ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.19

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ТОЧНО РЕШАЕМОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФЕРМИОНОВ

В. И. Иноземцев[*)], **Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников**

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

E-mail: sadovnikov@phys.msu.ru

Для гиперболических систем частиц Сазерленда с внутренними степенями свободы ($su(n)$ спинами), находящихся во внешнем поле с потенциалом Морса, характеризуемым параметром τ^2, построены интегралы движения с использованием формализма Лакса. Показано, что соответствующая бесконечномерная алгебра, определяющая скрытую симметрию систем, не является янгианом.

Проблема нахождения скрытой симметрии систем многих взаимодействующих частиц привлекла значительное внимание после того, как были найдены примеры точно решаемых одномерных моделей с локальным двухчастичным взаимодействием [1, 2].

Список подобных моделей был значительно расширен после презентации систем Калоджеро–Сазерленда (КС) [3, 4] — систем частиц с дальнодействием, описываемым парным потенциалом $V(x) = \lambda(\lambda+1)x^{-2}$ и находящихся в поле гармонического осциллятора $W(x) = \omega^2 x^2/2$ или рассматриваемых при периодических граничных условиях. Последний случай обычно интерпретируется как взаимодействие частиц, помещенных на окружность с бинарным потенциалом взаимодействия, обратно пропорциональным квадрату длины хорды, соединяющей частицы [5].

Расширение класса моделей типа КС было связано с рассмотрением взаимодействий со структурой, определяемой системами корней классических алгебр Ли [6]. Наиболее общие модели, построенные в рамках данного подхода, определяются короткодействующим потенциалом бинарного взаимодействия $[a^{-1}\sinh(ax)]^{-2}$, аналогичным оригинальному тригонометрическому потенциалу, предложенному Сазерлендом [5], и «граничными условиями», которые могут быть интерпретированы как взаимодействие частиц с внешним полем с трехпараметрическим потенциалом $W(x) = A_1\cosh(4ax+b_1) + A_2\cosh(2ax+b_2)$ [7]. Многочастичный потенциал для этих систем записывается в форме

$$H = \sum_j^N \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + W(x_j)\right] + \sum_{j<k}^N \frac{\lambda(\lambda+1)a^2}{\sinh^2 a(x_j - x_k)}. \tag{1}$$

Однако для произвольных значений параметров простая форма спектра и волновых функций теряется. Единственный случай, в котором удается хотя бы частично восстановить эту простоту, соответствует пределу $b_{1,2} \to +\infty$ с заменой A_α на $\exp(-b_\alpha)$ [8], который приводит к однопараметрическому потенциалу Морса для внешнего поля:

$$W(x) = 2\tau^2 a^2(\exp(2ax) - 1)^2. \tag{2}$$

Динамика систем, описывающихся выражениями (1), (2) (далее обозначаются СМ), намного более сложна [8] по сравнению с системами КС в поле с потенциалом гармонического осциллятора. Последние могут быть рассмотрены как предел СМ-моделей, когда параметр потенциала Морса τ неограниченно возрастает как $\omega/4a^2$ при $a \to 0$. В частности, в работе [8] было показано, что в случае статистики Бозе дискретная часть спектра для СМ-систем существует лишь при выполнении условия на параметры τ и λ, $\tau - 1/2 - (\lambda+1)(N-1) > 0$ и содержит конечное число уровней.

Весьма вероятно, что для бесспиновых частиц не существует других нетривиальных примеров точно решаемых проблем с физически мотивированной структурой гамильтониана (1). Несколько лет назад дальнейший прогресс был достигнут в работах Ха и Холдейна [9] и Поликронакоса [10]. Они предложили обобщение модели КС для частиц с внутренними степенями свободы ($su(n)$-спинами) и обменным спиновым взаимодействием вида $\lambda(\lambda + P_{jk})V(x_j - x_k)$, где оператор P_{jk} переставляет спины частиц с номерами j и k:

$$P_{jk} = \sum_{p,q=1}^n e_j^{pq} e_k^{qp}, \tag{3}$$

[*)] Лаборатория теоретической физики ОИЯИ, 141980, г. Дубна Московской обл.

$\{e_j^{pq}\}$ — элементарные спиновые операторы, подчиняющиеся коммутационным соотношениям

$$[e_j^{pq}, e_k^{rs}] = \delta_{jk}(\delta^{rq} e_j^{ps} - \delta^{ps} e_j^{rq}). \tag{4}$$

Эти новые модели и соответствующие им решеточные спиновые цепочки с ясной физической интерпретацией, которые возникают после исключения динамических систем свободы, были впоследствии детально исследованы [11–20]. При анализе свойств их спектра было обнаружено, что их общей чертой является наличие громадного числа вырожденных уровней. Впоследствии этот факт был объяснен общей для этих моделей дополнительной внутренней симметрией типа янгиана [13, 19]. Важные физические приложения систем фермионов с $su(2)$-спинами и дальнодействующим КС-взаимодействием были найдены и подробно исследованы в [16]. Для более сложных систем типа СМ спектральная задача рассматривалась только для предельного случая неоднородных спиновых цепочек [21].

В свете результатов работ [11–21] возникает естественный вопрос: существует ли точно решаемая спиновая версия динамических СМ-систем, описываемая гамильтонианом

$$H_{SM}^{(s)} = \sum_j^N \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + 2\tau^2 a^2 \left(\exp(2ax_j) - 1\right)^2 \right] + \\ + \sum_{j<k}^N \frac{\lambda(\lambda + P_{jk})a^2}{\sinh^2 a(x_j - x_k)}. \tag{5}$$

Цель настоящей работы — показать, что ответ на данный вопрос положителен, но соответствующая скрытая симметрия уже не является янгианом. Для этого используется представление Лакса, которое успешно зарекомендовало себя при анализе более простых систем КС-типа.

В настоящее время общеизвестно, что возможность редукции спектральной проблемы в квантовой механике обусловлена ее скрытой симметрией. Для систем с N степенями свободы эта симметрия проявляется в существовании по меньшей мере $N-1$ интегралов движения — операторов, коммутирующих с гамильтонианом. Стандартный способ нахождения этих интегралов состоит в построении представления Лакса для уравнений движения в форме Гейзенберга. Ниже будет продемонстрировано, что этот способ позволяет найти интегралы движения для спиновых СМ-систем.

Для упрощения обозначений удобно ввести переменные $z_j = \exp(2ax_j)$, в которых гамильтониан (5) приобретает более удобную форму $H_{SM}^{(s)} = 4a^2 \mathcal{H}_{SM}^{(s)}$,

$$\mathcal{H}_{SM}^{(s)} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2}\hat{p}_j^2 + w(z_j) \right] + \sum_{j<k}^N \frac{\lambda(\lambda + P_{jk}) z_j z_k}{(z_j - z_k)^2}, \tag{6}$$

где

$$w(z) = \frac{\tau^2}{2}(z_j - 1)^2, \quad \hat{p}_j = -iz_j \partial/\partial z_j. \tag{7}$$

Везде в дальнейшем будем предполагать, что $\lambda > 0$.

Фундаментальное соотношение Лакса для оператора (6) может быть записано в форме

$$[\mathcal{H}_{SM}^{(s)}, L] = [L, M]. \tag{8}$$

Элементы матриц L и M должны быть спиновыми операторами. Поэтому инварианты матрицы L не коммутируют с (6). Если, однако, удастся найти такую пару (L, M), что M удовлетворяет условию

$$M\mathcal{I} = \mathcal{I}^\dagger M = 0, \tag{9}$$

где все элементы вектора-столбца $\mathcal{I}$ равны, то соотношение (8) гарантирует существование интегралов движения в форме [13–15]

$$I_s = \mathcal{I}^\dagger L^s \mathcal{I}. \tag{10}$$

Для того чтобы найти пару Лакса для спиновых СМ-систем, рассмотрим следующую подстановку [7, 22]:

$$L = \begin{pmatrix} L_0 & \psi + \rho \\ -\psi - \rho & -L_0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_0 + m & \phi \\ \phi & M_0 + m \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где L_0 и M_0 образуют стандартную пару Лакса для N-частичной системы Сазерленда:

$$(L_0)_{jk} = \hat{p}_j \delta_{jk} - \frac{i}{2}(1 - \delta_{jk})\lambda f_{jk} P_{jk}, \\ (M_0)_{jk} = (1 - \delta_{jk})\lambda h_{jk} P_{jk} - \lambda \delta_{jk} \sum_{s \neq j}^N h_{js} P_{js}, \\ f_{jk} = \frac{z_j + z_k}{z_j - z_k}, \quad h_{jk} = \frac{z_j z_k}{(z_j - z_k)^2} \tag{12}$$

и ψ, ϕ, ρ и m являются матрицами размера $N \times N$ с элементами

$$(\psi)_{jk} = \xi(z_j)\delta_{jk}, \quad (\phi)_{jk} = \varphi(z_j)\delta_{jk}, \\ (m)_{jk} = \mu(z_j)\delta_{jk}, \quad (\rho)_{jk} = cP_{jk}(1 - \delta_{jk}). \tag{13}$$

Можно показать, что соотношение Лакса (8) эквивалентно переопределенной системе функциональных уравнений

$$iz\frac{d}{dz}(w(z) + \mu(z)) = 2\xi(z)\varphi(z), \quad \varphi(z) = -\frac{i}{2}z\frac{d\xi}{dz}, \tag{14}$$

$$-\frac{i\lambda}{2} f_{jk}[\mu(z_k) - \mu(z_j)] + c[\varphi(z_j) + \varphi(z_k)] = 0, \tag{15}$$

$$-\frac{i\lambda}{2} f_{jk}[\varphi(z_j) + \varphi(z_k)] + \lambda h_{jk}[\xi(z_j) - \xi(z_k)] = \\ = c[\mu(z_j) - \mu(z_k)]. \tag{16}$$

Наиболее ограничительными являются уравнения (15), (16). Если рассматривать их в первую очередь, то можно найти общее решение всей системы в форме

$$\mu(z) = \mu_1 z + \mu_2 z^{-1}, \quad \varphi(z) = \epsilon(\mu_1 z - \mu_2 z^{-1}),$$

$$\xi(z) = 2i\epsilon(\mu_1 z + \mu_2 z^{-1} + \gamma), \tag{17}$$

$$w(z) = 2[\mu_1^2 z^2 + \mu_2^2 z^{-2} + (2\gamma - 1/2)(\mu_1 z + \mu_2 z^{-1})], \tag{18}$$

$$2c = -i\epsilon\lambda, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Потенциал внешнего поля (18), найденный этим способом, содержит три произвольных параметра. Однако из (13) видно, что матрица M (11) удовлетворяет условию (9) только при условии $\mu(z) + \varphi(z) = 0$. Соответствующий набор параметров может быть записан в форме

$$\mu_1 = \tau/2, \quad \mu_2 = 0, \quad \epsilon = -1, \quad \gamma = 1/4 - \tau/2.$$

Из (17), (18) следует, что $w(z)$ приобретает форму (7), и элементы матриц L и M записываются в виде

$$\begin{aligned} (\psi)_{jk} &= -i[\tau(z_j - 1) + 1/2]\delta_{jk}, \\ (\phi)_{jk} &= -(m)_{jk} = -\tau z_j \delta_{jk}/2, \\ (\rho)_{jk} &= i\lambda P_{jk}(1 - \delta_{jk})/2. \end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, набор интегралов движения дается формулами (10)–(12), (19) при четных значениях $s = 2l$, $1 \leqslant l \leqslant N$. Легко проверить, что гамильтониан (6) пропорционален первому элементу I_2 этого набора и все $\{I_{2l}\}$ являются функционально независимыми.

Можно построить другое представление для $\{I_{2l}\}$ посредством введения операторов типа Дункла, похожих на те, что были найдены для КС-систем в [10, 13, 22]:

$$b_j^+ = \tilde{p}_j - i\lambda \sum_{k \neq j}^{N} \frac{z_j}{z_j - z_k} K_{jk} + i[\tau(z_j - 1) + 1/2],$$

$$b_j^- = \tilde{p}_j - i\lambda \sum_{k \neq j}^{N} \frac{z_k}{z_j - z_k} K_{jk} - i[\tau(z_j - 1) + 1/2],$$

где $\{K_{jk}\}$ переставляют координаты частиц: $K_{jk} z_j = z_k K_{jk}$. Тогда операторы I_{2l} могут быть записаны с точностью до несущественных множителей в виде

$$I_{2l} \propto \tilde{\pi}(J_l), \quad J_l = \sum_{j=1}^{N} B_j^l, \tag{20}$$

где

$$B_j = b_j^+ b_j^- \tag{21}$$

и $\tilde{\pi}$ — операция, состоящая в замещении произведений типа $K_{j_1 j_2} \ldots K_{j_{p-1} j_p}$ на $P_{j_{p-1} j_p} \ldots P_{j_1 j_2}$. Коммутационные соотношения для $b_j^\pm$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} [b_j^\pm, b_k^\pm] &= \mp i\lambda [b_j^\pm, K_{jk}], \\ [b_j^+, b_k^-] &= i\lambda [b_j^+ - b_j^- + 2\tau - 1 + i\lambda\omega_j] K_{jk}, \end{aligned}$$

где $\omega_j = \sum_{s \neq j} K_{js}$. Коммутатор операторов (21) с учетом этих соотношений может быть представлен в форме

$$[B_j, B_k] = i\lambda(2\tau - 1)(B_k - B_j)K_{jk} + \\ + \lambda^2(\omega_k K_{jk} B_k - B_k K_{jk} \omega_k), \tag{22}$$

которая может быть использована, с учетом (20), для оценки коммутаторов операторов I_{2l}. Последний член в (22) делает вычисления весьма громоздкими. Тем не менее использование (22) несколько раз позволяет показать, что $[I_4, I_{2l}] = 0$. Этот факт поддерживает гипотезу о том, что $[I_{2l}, I_{2m}] = 0$ для любой пары $l, m \leqslant N$.

Существование пары Лакса (11) со свойством (9) позволяет сконструировать другой набор операторов, коммутирующих с гамильтонианом (6), аналогичный найденному в [13–15]. Пусть $E^{ab} = \mathrm{diag}(e_1^{ab}, \ldots, e_N^{ab}, e_1^{ab}, \ldots, e_N^{ab})$ — матрица размера $2N \times 2N$ с элементами, удовлетворяющими соотношениям (4). Из (11), (12) можно заметить, что (8) по-прежнему имеет место, если заменить L на E^{pq}. Таким образом, соответствующий набор имеет вид

$$Q_l^{ab} = 2^{-(l+1)} \mathcal{I}^\dagger E^{ab} L^{2l} \mathcal{I}. \tag{23}$$

Наиболее удобный способ определения типа алгебры, генерируемой Q^{ab}, состоит в рассмотрении их решеточных аналогов $\tilde{Q}^{ab}$, которые получаются из (23) путем замены $\tau \to \tilde{\tau}\lambda$ как коэффициенты при ведущих членах при $\lambda \to \infty$. Явная форма двух первых $\tilde{Q}$ имеет вид

$$\tilde{Q}_0^{ab} = \sum_{j=1}^{N} e_j^{ab}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1^{ab} = &\sum_{j \neq k}^{N} e_j^{ab} \left(\tilde{h}_{jk} + \frac{1}{2} \tilde{l}_{jk} \right) - \\ &- \sum_{j \neq k \neq l \neq j}^{N} \frac{\tilde{z}_j \tilde{z}_l}{(\tilde{z}_j - \tilde{z}_k)(\tilde{z}_k - \tilde{z}_l)} (e_j e_k e_l)^{ab} + \\ &+ \tilde{\tau}^2 \sum_{j}^{N} (\tilde{z}_j - 1)^2 e_j^{ab}, \end{aligned} \tag{25}$$

где $\{\tilde{z}_j\}$ — координаты частиц в классической СМ-системе в состоянии равновесия, удовлетворяющие уравнениям

$$\tilde{\tau}^2(\tilde{z}_j - 1) + \sum_{k \neq j}^{N} \frac{\tilde{z}_k(\tilde{z}_j + \tilde{z}_k)}{(\tilde{z}_k - \tilde{z}_j)^3} = 0, \quad j = 1, \ldots, N$$

и $\tilde{l}_{jk}$, $\tilde{h}_{jk}$ даются уравнениями (12) с $z_{j,k}$, замененными на $\tilde{z}_{j,k}$. Операторы (24), (25) коммутируют с гамильтонианом спиновой СМ-цепочки $H_s = \sum_{j \neq k} \tilde{h}_{jk} P_{jk}$. Используя (4), легко проверить, что они удовлетворяют соотношениям

$$[\tilde{Q}_0^{ab}, \tilde{Q}_{0,1}^{cd}] = \delta^{cb} \tilde{Q}_{0,1}^{ad} - \delta^{ad} \tilde{Q}_{0,1}^{cb}.$$

Если бы $\tilde{Q}_0$ и $\tilde{Q}_1$ генерировали янгиан $\mathrm{Y}(SU(n))$, как это имеет место для аналогов (24), (25) для спиновых цепочек КС-типа [19], то они удовлетворяли бы также деформированному соотношению Серра

$$F^{abcdef} = [\tilde{Q}_0^{ab}, [\tilde{Q}_1^{cd}, \tilde{Q}_1^{ef}]] - [\tilde{Q}_1^{ab}, [\tilde{Q}_0^{cd}, \tilde{Q}_1^{ef}]] = \\ = \frac{h^2}{4} F_0^{abcdef}, \\ F_0^{abcdef} = [\tilde{Q}_0^{ab}, [(\tilde{Q}_0\tilde{Q}_0)^{cd}, (\tilde{Q}_0\tilde{Q}_0)^{ef}]] - \\ - [(\tilde{Q}_0\tilde{Q}_0)^{ab}, [\tilde{Q}_0^{cd}, (\tilde{Q}_0\tilde{Q}_0)^{ef}]] \tag{26}$$

с некоторым параметром деформации h^2. Прямое вычисление показывает, однако, что вместо (26) имеет место соотношение

$$F^{abcdef} = \left(\tilde{\tau}^2 + \frac{N-1}{2}\right) F_0^{abcdef} + \delta^{cf}\Phi^{abed} - \delta^{de}\Phi^{abcf} + \\ + \delta^{ad}\Phi^{efcb} - \delta^{bc}\Phi^{efad} + \delta^{be}\Phi^{cdaf} - \delta^{af}\Phi^{cdeb}, \tag{27}$$

где $\Phi^{abcd} = (\tilde{Q}_0^2 - n\tilde{Q}_0)^{ad}\tilde{Q}_1^{cb} - \tilde{Q}_1^{ad}(\tilde{Q}_0^2 - n\tilde{Q}_0)^{cb}$.

Этот факт свидетельствует об отсутствии скрытой симметрии в форме янгиана для СМ-систем и дает основание полагать, что для них симметрия обусловлена более сложной бесконечномерной алгеброй.

В настоящей работе показано, что часть результатов, полученных для КС-систем частиц со спином, может быть распространена на СМ-системы. Формализм Лакса позволяет найти множество интегралов движения, которые образуют представление некоторой скрытой бесконечномерной алгебры. Однако для СМ-систем не существует аналогов операторов рождения и уничтожения, которые были найдены для КС-систем [6, 22] и использованы для явного построения волновых функций. Соотношение (27) показывает, что структура скрытой бесконечномерной алгебры для СМ- систем крайне сложна и требует отдельного исследования. Она может быть связана с трансфер-матрицами, удовлетворяющими уравнениям отражения [23]. Примеры таких матриц для спиновых цепочек с дальнодействующим обменным взаимодействием были указаны в [24], и этот факт позволяет надеяться на возможность рассмотрения спиновых СМ-систем в рамках общего квантового метода обратной задачи рассеяния.

Литература

1. *Lieb E.H., Liniger W.* // Phys. Rev. 1963. **130**. P. 1605.
2. *McGuire J.B.* // J.Math. Phys. 1964. **5**. P. 622; 1965. **6**. P. 432; 1966. **7**. P. 123.
3. *Calogero F.* // J.Math. Phys. 1969. **10**. P. 2191; 1971. **12**. P. 419.
4. *Sutherland B.*// J.Math. Phys. 1971. **12**. P. 247.
5. *Sutherland B.* // Phys. Rev. 1972. **A5**. P. 1372.
6. *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Phys. Rep. 1983. **94**. P. 313.
7. *Inozemtsev V.I.* // Physica Scripta. 1984. **29**. P. 518.
8. *Inozemtsev V.I., Meshcheryakov D.V.* // Physica Scripta. 1986. **33**. P. 99; JINR Rapid Commun. 1984. N 4. P. 22.
9. *Ha Z.N.C., Haldane F.D.M.* // Phys. Rev. 1992. **B46**. P. 9359.
10. *Polychronakos A.P.* // Phys. Rev. Lett. 1992. **69**. P. 703.
11. *Kawakami N.* // Phys. Rev. 1992. **B46**. P. 3191.
12. *Minahan J.A., Polychronakos A.P.* // Phys. Lett. 1993. **B302**. P. 265.
13. *Bernard D., Gaudin M., Haldane F.D.M., Pasquier V.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1993. **26**. P. 5219.
14. *Hikami K., Wadati M.* // J. Phys. Soc. Japan. 1993. **62**. P. 469.
15. *Sutherland B., Shastry B.S.* // Phys. Rev. Lett. 1993. **71**. P. 5.
16. *Vacek K., Okiji A., Kawakami N.* // Phys. Rev. 1994. **B49**. P. 4635.
17. *Vacek K., Okiji A., Kawakami N.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. **27**. P. 201.
18. *Kato Y., Kuramoto Y.* // Phys. Rev. Lett. 1995. **74**. P. 1222.
19. *Hikami K.* // Nucl. Phys. 1995. **B441**. P. 530.
20. *Haldane F.D.M.* // Phys. Rev. Lett. 1988. **60**. P.635; *Shastry B.S.* // Phys. Rev. Lett. 1988. **60**. P. 639.
21. *Frahm H., Inozemtsev V.I.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. **27**. P. 801.
22. *Brink L., Hansson T.H., Vasiliev M.A.* // Phys. Lett. 1992. **286B**. P. 109.
23. *Sklyanin E.K.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1988. **21**. P. 2375.
24. *Bernard D., Pasquier V., Serban D.* Exact solutions of long-range interacting spin chains with boundaries. hep-th/9501044.

Поступила в редакцию
18.04.2007