

УДК 538.941

МЕХАНИЗМ РАСПАДА ТУРБУЛЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ В СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВУКОВЫХ ВОЛН, ИЗЛУЧАЕМЫХ ВИХРЕВЫМИ КОЛЬЦАМИ

П. А. Кузьмин

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

Выполнено численное моделирование процесса слияния вихревых колец в сверхтекучей жидкости. Высокая точность численной схемы позволила зафиксировать, помимо волны разрежения, акустические волны, излучаемые возмущенными вихревыми кольцами, и выполнить спектральный анализ этого излучения.

Важной задачей гидродинамики является выяснение механизма распада турбулентного состояния в сверхтекучей жидкости. При температурах $T > 1$ К основными факторами диссипации оказываются вязкость нормальной компоненты и взаимное трение. В случае низких ($T < 0.1$ К) температур названные источники рассеяния энергии турбулентного состояния отсутствуют, так как плотность нормальной компоненты мала. Эксперимент, однако, обнаруживает не зависящую от температуры диссипацию квантовой турбулентности [1]. В работах [2, 3] указана возможность распада турбулентности за счет излучения звуковых волн в акте слияния вихрей (vortex reconnection) и при распространении азимутальных волн вдоль вихревых нитей. В классической жидкости спектр излучения вихревого кольца изучен в работах [4, 5]. В квантовом случае исследования спектральных характеристик звуковых волн, возникающих при взаимодействии колец, не проводились.

В работе [6] средняя мощность излучения оценивалась по уменьшению суммарной длины вихревых колец. Точность вычислений, приведенных в работе [7], позволила обнаружить возникающую при столкновении волну разрежения и ее эволюцию в звуковые волны, однако волны, излучаемые кольцами, зафиксированы не были. В настоящей работе выполнено моделирование столкновения двух колец. Повышенная точность численных схем позволила выделить на фоне волны разрежения звуковые волны и вычислить их спектр.

Простейшее описание динамики слабо взаимодействующего бозе-газа дает уравнение Гросса–Питаевского — уравнение Хартри для одночастичной волновой функции системы взаимодействующих бозонов

$$2i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta \psi - (1 - |\psi|^2) \psi.$$

Подстановка $\psi = \rho^{1/2} e^{iS}$ дает гидродинамическую интерпретацию уравнения Гросса–Питаевского — уравнение непрерывности и уравнение Бернулли

с квантовым давлением

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, (\rho \mathbf{u})) &= 0, \quad \mathbf{u} = \nabla S, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{1}{2} (\rho - 1) - \frac{1}{2} \rho^{-1/2} \nabla^2 \rho^{1/2} &= 0. \end{aligned}$$

Безразмерные единицы в уравнении выбраны так, чтобы $|\psi(x)| \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$, $\hbar = m = 1$, единица длины полагается равной длине когерентности. Уравнение Гросса–Питаевского качественно описывает эволюцию конденсата при нулевой температуре, в частности, в работах [6–8] с помощью этого уравнения изучены такие процессы, как зарождение вихрей, слияние вихревых нитей, излучение звука нитями, распространение азимутальных волн.

Одним из основных факторов, возмущающих свободное движение вихревых колец, является слияние вихрей. Моделирование процесса слияния вихрей впервые выполнено в работе [9], факт излучения звуковых волн установлен в численном эксперименте [6].

Солитонные решения уравнения Гросса–Питаевского определяются следующей краевой задачей:

$$\begin{aligned} 2iU \frac{\partial \psi}{\partial x'_3} &= \Delta_{x'} \psi + (1 - |\psi|^2) \psi, \\ |\psi(x')| &\rightarrow 1, \quad |x'| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где U — скорость солитона, распространяющегося вдоль оси x_3 .

Для моделирования эволюции в бесконечном пространстве все пространство отображается в куб $[-L, L]^3$: $\xi_i = f(x_i) = L \operatorname{th}(\frac{x_i}{L})$, $i = 1, 2, 3$. Вихревые кольца построены методом Ньютона, основанным на методе взаимных градиентов. В качестве первого приближения выбирается асимптотическое решение для малого кольца с $U = 0.6$, представляющее собой аппроксимацию Паде функции ψ [10]. Вычисления проводились на сетках $(172)^3$ и $(220)^3$, уравнение эволюции решалось методом переменных направлений с временным шагом 0.02.

Начальное состояние представляет собой произведение двух состояний с вихревыми кольцами

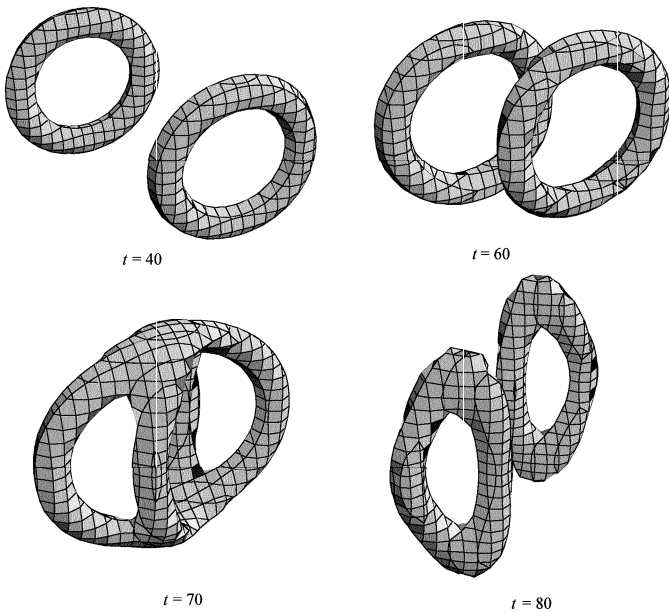


Рис. 1. Поверхности уровня плотности конденсата в различные моменты времени

радиуса 5.5, распространяющимися в противоположных направлениях. Начальное расстояние между плоскостями колец выбрано равным 40, расстояние между осями колец — 7. На рис. 1 представлена характерная картина слияния вихревых колец. Столкновение происходит при $t = 70$ и приводит к образованию двух вытянутых колеблющихся вихревых колец, распространяющихся в противоположных направлениях, под углом к направлению движения исходных колец. Слияние колец приводит также к образованию двух волн разрежения, распространяющихся в направлении, перпендикулярном к плоскости, проведенной через оси вихревых колец (в направлении оси x_1). Распространение волны разрежения иллюстрирует рис. 2, на котором изображена зависимость плотности конденсата от времени в различных точках, лежащих на оси x_1 . В других направлениях волны разрежения не излучаются. Видно, что по мере распространения от места столкновения колец импульсы разрежения эволюционируют в звуковые волны. В отличие от моделирования, проведенного в [6, 7], в данной работе получен временной профиль звуковой волны с разрешением, достаточным для проведения спектрального анализа.

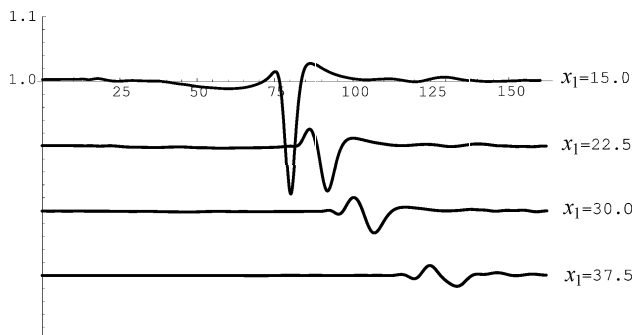


Рис. 2. Временной профиль плотности конденсата в точках, лежащих на оси x_1

После прохождения волны разрежения через точку, лежащую на оси x_1 , наблюдаются слабо затухающие колебания плотности малой амплитуды (рис. 3, участок графика после $t = 110$), соответствующие звуковым волнам. Следуя [2, 3, 7], полагаем, что причиной возникновения таких волн являются возмущенные при столкновении колеблющиеся вихревые кольца. Спектр указанного участка обнаруживает ярко выраженный узкополосный характер (рис. 3), который, очевидно, объясняется описан-

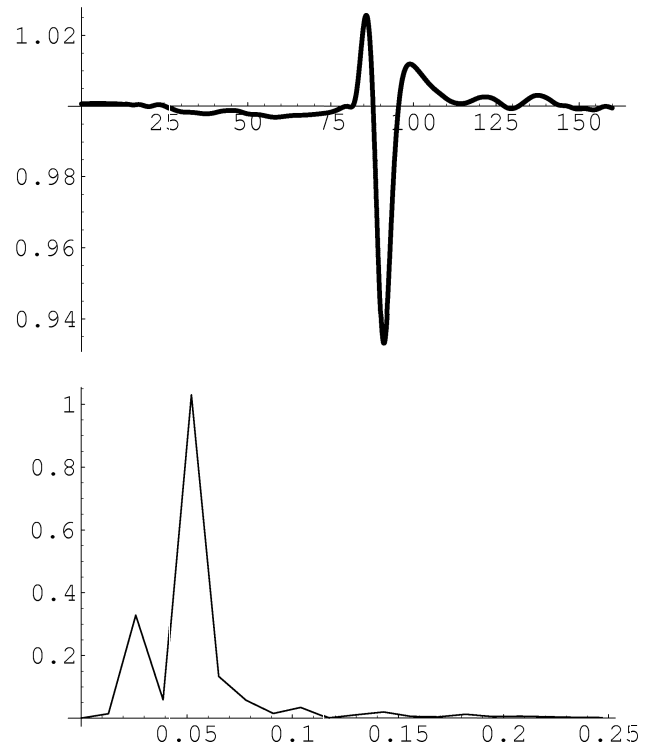


Рис. 3. Зависимость плотности конденсата от времени в точке $(x_1, x_2, x_3) = (22.5, 0, 0)$ (верхний график); спектр участка $110 < t < 180$ (нижний график)

ным выше механизмом образования звуковых волн. В пользу последнего утверждения свидетельствует соответствие периода звуковых волн характерному периоду распространения азимутальных волн вдоль кольца. Из рис. 3 видно, что максимум спектра излучения находится около частоты 0.065. Период распространения азимутальных волн вдоль кольца можно оценить, имея в виду формулу для групповой скорости волн длины Λ [11]:

$$v = \frac{\pi}{\Lambda} \left(2 \ln \left(\frac{\Lambda}{2\pi} \right) - 1 \right),$$

равной для рассматриваемого диапазона частот $\Lambda \sim 7$ приблизительно 0.4. Отсюда получаем оценку для частоты азимутальных волн: $f \sim 0.05$. Хорошего согласования результатов ожидать не приходится, поскольку для малых колец формула для групповой скорости неприменима.

Результаты, полученные для формы спектра, согласуются с экспериментальными данными для классической жидкости [5]. Сходство результатов, веро-

ятно, связано с общим для классического и квантового случаев механизмом образования волн.

Таким образом, один из механизмов распада турбулентного состояния при малых температурах обнаруживает сходство с классическим явлением излучения звука вихревым кольцом. Связанный со слиянием вихрей механизм рассеяния энергии турбулентности характерен для квантовой жидкости. Следует отметить, что в отсутствие вязкости столкновение вихрей является важным фактором, возмущающим движение вихревых колец; в связи с этим явление слияния вихрей приобретает первостепенное значение для обоих отмеченных в работах [2, 3] механизмов распада турбулентности.

Автор глубоко благодарен профессору Ф. В. Шугаеву за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. *Davies S.L., Hendry P.C., McClintock P.V.E.* // *Physica B*. 2000. **280**. P. 43.

2. *Samuels D.C., Barenghi C.F.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. **81**. P. 4381.
3. *Vinen W.F.* // *Phys. Rev.* 2000. **B61**. P. 1410.
4. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A.* // *J. Fluid Mech.* 1997. **341**. P. 19.
5. *Зайцев М.Ю., Копьев В.Ф., Мушин А.Г., Потокин А.А.* // *ДАН СССР*. 1990. **35**. С. 1080.
6. *Leadbeater M., Winiiecki T., Samuels D.C. et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 2001. **86**. P. 1410.
7. *Leadbeater M., Samuels D.C., Barenghi C.F., Adams C.S.* // *Phys. Rev.* 2003. **A67**. P. 015601.
8. *Winiiecki T., Adams C.S.* // *Europhys. Lett.* 2000. **52**. P. 257.
9. *Koplik J., Levine H.* // *Phys. Rev. Lett.* 1993. **71**. P. 1375.
10. *Berloff N.G.* // *Phys. Rev.* 2004. **A69**. P. 053601.
11. *Vinen W.F., Niemela J.J.* // *J. Low Temper. Phys.* 2002. **516**. P. 167.

Поступила в редакцию
20.05.05