМИ

В.К. Гришин, Б.С. Ишханов, Г.С. Нефедов

(*НИИЯФ*)

E-mail: grishin@depni.npi.msu.su

Методом компьютерного моделирования показано, что путем прямого фитирования величины выхода реакции на основе оптимального выбора предполагаемой модели сечения удается надежно восстановить его исходную величину. Обсуждаются общие критерии статистического моделирования, устойчивость и сходимость фитирования при различной статистической обеспеченности экспериментальных данных.

Введение

Тормозное излучение широко используется в различных фундаментальных и прикладных исследованиях [1]. Высокая интенсивность тормозных γ-пучков позволяет получать экспериментальные данные с необходимой статистической обеспеченностью. Однако проведение спектральных исследований с применением тормозного излучения осложнено тем, что энергетический спектр тормозного излучения чрезвычайно широк и простирается от весьма малых до предельных энергий, равных энергиям электронов, используемых для генерации излучения.

В качестве примера ниже рассматриваются исследования энергетической зависимости сечений фотоядерных процессов. В экспериментах используется следующая процедура. Проводится серия измерений с несколькими тормозными спектрами, имеющими постепенно возрастающие значения верхней границы, что позволяет последовательно «захватывать» в измерениях все более высокие энергетические области фотоядерных процессов и получать дополнительную (хотя и косвенную) информацию. При этом для каждого значения верхней границы тормозного излучения проводятся измерения полного количества наблюдаемых фотоядерных событий во всем интервале энергий γ-квантов (от пороговых до верхней границы).

Таким образом, в экспериментах на тормозном γ-пучке в исследуемой реакции непосредственно измеряется не сечение реакции $\sigma(E_\gamma)$, где E_γ — энергия γ-кванта, а совокупность так называемых выходов реакции $y(E_i)$, которые представляют собой полное количество исследуемых событий для тормозных спектров с различными значениями верхних границ E_i $(i=1,...,n;\ E_i<E_{i+1})$:

$$y(E_i)=\int\limits_{E_{\rm thr}}^{E_i} W(E_i,E_\gamma)\sigma(E_\gamma)dE_\gamma, \qquad (1)$$

где $E_{\rm thr}$ — энергетический порог реакции, $W(E_i,E_\gamma)$ — функция энергетического спектра тормозного γ-излучения [2]*).

По совокупности выходов строится кривая суммарного выхода реакции в энергетическом интервале $E_1,\ldots,E_n$, а затем производится восстановление сечения реакции.

К настоящему времени имеется несколько процедур восстановления сечения реакции, которые в основном сводятся к решению обратной задачи (подробнее см., напр., [2–6]). Эта операция, относящаяся по своей природе к классу некорректных задач, остается, несмотря на несомненные успехи, весьма трудоемкой и не всегда однозначной, особенно в области высоких энергий. Поэтому ниже анализируется другой подход, основанный на фитировании конечной кривой выхода путем оптимального перебора предполагаемых данных по сечению реакции.

*) Здесь не рассматривается ряд деталей, присущих конкретным исследованиям (тип реакции, разделение различных каналов реакции, влияние детектирующей системы и т. д.). Это тема следующей публикации.