Б.А.Гришанин

Избранные труды и воспоминания родных, коллег и друзей

Под ред. В.Н.Задкова и Ю.М.Романовского

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Москва, 2011

Б. А. Гришанин: Избранные труды и воспоминания родных, коллег и друзей / Под ред. В. Н. Задкова и Ю. М. Романовского. — М.: Московский университет. 2011. — 353 с.

Данная книга — о замечательном ученом и человеке Борисе Андреевиче Гришанине, почти вся жизнь которого после окончания школы была связана с Московским университетом, в котором он прошел путь от студента до доцента. Его научным руководителем в аспирантуре физического факультета МГУ был Руслан Леонтьевич Стратонович — замечательный ученый и легендарная личность. Борис Андреевич внес существенный вклад в квантовую теорию взаимодействия света с веществом и всегда любил фундаментальные задачи, из которых физика квантовой информации — его любимая тема. С нее он начинал свою научную карьеру и с ней он ее завершил. В книге приводятся несколько его последних научных статей, завершенных и опубликованных уже после его смерти. Кроме того, приводится полный текст его книги «Квантовые случайные процессы», над которой он работал до конца своей жизни, и полный аннотированный список его публикаций в реферируемых журналах. Научные работы Б. А. Гришанина дополнены воспоминаниями о нем его брата, друзей, однокурсников, коллег по работе и бывших учеников. Жизнь Бориса Андреевича в науке и его гражданская позиция — замечательный пример для студентов и тех, кто начинает свой путь в Науку.

Предисловие

Данная книга — о замечательно ученом и человеке Борисе Андреевиче Гришанине, почти вся жизнь которого после окончания школы в 1957 г. вплоть до его кончины в 2006 г. была связана с Московским университетом. Будучи физиком–теоретиком, он любил математическую краткость изложения и его автобиография, написанная в 1968 г., приведена ниже.

Автобиография Б. А. Гришанина,
русского, чл. ВЛКСМ

Я, Гришанин Борис Андреевич, родился 9-го сентября 1940 г. в семье служащего в Дзержинском раб. пос. Ухтомского р-на Московской обл. В 1957 г. окончил среднюю школу и поступил на физический факультет МГУ. В январе 1963 г. окончил физический факультет и поступил по распределению на предприятие п/я 4077 в должности инженера. В апреле 1965 г. поступил в очную аспирантуру физического факультета на кафедру общей физики для мехмата. В октябре 1967 г. представил к защите кандидатскую диссертацию, посвященную вопросам теории информации. В марте 1968 г. защитил диссертацию и в апреле окончил аспирантуру. Состою членом ВЛКСМ с 1954 г.

15.IV.68
Б.А.Гришанин

Борис Андреевич никогда не занимал никаких руководящих постов и прошел путь на кафедре от студента до доцента. Его научным руководителем в аспирантуре физического факультета МГУ был Руслан Леонтьевич Стратонович — замечательный ученый и легендарная личность. Все его ученики, а Борис был одним из первых, также соответствовали своему Учителю. Более того, как Борис сам рассказывал, не Руслан, а он

сам попросил быть Руслана его научным руководителем в аспирантуре и сам же выбрал тему своей научной работы. Это был союз единомышленников и в последующем у Бориса с Русланом на всю жизнь сложились добрые, дружеские отношения.

Борис Андреевич работал в разных направлениях теории взаимодействия света с веществом, однако всегда любил фундаментальные задачи, из которых физика квантовой информации — его любимая тема. С нее он начинал свою научную карьеру и с ней он ее завершил. Из-за разнообразия научных интересов Бориса представляется сложным дать краткий обзор его научных достижений. Вместо этого в книге приводятся несколько его последних научных статей, завершенных и опубликованных уже после его смерти. Кроме того, приводится полный текст его книги «Квантовые случайные процессы», над которой он работал до конца своей жизни, и полный аннотированный список его публикаций в реферируемых журналах.

Будучи исследователем по своей природе, Борис Андреевич пытался не только решить физические проблемы, но и объяснить, например с помощью квантовой механики, вечные загадки бытия. Этот пласт его творчества мы также приоткрываем читателю.

Борис Андреевич был Гражданином с большой буквы. Такие слова как Родина, Россия, честь и достоинство, национальное самосознание были для него не пустыми звуками. Он никогда не состоял ни в какой партии, но был несомненно в когорте тех наших сограждан, которые искренне и глубоко любят свою Родину и работают на ее благо.

У Бориса было немного дипломников и аспирантов, но все они — состоявшиеся люди, часть из них в науке, но все — в жизни. Они могут гордиться тем, что путевку им в жизнь дал Борис Андреевич. Часть его знаний, радость общения с ним сохранили навсегда также и мы, кому посчастливилось работать и общаться с Борисом.

Представляемая книга содержит следующие разделы.

1. **Воспоминания о Борисе Гришанине**, в котором собраны воспоминания о Борисе Андреевиче Гришанине его брата, Анатолия Андреевича, друзей, однокурсников, коллег по работе и бывших учеников. Эти воспоминания ни в коей мере не претендуют ни на полное изложение биографии Бориса Андреевича, ни на описание его научных заслуг и достижений. Они — своего рода зарисовки и личные впечатления от общения с замечательным ученым и неординарным Человеком, таким как мы все его знали и каким он останется в нашей памяти.

2. **Воспоминания Б. А. Гришанина о Руслане Стратоновиче**, в котором приведены воспоминания Бориса Андреевича о его учителе, профессоре Руслане Леонтьевиче Стратоновиче, опубликованные им в книге о Руслане (см. Часть V, работа [8]).

3. **Избранные работы Б. А. Гришанина**, в который вошли две его статьи, законченные и опубликованные уже после его кончины, а также две его неопубликованные работы, в которых исключительно ясно

прослеживается восприятие Борисом Андреевичем не только роли квантовой механики в Природе, но и его попытка объяснить с ее помощью вечные загадки бытия...

4. **Книга Б. А. Гришанина «Квантовые случайные процессы»**, над которой Борис Андреевич работал до конца своей жизни. В ее основу лег курс его лекций по квантовым случайным процессам. Начальный вариант ее был издан в 1981 г. [Б. А. Гришанин, "Квантовая электродинамика для радиофизиков" (Изд-во МГУ, Москва, 1981)]. С тех пор эта книга была существенно расширена и планировалась к печати, но так и не была закончена и издана. Этой работе Борис Андреевич придавал очень большое значение, и поэтому мы решили опубликовать эту книгу в том виде, в каком ее оставил Борис Андреевич, «причесав» отдельные места рукописи.

5. **Список публикаций Б. А. Гришанина**, содержащий полный список его научных публикаций, который разделен на раздел книг и глав в книгах, а также статьи в реферируемых журналах. В него не вошли многочисленные тезисы докладов и труды конференций. К большей части ссылок даны аннотации публикаций, что позволяет более детально понять, какими проблемами науки интересовался и занимался Борис Андреевич.

6. **Подборка фотографий**, которые отражают разные моменты жизни Б. А. Гришанина.

Мы приносим искреннюю благодарность всем, что написал свои воспоминания о Борисе Андреевиче Гришанине или поделился ими с Ю.М.Романовским — В.И.Емельянову, В.А.Макарову, О.А.Чичигиной, Н.В.Нетребко, А.А.Гришанину, В. Ф.Пашутиной, А.Б.Успенскому, Д.Д.Мамаеву, Г.Е.Колосову, С.А.Крупенникову, А.Петросяну, А.С.Чиркину, Д.Н.Сычу, Ю.В.Владимировой и Д.В.Жданову.

Отдельно мы хотели бы поблагодарить Диму Жданова, бывшего аспиранта Б. А. Гришанина, который выполнил огромную работу по исправлению опечаток и неточностей в книге Б. А. Гришанина «Квантовые случайные процессы» (Часть IV), подготовке рисунков для публикации и оказал помощь в завершении статьи «Классическая механика в квантовой форме: почему природа "предпочла" квантовую механику?», а также Юлию Владимирову, также бывшую аспирантку Б. А. Гришанина, за ее огромную помощь в подготовке списка публикаций, работу с архивом и фотографиями, а также за продвижение рукописи книги в Издательстве МГУ.

Наконец, неоценимую помощь в подготовке рукописи и финансировании ее издания оказали Вера Филипповна Пашутина и Александр Борисович Успенский.

Спасибо Вам всем!

Москва,
июль 2011

В. Н. Задков
Ю. М. Романовский

Оглавление

Часть I Воспоминания о Борисе Гришанине **1**

Эпизоды из биографии Бориса Гришанина в воспоминаниях брата 3
А. А. Гришанин

Слово о Боре 7
В. Ф. Пашутина

Мемуары о Борисе Гришанине 11
А. Б. Успенский

Б. А. Гришанин: Некоторые даты и факты 21
Д. Д. Мамаев

Воспоминания Г. Е. Колосова 23
Г. Е. Колосов

Воспоминания С. А. Крупенникова 27
С. А. Крупенников

Воспоминания А. Петросяна 29
А. Петросян

О Борисе Гришанине 31
Ю. М. Романовский

Воспоминания А. С. Чиркина 35
А. С. Чиркин

Работать с Борисом Андреевичем было честью для меня . . 37
В. Н. Задков

Воспоминания Д. Н. Сыча 45
Д. Н. Сыч

Случайности в нашей жизни 51
Ю. В. Владимирова

Борис Андреевич — Учитель с большой буквы 53
Д. В. Жданов

Часть II *«Мои воспоминания о Руслане»*. Воспоминания Б. А. Гришанина о Руслане Стратоновиче **59**

Часть III Избранные работы Б. А. Гришанина **65**

Обобщённые квантовые измерения континуальных переменных 67
Б. А. Гришанин, В. Н. Задков
1 Введение 67
2 Преобразование континуального измерения канонического набора квантовых переменных 70
2.1 Супероператор частично разрушающего измерения 70
2.2 Количественные характеристики измерения 73
3 Шумы деквантования 75
4 Заключение 77
Список литературы 78

Информационный анализ квантового невозмущающего измерения фотона в резонаторе 79
Д. Н. Янышев, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков
1 Введение 79
2 Модель квантового невозмущающего измерения 81
3 Классический информационный анализ 84
3.1 Расчет условной вероятности события измерения 84
3.2 Учет квантовой эффективности детектора 86
4 Квантовый информационный анализ 87
4.1 Расчёт когерентной информации в системе резонатор–атом с учётом наличия холостового атомного уровня 87
4.2 Результаты расчёта когерентной информации . . . 88
5 Заключение 89
Список литературы 90

Классическая механика в квантовой форме: почему природа "предпочла" квантовую механику? 91
Б. А. Гришанин
1 Введение 91
2 Классическое пространство физических состояний 93
3 Операторное представление физических величин 97
4 Квантовая механика и природа движения 98
5 Заключение 101
Замечания 101
Список литературы 102

Квантовая физика как новый взгляд на вечные загадки бытия 103
Б. А. Гришанин
1 Введение 103
2 Квантовая теория для всех 104
3 Вселенная 107
4 Почему именно душа непознаваема, некопируема и бессмертна? 107
5 Что же такое душа с точки зрения физики? 108
6 Локальное физическое время и отдельная жизнь 109
7 Взаимодействие душ 109
8 Мир и единое пространство и время 110
9 Природа динамического характера мироздания 110
10 Загадка рождения 111
11 Старение, смерть и бессмертие 112
12 Новая жизнь и полное возрождение 113
13 Бог 113
14 Вопрос вместо заключения 114

Часть IV Книга Б. А. Гришанина «Квантовые случайные процессы» 115

1 Введение 117

2 Квантовая теория вероятностей — составная часть квантовой механики 119

2.1 Необходимость привлечения новых методов и представлений квантовой теории в задачах квантовой радиофизики 119
2.2 Представление логики физических событий 122
2.3 Представление случайных физических величин 124

2.4 Единообразное представление квантовой и классической динамики 127

3 Алгебра супероператоров и ее представления 131

3.1 Символическое представление супероператоров 131
3.2 Матричные представления 137

4 Важнейшие примеры супероператоров замкнутых квантовых систем 145

4.1 Двухуровневая система 145
4.2 Представление Вигнера 151
4.3 Представления, основанные на комплексных амплитудах 156

5 Открытые системы и квантовые случайные процессы . . 161

5.1 Определение открытой системы и квантового случайного процесса 161
5.2 Переходные супероператоры ОС 163
5.3 Представление взаимодействия 168

6 Марковские квантовые случайные процессы 171

6.1 Формальное определение квантового марковского случайного процесса 171
6.2 Многомоментные матрицы плотности 173
6.2.1 Немарковский случай 173
6.2.2 Марковский случай 174

7 Марковские открытые системы 179

7.1 Физические условия марковости 179
7.2 Процессы диффузионного и скачкообразного типа 183
7.3 Физический смысл квантового описания 187
7.4 Качественные особенности немарковской релаксации 188

8 Релаксация в системе квантовых линейных осцилляторов 191

8.1 Качественные особенности динамики 191
8.2 Расчет лиувиллиана 194
8.3 Одномерный случай 199

9 Теория релаксации двухуровневого атома 203

9.1 Общие соотношения 203
9.2 Зависимость релаксационного супероператора от спектральной плотности шумов 207
9.2.1 Случай одночастотной прецессии 209
9.2.2 Случай двухчастотной прецессии 212
9.3 Релаксация свободного двухуровневого атома 212
9.4 Супероператор фазовой релаксации 217
9.4.1 Марковская упругая дефазировка 218
9.4.2 Немарковская упругая дефазировка свободного ДА 221
9.5 Связь с теорией квантового измерения 223

10 Кинетика и флуоресценция двухуровневого атома 225

10.1 Общие соотношения для двухуровневого атома 225
10.2 Равновесное состояние ДА в лазерном поле 230
10.3 Энергетические потоки в системе атом – электромагнитное поле 234
10.4 Кинетика поляризации и населенностей 236
10.5 Спектр флуоресценции 240
10.5.1 Случай точного резонанса 242
10.5.2 Спектр флуоресценции двухуровневого атома в слабом лазерном поле 246
10.5.3 Спектральная структура Апанасевича-Моллоу . . 248

11 Эффекты преобразования упругой релаксации ДА сильным лазерным полем 253

11.1 Общие соотношения для параметров релаксационного супероператора 253
11.2 Спектры флуоресценции с учетом эффектов преобразования релаксации 257
11.3 Инверсия двухуровневого атома монохроматическим полем 260

12 Некоторые приложения к N-уровневому атому 265

12.1 Расчет лиувиллиана N-уровневого атома с использованием символического представления 265
12.2 Резонансные свойства Λ-систем 268

13 Квантовые флуктуации в квазиклассических системах . 273

13.1 Квазиклассический расчет обобщенного лиувиллиана . . . 273

13.2 Стохастические квантовые уравнения 274
13.3 Квантовые флуктуации электронов в ускорителях 277

14 Квантово-полевые открытые системы: релаксация и флуктуации фононных возбуждений 281

14.1 Специфика квантово-полевых ОС 281
14.2 Роль линейных и нелинейных процессов в фононной системе 282
14.3 Квазиклассичность затухания и теплосопротивления 285
14.4 Спектроскопические проявления фононного ангармонизма 286

15 Статистическое и динамическое описание процесса квантового измерения 291

15.1 Система объект–прибор и переходной супероператор квантового измерения 291
15.2 Динамическая модель неразрушающего квантового измерения 294

Приложения 301

П1 Возможное обобщение квантовых физических величин . . 301
П2 Ланжевеновский шум в ДА 303

Предметный указатель 304

Литература 305

Часть V Список публикаций Б. А. Гришанина 309

Часть VI Подборка фотографий из жизни Б. А. Гришанина 333

Часть I
Воспоминания о Борисе Гришанине

В этом разделе собраны воспоминания о Борисе Андреевиче Гришанине его брата, Анатолия Андреевича, друзей, однокурсников, коллег по работе и бывших учеников. Эти воспоминания ни в коей мере не претендуют ни на полное изложение биографии Бориса Андреевича, ни на описание его научных заслуг и достижений. Они — своего рода зарисовки и личные впечатления от общения с замечательным ученым и неординарным Человеком, таким как мы все его знали и каким он останется в нашей памяти.

Эпизоды из биографии Бориса Гришанина в воспоминаниях брата

А. А. Гришанин

22 часа, 23 июля 1941 г. Дзержинский рабочий поселок, близ Москвы. Потемневшее небо отсвечивает неяркими снопами прожекторных лучей. В их мерцании видны кучки людей, спешащих к бомбоубежищу. Шум шагов, шорох движений, негромкие голоса. Вдалеке-невдалеке к западу раздается залп зенитки, еще и еще ... Они сливаются в общий гул и под мерцание отраженного облачками света вся разреженная толпа скрывается в чрево подвала, скрытое за толстенной дверью, обитой железным листом.

В этом подвале и все семейство Гришаниных: родители и четверо детей (малыш на руках у матери). «Дуся! Забирай детей и уезжай к родителям!» — говорит отец [1]. «А может быть здесь остаться? Вместе сподруч-

Анатолий Андреевич Гришанин, брат Бориса Гришанина
Москва, Россия

[1] Гришанин Андрей Андреевич, родился 27.08.1905 г. в селе Пышлицы Коробовского района Московской области в крестьянской русской семье, каких было множество в тогдашней России; с 1919 г. плотничая, вначале подручным у отца, а затем и самостоятельно; в 1929 г. отборочной комиссией Мосстроя был послан в счет «1000» — через подготовительные курсы — на учебу в Московский архитектурный институт, который и закончил в 1935 г. с квалификацией «архитектор»; затем работал по проектированию зданий в Орле, возвращение в Подмосковье–Москву инженером-строителем, ну а далее — война с бесконечными переводами с одного объекта на другой до ноября 1944 г., когда с «Азовстальстроя» призывается в Действующую армию и направляется на 2-ой Белорусский фронт в должности «рядовой пулеметчик»; в 1945 г. интересный поворот в судьбе: присваивается офицерское звание и в технической должности служит в органах МГБ, МВД и Минобороны, «военная карьера» заканчивается в чине «инженер-капитана» на стройке в Дубне в 1956 г. — «хрушевское: третий лишний — вон из строя»; разнообразная гражданка, с 1965 г. — непоседливый пенсионер, но «беспощадное курево» завершает свое дело 18.12.1973 — рак легких; факт для размышления: никто из детей не пристал к табаку!

нее,» — то ли спрашивает, то ли возражает мать [2]. «Нет, здесь нельзя оставаться с мал-мала меньше! Уезжай!»

1–10 декабря 1941 г. Небольшая крестьянская изба в Большом Селе, построенная из дуба (!) руками деда в начале века. С большой русской печи выглядывают четыре детские любопытные головки: на полу и на лавках вповалку лежат красноармейцы в светлых овчинных полушубках. Сколько им спать — не знает никто. Может быть кто-то с лычками войдет и — команда как сирена! И топ-топ, без еды — обеда! Сунут мать и бабушка горячие картофелины и — в путь солдаты 10-й армии. Впереди, на западе, за Пронском (всего-то в 10-и километрах) части Гудермана, артиллерийская канонада, то редкая, то частая, то — наконец-то! — после десятого числа, совсем затихшая: погнали немца!

Утро 7 июня 1946 г. Невиданное дело: во двор, что за домом ь9 на Сретенке,въезжает легковушка, за рулем какой-то чужой дядя, а из нее вылезает — именно! — отец, спускается в подвал и возвращается с Борей. Они забираются в машину и — тю-тю — в Пышлицы. И, пока машина не скрылась в подворотне, все трое — Володя, Рая, Толя — смотрели завистливо-радостными глазами ей вслед. Ну а Боре эта поездка будет снится не один раз! А сколько рассказов впереди?!

Август 1947 г. Школа ь 239, что в низине Колокольникова переулка. Кабинет директора: директор, завуч, Андрей Андреевич Гришанин и Боря, какой-то притихший, испуганный: в школу не берут — родился 9-го сентября, а берут тех, кто родился до первого.

«Вы посмотрите, какой он вымазал: читать, писать умеет... его же брат, Ваш ученик, научил! — нервно говорит отец — Смотрите какой большой... у нас, в подвале, в комнате не то, что лечь, сесть негде всем шестерым, а он будет под ногами лишний раз толкаться!»

Вроде как и невпопад последнее — но эффект поразительный: директор с завучем переглядываются. «Ну, ладно, Вы же — фронтовик, и условия у Вас стесненные — для Вас сделаем исключение! Собирайся, Боря Гришанин, в первый класс!» Ура! — написано на физиономии Бори.

1956–1957 гг. Возвращаюсь как-то домой (это уже в Лоси, в двухкомнатной квартире) и вижу: сидит Борис за столом, а у него под ногами рулон серо-белой бумаги (для оклейки стен под обои), верхний конец ко-

---

[2] Хорина Евдокия Егоровна, родилась 14.03.1905 в Большом Селе Пронского района Рязанской области в такой же — как и суженый — крестьянской семье; когда началась индустриализация родители настояли на ее переезде в Москву; когда познакомилась с отцом — работала наборщицей в типографии; из эвакуации вернулась в 1943 г. — надо было учить детей (да и негоже сидеть со всей оравой на шее родителей — только трехлетний Боря остался у дедушки с бабушкой); вернуться ей, добровольно уехавшей, можно было только одним способом: устроиться дворником с получением комнаты в подвале; в 1946 году семья полностью воссоединилась, а в 1949-м переехала в городок Метростроя (вошедший в 1961-ом в состав Москвы) в двухкомнатную квартиру (счастье, да и только!) — жизнь наладилась: домохозяйство было в надежных руках; но, по-видимому, полуголодные условия 1941–1947 гг. сделали свое дело, 02.07.65 — рак желудка.

торой лежит перед ним, весь исписанный формулами. Исписанным впоследствие оказался не только этот рулон, но и еще несколько таких же (сколько — не знаю, но они, к окончанию школы, лежали горкой на подоконнике).

Забавный эпизод применения этих формул к житейско-юношескому любопытству: как-то в квартиру забежал молодой рыжий симпатичный кот, и Борис, приютивши его, решил вывести формулу роста достижений кота в прыжках в высоту за счет кормления рыбой (высота ежедневно подрастала). Увы, формулы не получилось: кот, по неизвестной причине, вскорости убежал.

Лето 1957 г. Золотая медаль. Поступление на физфак МГУ и необъятные горизонты науки. Правда, не единой наукой жив был Борис! В частности, увлечение велосипедом подвигнуло его (вместе со школьным другом Геннадием Балакиным) отправился в путешествие по строившемуся Большому Рязанскому кольцу, охватывающему практически всю область. Естественно с заездом в Большое Село. Бабушка и дедушка уже умерли, но они и изба, в которой он провел первые годы детства, всегда были в памяти и в сердце.

Январь 1974 г. Конец сессии — свобода не только студентам, но и преподавателям. Самое время покататься где-нибудь на лыжах, отдохнуть в доме отдыха — время романтических знакомств: 33 года — пора, пора! И сердце холостого мужчины дрогнуло: он делает предложение Марине — симпатичной армянке. Но предварительно он обращается к старшему брату, Володе, за благословением: ведь и армянская церковь — православная. И как все хорошо складывается в семье: рождение дочери, взаимная симпатия, добрые отношения... Увы, в начале 80-х семья рушится.

Июль 1983 г. Увлечения спортом у Бориса были самыми разнообразными: велосипед, шахматы, теннис, яхта ... Однажды мы с Борисом пересеклись на отдыхе, на верхневолжком озере Пено. Он предложил покататься с ним под парусом. Погода была не очень — озеро волновалось — и я получил полное представление, чем занимается спортивный яхтсмен в это время! Очень впечатлило!

Раннее утро 7 июня 1987 г. Овраг у Большого Села. Палатка с «Жигулями». Перед входом в палатку, за столиком, сидит Борис и долго-долго всматривается в убегающий вдаль ковер незабудок, день-другой как появившийся на террасе оврага. Братья ушли в лес, по грибы. Ни души. Вчера вновь искали могилу дедушки и бабушки — никаких следов...

Возвращаются братья с первыми белыми грибами, желтопузиками — по местному наименованию — с Борис сразу же (заядлый турист!) принимается за их приготовление: деликатес, однако!

6 июня 1991 г. Река Угра, место впадения Рессы. Двое азартных — Володя и Борис — соревнуются в ловле рыбы (да, да, соревнуются!). То и дело меняют места, результат одинаковый — нулевой. Хотя рыба там

и водится, и неплохая (рассказал местный житель). Процесс идет долго, пока не появляется третий брат с деревенским парным молоком.

Шахматы как связующий элемент общения. Удивительно, но именно шахматы соединили братьев в трио. Начиная где-то с середины 80-х проходили регулярные блиц-турниры во время встреч трех (Володе, игравшему послабее, давали 15 минут вместо положенных 4–5-и). Увлечение было юмористически-азартным: мы даже подарили Володе шахматный столик, но его, обомлевшая от такого подарка супруга, в конце концов, переправила столик Борису — там мы чаще всего и встречались (а в поездки на природу обязательно брали комплект шахмат и шахматные часы; один из таких выездных эпизодов и запечатлен на фото, к которому не требуется комментариев: все написано на лицах).

На таких встречах обсуждались любые темы, прежде всего (и в основном), текущие политические. Но вот что любопытно — не обсуждались научные: видимо, физики-теоретики снисходительно-пренебрежительно относятся к теоретической закваске прочих?!

А время-то какое?! Перестройка, слом СССР, демократы, коммунисты и —самое опасное — мозги набекрень. Слава Богу, что не-доперестроились до Гражданской.

5 мая 2006 г. С Борисом приехали навестить тяжело болевшего Володю. Таня, его жена, приготовила, как обычно, превосходный стол. Володя повеселел, к вину он не притрагивался, но был в приподнятом настроении, как и все (хоть и Борис к вину также не притронулся).

Возвращались с Борисом в мажорной тональности. Вышли из метро специально на противоположной дому Бориса стороне улицы, чтобы прогуляться: великолепная погода, отличное настроение. Да и обсуждавшаяся тема сильно волновала Бориса.

Дело в том, что он очень переживал за обороноспособность России. А из какой-то прессы почерпнул, что у нас осталось всего триста ядерных боезарядов. Я его разуверял, приводя данные из разных и всем доступных газет, что у нас примерно четыре тысячи против американских пяти с половиной. Он упорно не хотел верить, но потом согласился. (И уже дома он сразу расскажет Вере Филипповне, что у нас не триста ядерных боезарядов, а целых четыре тысячи; и нет страха за Россию никакого! Действительно, нет страха, но Вера Филипповна уже испытывала неосознанный страх за Бориса, избегавшего врачей, но поддерживала — как могла — общий радостный настрой).

Вдруг Борис засуетился, не говоря ни слова, не объясняя ничего, направился к дому напрямую через широкую (по три полосы в каждом направлении) Енисейскую улицу, наперерез (до сих пор не понимаю как они нас не сбили).

Поднялись на лифте на его этаж, где и расстались...

Как оказалось, это был финал наших свободных общений — общений, не отягощенных никакими болезненными условиями, а самое главное — больничными.

Слово о Боре

В. Ф. Пашутина

С Борисом Андреевичем мы познакомились 9 сентября 1969 г. Я ехала в автобусе домой в Лось и читала журнал «Наш современник».

Он вошел, оглянулся, подсел ко мне и тоже стал читать мой журнал. Через пару дней он привел меня на ближайший теннисный корт.

С тех пор началась наша теннисная эпопея, которая, впрочем, часто прерывалась и довольно надолго (он «уходил» в науку).

Это был интересный человек, глубокий, содержательный, задумчивый, независимый. Увлекался всем и всеми, но, дойдя до какого-то момента, терял интерес, говорил, что это уже понятно, поэтому и не интересно.

Он обладал сильной памятью, помнил все, что «проходил» в школе (это его выражение) и др. Я думаю, это от того, что глубоко погружался в предмет.

С самых молодых лет Борис воспитывал в себе силу воли, закалял характер. Он рассказывал, что ночью ходил на кладбище, иногда оставался там до утра. Научился даже терпеть любую физическую боль. Это ему пригодилось в конце жизни, когда пришлось терпеть ужасную, я думаю, боль, а он отказался от обезболивающих уколов, а затем и от еды.

Борис во всем стремился к совершенству, казалось его девизом было «нет предела совершенству». Ждал он этого и от других. А к зарабатыванию «больших» денег был ленив, равнодушен. Не имел лишних вещей и был этим доволен.

Был он также человеком романтичным и мечтательным. Мечтал встретить во всем совершенную девушку, но, думаю, понимая, что такого быть не может, радовался втайне, что жениться не придется вовсе. Но. . . время идет, все его друзья женились. Тяжело болен отец, но пока не лежащий больной (Борис жил с ним вдвоем).

Вера Филипповна Пашутина, верная спутница жизни с 1983 по 2006 г., единомышленник Б.А.Гришанина
Москва, Россия

Характер Бориса становится мягче, гибче, терпимее.

В этот же период он понял, что полюбил и готов жениться, но судьба распорядилась иначе. В ноябре 1973 г. они расстаются.

Отцу все хуже, в декабре того же года он умирает (тяжело и мучительно). Борис за ним ухаживал.

Душевное состояние Бори в то время было не из легких.

В январе 1974 г. он решает отдохнуть, едет в дом отдыха.

Там знакомится с девушкой, студенткой Иняза и быстро решает жениться. Но счастье оказалось недолгим. Похоже, «не созрел» он еще на такой «подвиг».

В конце января 1983 г. он уходит из семьи и снова живет в своей квартире в Лоси. Тем летом 83 г. мы со своими дочками на Бориной машине несколько раз ездили в лес в окрестностях «Черноголовки», на целый день. Разогревали на костре еду, которую Боря заботливо заранее готовил дома. После обеда девочки спали в палатке. Боря в ту пору был почти счастлив.

Через год отношения с семьей прекращаются совсем, а еще через 11 лет возобновляются только с потомством (сначала с Катей, потом с внуком).

Бывшая супруга давно живет в Англии.

Подробнее на эту тему не стоит распространяться, т.к. личная жизнь кажого человека — это и есть личное. Тем более, что те 8,5 лет своей жизни Борис давно плотно «закрыл».

Кстати, Боря очень негативно относился к тем «писателям», которые копошились в личной жизни выдающихся людей, давно ушедших из жизни.

Боря снова стал много играть в теннис. Постепенно достиг значительных успехов. Даже написал интересную и очень грамотную статью на эту тему. Не уставал в стремлении совершенства в этом виде спорта.

Перестройка выбила его из «колеи», как-будто оцарапала ему сердце. Он вникал во все, понимал, что происходит, понимал, для чего нужна «перестройка», которую вообще-то ждал, но оказалось все обманом, подменой.

Он становится часто угрюмым. Наука уходит на второй план. В то время, когда в стране все валится «к чертям собачьим» (характерное для Бори выражение), он считал и не достойным и не нужным, не важным заниматься такой мелочью, как защита докторской диссертации и т.д., и тому подобное.

Его мощный интеллект мог сам (без помощи газетных «уток») разобраться, где правда, где ложь. А как лесной источник–ключ «бьет из-под земли» — и все о себе знает: откуда он, из какой глубины, из каких химических элементов состоит? И вовсе не одиноко ему в лесу одному. Он наполнен смыслом, мудростью, знанием. Раздает свою воду бесплатно и радостно всем желающим.

Пропадает интерес к друзьям, которых он всех считает либералами, а значит так или не иначе работающими на разрушение страны, его любимой Родины.

Обнаруживается, что у него с друзьями разная духовная наполненность. Как будто линии жизни выпрямились и стали параллельными, не пересекающимися. Он предпочитает бывать там, где «русский дух, где Русью пахнет».

Чтил в людях бескорыстие.

Теплые отношения у Бори остаются с Михаилом Смирновым, давним приятелем. Им было хорошо вместе и молча. Чаще всего где-нибудь в «глубинке» на берегу реки, в палатке или у Миши на даче.

Довольно часто общался он с Геннадием Колосовым. Спорили, ссорились, но Гена все прощал.

С Мишей тоже ссорились, правильнее сказать препирались, но как то весело. Было смешно на это смотреть. Боря нападал дружелюбно, а тот ухмылялся добродушно и говорил: «Ну ты, Боб, даешь!» На фото, гле они сидят на берегу реки в тельняшках, как два «подберезовика», видно это их благодушие.

При всем этом Боря очень любил жизнь. Любил бывать на природе, в деревне, ночевать на стоге сена, ловить рыбу. Любил простую пищу: квашеную капусту, соленые огурцы, грибы, картошку и т.д. Все это он неизменно покупал только у русских бабушек.

Боря любил готовить и долго беседовать за ужином (с рюмкой хорошей водки). Особенно хорошо готовил на костре где-нибудь в лесу, например, под Вышним Волочком. Удивляет, как ловко, уверенно и быстро получалось у него сложить шалаш из еловых веток, как он ловко там работал топором, разводил костер (даже после дождя) и т.д.

Выезжая за границу на конференции, тщательно готовился, чрезвычайно ответственно относился к своим научным выступлениям. В молодые годы очень стремился к таким выездам. Но теперь скоро разочаровался.

Не находил там того национального стиля, который желал видеть и который по его представлениям должен присутствовать в каждой нации. Так же как огорчало его «вымывание» русского стиля в своей стране.

Хотелось бы отметить его необыкновенный музыкальный слух. Безошибочно чувствовал малейшую фальшь в исполнении музыканта или певца.

Любил петь, но не умел.

Имел большую коллекцию пластинок, кажется была вся мировая классика. Особенно почитал Г.Свиридова.

Не расставался с небольшим томиком стихов Пушкина.

Детей Боря любил. но играл с ними как-то неловко, суетливо, поэтому предпочитал быстренько перейти на шашки или карты. Там все понятно, что нужно делать.

Мы много читали с Борей, чаще вслух. Он любил слушать, лежа на диване на спине. Читали В.Шукшина, Валентина Распутина, В.Кожинова, Ал.Панарина и др. И, конечно, обсуждали.

Человек он замечательный. Таких немного.

Тяжело терять таких людей. Утешает одно, что с таким достойным человеком довелось пройти значительную часть жизни.

Незадолго до конца Боря говорил, что много нагрешил в этой жизни, что главное о чем мечтал — все сбылось, произошло, главным образом в науке.

Все, сказал, внутри, стало некогерентно. Выводил формулы своего состояния. Никогда себе не изменил, своей, я бы сказала, своей Программе, которую хорошо чувствовал.

Достойно жить — достойно умереть. Он так часто говорил. Все так и было.

За неделю-две до своей кончины (когда он все понял и **принял** это) лицо его стало каким-то особенно красивым, величавым, что-ли, просветленным. И весь он походил на старца.

Спросила (совсем перед концом) дать ли воды. Мотнул головой в знак согласия. Пить не стал, но смочил губы. Ему было **очень важно**, что б было кому воды подать.

Мемуары о Борисе Гришанине

А. Б. Успенский

В 2007 г., в сентябре должно было исполниться 50 лет моего знакомства и дружбы с Борисом Гришаниным. Во время учения на физфаке в 1957–1963 гг. наше общение с Борисом было систематическим, но затем оно стало более редким, хотя и оставалось регулярным. Бывали длительные периоды, когда мы не виделись по полгода и больше (особенно в 90-ые годы) но в 60-х–80-х годах и после 2000 — встречались регулярно. Может быть поэтому воспоминания о Борисе носят фрагментарный характер, хотя его образ, манера общаться, отдельные привычки — у меня в памяти. Воспоминания фрагментарны, хотя образ — цельный. Похоже, мы нуждались в общении друг с другом, Борису и мне было очень важно знать мнение друг друга о самых разных вещах.

После краткого вступления перехожу непосредственно к воспоминаниям. Познакомился с Борисом в сентябре–октябре 1957 года на физфаке. Попали в одну группу с повышенным знанием английского языка. В группе было несколько юношей и девушек с высокой самооценкой (медалисты, участники олимпиад); назову Толю Ведяева, Колю Кабачника, Рафика Амбарцумяна, Володю Тункина, автора этих строк, Риту Наумкину, рано ушедшую Наташу Подвидз, и др. Сведенные по воле случая вместе (повышенное знание английского было, за малым исключением, сильно преувеличено), мы стали слегка конкурировать друг с другом. Но семинарские занятия по общей физике (преподаватель Керженцев В.В.) и математическому анализу (преп. Дубровский , инициалы не помню, Моденов П.С.) очень скоро выявили настоящего лидера, по крайней мере, по физике — Бориса Гришанина. Это, впрочем, сочеталось с удивительной скромностью Бориса и нежеланием его как-то выделяться. К концу первого семестра мы были хорошими друзьями. Начиная с первых курсов, Борис не очень регулярно посещал семинарские занятия и лекции по общей физике, мат.анализу, что, вообще говоря, не поощрялось и,

А.Б.Успенский, д. ф.–м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ
НИИЦ "Планета Москва, Россия, e-mail: abusp@mail.ru

возможно, потом повлияло на распределение по кафедрам (Борис хотел распределиться на одну из кафедр теор.физики, но попал на кафедру распространения радиоволн, хотя с формальной точки зрения — успеваемости у него были все основания). Вспоминаю, что как-то в разговоре с Борисом и обсуждении задачки по физике я с удивлением узнал, что Борис уже к началу обучения на физфаке самостоятельно проработал курс математического анализа (в объеме 2-х томов Фихтенгольца) и вполне свободно применял аппарат математического анализа для решения математических и физических задач. Вообще, в понимании общей физики — механики и последующих разделов — у Бориса не было проблем. Другое дело, что часто он просто скучал на семинарских занятиях, хотя никогда не подчеркивал свои глубокие познания и с готовностью помогал менее просвещенным одногруппникам.

Довольно рано (сужу по себе) у нас произошло неформальное деление по признаку — будущий экспериментатор или склонный к теории. С самого начала знакомства с Борисом, я оценил его универсализм и и то, что ему одинаково легко давались занятия экспериментальной и теоретической физикой. К примеру, для него, в отличие от меня и других, оказались очень простыми задачи, которые мы должны были выполнять в физпрактикуме (с 1 по 4 курс). При этом сама экспериментальная работа не вызывала у него большого энтузиазма, хотя он многое умел делать руками. Гораздо больший интерес у Бориса вызывали с первых курсов фундаментальные проблемы физики (природа пространства–времени, «стрела времени» — в более поздней терминологии, бывшие тогда на слуху работы астронома Козырева и т.п.).

С первых лет знакомства и общения с Борисом меня также привлекал его интерес к мировоззренческим, философским вопросам. Может быть не сразу, но после пары лет общения, мы с Борисом довольно часто и длительно обсуждали проблемы религии, веры и Бога. Насколько помню, оба начинали как стихийные агностики, но Борис непрерывно эволюционировал... Несмотря на достаточно скептическое отношение к тогдашней церкви и традиционному православию, где-то в середине 70-х годов Борис сообщил мне, что намерен креститься и собирается специально ехать в Загорск (Сергиев Посад). Разумеется, при этом он не побуждал меня присоединиться, считая указанное сугубо личным делом. В последующем, в середине 90-ых годов, Борис даже написал ряд текстов на тему православной церкви, веры, которые давал мне для прочтения и обсуждения. Здесь я не могу хотя бы кратко пересказать наши дискуссии, но отмечу, что полного согласия меж нами не было. Не буду продолжать эту тему, а ограничусь одним забавным эпизодом, который иллюстрирует интерес Б к философским, мировоззренческим вопросам. Где то в 1958–59 гг мы одновременно узнали об индийской философии, йоге, теософии — тогда это по-видимому начали обсуждать в обществе — и решили ознакомиться со всем этим более детально. Пошли в Ленинскую библиотеку, где по каталогу нашли и заказали сочинения, по моему, Ра-

мачараки (что-то про Раджу- или Хатху-йогу, издание начала 20-го века) и Е.П.Блаватской (Тайная доктрина или что-то еще — не помню). Долго препирались с библиотекарем, поскольку к этим изданиям тогда был ограниченный доступ, но в конце концов обрели желаемое и пару дней ходили и усердно читали. Потом, не сговариваясь, одновременно решили бросить это занятие и на протяжении некоторого последующего периода, время от времени корили друг друга за бессмысленно потраченное время.

Гораздо позднее, в конце 80-х годов, когда уже вовсю бушевала перестройка, наш интерес к «натурфилосовии» проявился в организации совместно с приятелями-сокурсниками специального семинара для обсуждения последних достижений и тенденций в науке (и не только в ней). Костяк семинара: Борис; автор мемуара; Валерий Федоров — Лаборатория статистических методов МГУ, Институт Системных Исследований; Иосиф Зубарев — ФИАН; Александр Самохин — ИОФАН. Собирались обычно на квартире Валерия Федорова (по причине ее размеров и удобного расположения) не чаще одного раза в 2–3 недели. Наиболее запомнились сообщения Валерия о вероятностной природе языка и «нечетких множеств», а также Бориса — о квантовых вычислениях. Заседания семинара заканчивались застольем и спорами, иногда достаточно яростными, но не по вопросам науки, а по тогдашним реалиям. Жаль, что после 3–4-х заседаний семинар сошел не нет, хотя тем для обсуждения было достаточно. . .

Нужно отметить, что Борис всегда ценил свое и чужое время, в чем я ему искренне завидовал, и с годами это качество только усугублялось. В подтверждение приведу один пример: Борис, как известно его приятелям, был очень приличным шахматистом — первый разряд или кандидат в мастера — но уже с младших курсов он избегал участвовать в соревнованиях на уровне факультета или межфакультетских, хотя регулярно играл с сокурсниками. Тогда же он признался мне, что очень жалеет о большой трате времени на шахматы в старших классах школы. Хотя, отчасти он вынужден был этим заниматься, поскольку жизнь его в материальном плане была нелегкая, а поездки на тренировочные сборы, соревнования оплачивались и помогали ему.

Отдельного комментария заслуживают спортивные достижения Бориса. Помимо шахмат, он успешно занимался лыжами (беговыми, а затем горными), велосипедом, теннисом. С большим удовольствием вспоминаю наши прогулки по лесопарку «Лосиный остров» в конце 50-тых – 60-тых гг. Борис жил в ближнем Подмосковье (станция Лось), окна его дома смотрели прямо на лесопарк и я (один или с компанией) приезжал к нему, часто с ночевкой. МКАДа еще не было, каждый раз это было довольно длинное путешествие, включая 25 мин. на электричке. Катались 2–3 часа на лыжах, затем что-то покупали в магазине и готовили пищу, очень умеренно выпивали, закусывали. После чего обычно беседовали и спорили на разные темы. Это была замечательная отдушина

— особенно перед зачетами и зимними экзаменами. Хочу отметить свою причастность к тому, что Б стал заядлым и почти профессиональным велосипедистом. В течение 2-го – 4-го курсов я занимался в велосипедной секции МГУ, особых успехов не достиг, но познакомился с замечательным преподавателем–энтузиастом Н.Д.Синани. Уже после прекращения моих занятий в секции я как-то обмолвился в разговоре с Борисом о секции и о ее замечательном руководителе. Борис заинтересовался и решил на пробу сходить на занятия. Это так затянуло его, что в последующие годы Борис стал постоянным членом секции, участвовал в занятиях, соревнованиях–гонках. Более того, через некоторое время ему, как полезному члену команды, был выдан в пользование гоночный велосипед итальянского производства, вместо изделия ХВЗ, на котором ездили я и другие ординарные члены секции. После 2000 г. Борис практически не слезал с велосипеда: он регулярно ездил на велосипеде в Пирогово, на ВДНХ и на окрестные теннисные корты. Неоднократно заманивал меня прокатиться с ним в эти места с условием предоставления велосипеда.

О теннисе: начал он регулярно заниматься большим теннисом, по-видимому, в начале 70-х годов. Помню, что пытался вовлечь в это дело и меня — мы с женой К. (которая очень любила Бориса и выделяла его из моих физфаковских приятелей) регулярно приезжали к нему домой в Лось, а затем перебирались в Лосинку (ст. Лосиноостровская), где было два корта со свободным доступом. К. немного играла в теннис, я был полный профан и новичок (к тому же, как оказалось, малоспособный), но Борис не жалел усилий, чтобы подучить меня, выполняя утомительную роль партнера. Из этого ничего не вышло, Борис скоро превзошел нас всех и теннис занял очень заметное место в его последующей жизни.

Упомяну еще о более поздних спортивных занятиях Бориса. В середине 90-х годов я, с немалыми усилиями, освоил катание на парусной доске (виндсерфинг) и агитировал приятелей заняться тем же. В один из летних дней ко мне заехал Борис и я продемонстрировал ему свое искусство. Несколько раз он упражнялся, а затем уверенно встал на доску. Такой прогресс произвел на меня большое впечатление, что я объяснял отчасти его многолетним опытом управления швертботом. На этом плавсредстве польского производства мы вместе с Борисом неоднократно плавали по подмосковным водоемам и один раз чуть не утонули на озере Пено (истоки Волги) во время очень сильного ветра. Характеризуя в целом спортивную компоненту в жизни Бориса, отмечу, что главным для него было достижение максимального результата, сравнимого с уровнем профессионального спортсмена. Также присутствовала определенная «спортивная злость». При этом, насколько помню, он оставался довольно равнодушным к официальным соревнованиям профессионального спорта — футболу, хоккею и др.

Образ жизни Бориса, его способ существования, особенно в теплое время года, неразрывно связаны в моей памяти с многочисленными поездками, путешествиями по Подмосковью и более далеким местам. Во

многих таких путешествиях принимал участие и я. Ездили для осмотра церквей и «памятников архитектуры» по всему Подмосковью, включая Загорск и более далекие места — Коломну, Зарайск, Можайск и другие, а также на рыбалку, за грибами, для испытаний в «натурных условиях» швертбота. Вообще, Загорск был достаточно традиционным местом, куда мы регулярно ездили, ради посещения монастыря и прогулок по окрестностям, которые Б хорошо знал.

Обо всех поездках не напишешь, но о некоторых хочется вспомнить. Одно из первых совместных дальних путешествий – вчетвером (Борис со своей знакомой и я с К) в Армению (Ереван и окрестности) на майские праздники в 1970 г. Приехали в Ереван вечером и остановились в маленькой однокомнатной квартире на самой окраине, принадлежавшей какой-то знакомой приятельнице Бориса. На следующий день, гуляя по Еревану, посетили традиционные туристические места (Матенадаран, выставка картин Сарьяна и др.). В ходе прогулки случайно разговорились с местным жителем, который представился архитектором и зазвал нас к себе в гости. Жил он в самом центре Еревана на площади Туманяна. Здесь нам было явлено большое богатство и влиятельность хозяина — квартира была на первом этаже, но он пробил люк в подвал, где установил биллиард. Кроме того, поздно вечером специальный человек был послан в расположенную рядом гостиницу «Армения», откуда принес для нас бутылку марочного коньяка «Двин», очень дорогого по тогдашним меркам. Хозяин уговаривал остаться переночевать, но наши дамы были несколько напуганы таким гостеприимством и мы поздним вечером вернулись в наше однокомнатное жилище. На другой день наш новый и как оказалось действительно добрый приятель предоставил нам газик с водителем, и мы поехали в Эчмиадзин, Звартноц, Гарни. В этот день отмечалась Пасха, и снаружи Эчмиадзинского Собора было торжественное шествие Католикоса (верховный религиозный глава всех армян), а внутри проходили праздничные службы. Бориса и всех нас поразила чрезмерная «светскость» мероприятия, а также некоторые восточные аллюзии. Впереди шествия перед Католикосом, пятясь спиной, двигался фотограф, охрана раздвигала смыкающуюся толпу, стоял большой шум, за собором после окончания шествия готовились к жертвоприношениям (зарезать несколько барашков). Внутри храма также многое было для нас необычно. Во-первых, не один алтарь, а несколько. Во-вторых, внутренность собора напоминала рынок — бегали и шумели дети, люди группами что-то активно и громко обсуждали, в то время как в одном углу вблизи алтаря церковные песнопения исполняла знаменитая оперная певица Гоар Гаспарян. Несмотря на хорошую акустику Собора, в нескольких шагах от алтаря пение певицы подавлялось гулом и шумом. Довольно сильное впечатление на нас произвели Гарни (древний город и храмы вблизи Еревана), многочисленные хачкары у дороги (каменные стелы с вырезанными изображениями креста), а также поездка на озеро Севан, куда мы уже отправились самостоятельно. Поездка на Севан заняла полтора

дня, на ночь остановились в гостинице «Ахтамар», довольно пафосной по архитектурному замыслу, но жутко неухоженной и грязной. Полночи оборонялись от горячих юношей, непременно хотевших попасть в наши номера — пришлось заблокировать двери ножкой ступа. На обратном пути выкупались в озере Севан и осмотрели замечательный храм постройки 7-го века (на небольшой горке, покрытой травой и кустарником). В этом храме впервые узнали о традиции верующих армян вешать на ближайшие к храму деревья и кустарники, а также внутри храма маленькие разноцветные тряпочки.

Вторая новелла — об одной поездке (летом 1969 г.) с целью рыбалки и охоты на Десну (приток Днепра, место в окрестности смыкания Калужской, Брянской и Смоленской областей). Замечательная речка с довольно быстрым течением (действительно «зачарованная» Десна), заливными лугами на одном берегу и светлым, «праздничным» лесом — на другом. Большое село (центральная усадьба колхоза), куда мы заехали за хлебом и др. продуктами (кроме хлеба и консервов в лавке ничего не было), а также купили 2 одноствольных ружья по 25 р. штука (без предъявления охотничьих билетов). Грязь, полуразрушенные строения, ругань (бригадир сгонял колхозников на сенокос). После сделанных закупок на попутке и пешком добрались до места стоянки собственно на берегу Десны в 15 км. от усадьбы. Под руководством Б. построили шалаш, где и жили 2 недели. Совместная «борьба за существование» на берегу Десны еще раз показала многогранность натуры Бориса — он мог быть и, когда требовалось, был настоящим «лесным» человеком, приспособленным к жизни на природе. Большой мастер разведения костров, готовки «супа из топора», добытчик съестного. К примеру, идешь с ним по тропинке или редколесью, разговариваешь, вдруг Борис резко кидается вбок и, несмотря на большую близорукость, достает очередной подосиновик или вытаскивает какой-то трубчатый стебель, который тут же обламывает и предлагает пожевать (уверяя, что это не цикута). Много раз я просил Бориса поделиться секретом приобретения таких способностей, но он уверял, что сам не понимает, как у него получается. Однажды он, правда, признался, что научился многому в раннем детстве — в период войны и какое-то время после жил в деревне в Рязанской области. Наши общие впечатления от поездки — сочетание замечательной природы с огромной неустроенностью сельской жизни, людской бедностью, какой-то безысходностью бытия.

Еще одна поездка, о которой сохранились разнообразные впечатления — вдвоем с Борисом на машине «Запорожец» по маршруту Москва–Торжок–Великие Луки–Торопец–Витебск–Москва. Борис только что получил права (после нескольких неудачных попыток) и мы двинулись, используя в качестве путеводителя одну из книжечек известной «желтой» серии (очень неплохие краткие описания исторических достопримечательностей разных мест Союза). Из бытовых деталей — в начале поездки выяснилось, что течет масло, поэтому через каждые 2 часа Бо-

рис глушил двигатель и доливал масло. Кроме того, ехали не только по асфальту, но и по грейдеру, а также по проселочным дорогам (на пути из Торопца). Под вечер на такой грунтовой дороге попали под сильнейший ливень, хотели проехать большую лужу, прочно застряли, мотор заглох, вода проникла в кабину и затопила дно на несколько сантиметров. Разделись и попытались руками вытолкнуть автомобиль из лужи, но безуспешно. Местность вокруг безрадостная, чахлые березки на заболоченной земле, дело идет к вечеру, дорога, судя по отсутствию следов, используется крайне редко. Совсем приуныли, сидя на кочке, но вдруг услышали шум — показался трактор с прицепом. Подвыпивший тракторист отнесся к нам с участием — помог вытащить машину, объяснил, куда двигаться дальше, чтобы не попасть в еще большие грязи, и напоследок подивился, зачем нас вообще понесло в такую дыру. Мы пересидели ночь на сухом месте, а утром машина просохла, чудесным образом завелась и мы двинулись дальше на запад (в Витебск). Из «культурологических» впечатлений — понравился Витебск (на реке Западная Двина). Очень чистый, хорошо спланированный и компактно расположенный (несмотря на тысячелетнюю историю). Весьма доброжелательные жители, объяснявшие дорогу к основным достопримечательностям.

За недостатком места не буду останавливаться на других путешествиях. Борис по натуре был человек, привязанный к своему дому. Его, например, невозможно было уговорить остаться переночевать у нас дома ввиду позднего времени или других причин. Одновременно с этим Борис был очень легок на подъем, а по весне его обычно одолевала «охота к перемене мест». Как правило, в мае-июне мы созванивались и договаривались о поездке в августе. Эта традиция была нарушена мною в середине 90-х годов из-за болезней и прочих обстоятельств. Хотели ее возобновить в 2000-ных, но увы...

Из моих писаний может создаться представление о Борисе, только как о путешественнике, спортсмене и вообще добром малом. Эти грани характера и образа жизни действительно присутствовали, но главное в его жизни, разумеется, наука. Мне трудно на профессиональном уровне (ввиду отсутствия «научных» пересечений) дать оценку его главных научных результатов и достижений, так что я ограничусь общими и, м. б., несколько поверхностными замечаниями. Прежде всего, на мой взгляд, Борис являлся крупным ученым, и его преждевременная кончина — серьезная утрата для российской и мировой науки. Отсутствие формальных регалий и недооценка его как ученого, достаточно скромная карьера вызваны только субъективными причинами. Одной из таких причин было органическое неприятие всяких «общественных» дел и мероприятий. Подача заявлений, прошений, подготовка официальных бумаг со студенческих лет были для него мукой и обузой. Удивительно, что это сочеталось с большой внутренней свободой. Несмотря на возможную недооценку его работ, Борис знал себе цену как ученому. Отмечу достойное подражания отношение Бориса к исследованиям известных отечественных и зарубеж-

ных коллег по его предметной области — с должным вниманием и уважением, но без чрезмерного пиетета. Замечательной чертой Бориса было желание разобраться с «фундаментом» и аппаратом современной теоретической физики. Еще в студенческие годы он сетовал на отсутствие строгих, но доступно изложенных и логических непротиворечивых учебников по квантовой механике/электродинамике. В конце 1981 г. Борис подарил мне собственную книжку по этой тематике «Квантовая электродинамика для радиоинженеров»[1]. На мой дурацкий вопрос, существует ли КЭ для рыбаков/лесников, Борис посоветовал мне сначала прочесть, а уж потом задавать всякие интересные вопросы. Я уже отмечал, что, обладая глубоким «физическим» мышлением, Борис очень хорошо владел математическим аппаратом. На его письменном столе с давних пор лежали собственноручно составленные большие таблицы с результатами собственных выкладок, полезными формулами и т.п. С большим энтузиазмом отнесся Борис к появлению персональных компьютеров, очень быстро освоил премудрости IT, в результате чего ПК (а дома ноутбук) стали основным рабочим инструментом Бориса, как ученого.

Еще несколько слов об отношении Бориса к зарубежной науке. В этот же период он стал ездить в зарубежные командировки (Германия и др.), активно участвовать в Международных конференциях. Меня несколько удивляло и вызывало уважение то, с какой тщательностью Борис готовил материалы (доклады) для конференций. На вопрос о полезности и важности зарубежных командировок и сотрудничества с зарубежными коллегами для его работ Борис отвечал неоднозначно. Более того, в одном из последних разговоров Борис признался, что вследствие определенного разочарования не имеет намерений в дальнейшем ездить за границу и по этой причине решил не получать новый загранпаспорт. Может быть такое решение было отчасти вызвано усталостью и подступающей болезнью.

О личностных качествах Бориса. Он был достаточно замкнут и, повидимому, одинок, несмотря на наличие приятелей, семьи. Свою частную жизнь тщательно оберегал, о собственных проблемах (семья, болезни) говорил крайне неохотно. Во времена студенчества я практически ничего не знал о его близких (родителях, сестре, братьях). Когда он надумал жениться, то мы с К. узнали об этом буквально за день до свадьбы, да и то, наверное, потому, что часто встречаясь и оказавшись «под рукой», непосредственно участвовали в свадебной процедуре. (лето 1974 г.). Жена Марина оказалась молодой довольно симпатичной с гуманитарным образованием, выпускница Иняза. Через два года появилась дочь Катя. Помню с какой любовью, вниманием и заботой Борис относился к ее воспитанию. Первые 3–4 года после свадьбы мы довольно интенсивно общались семьями — приезжали к Борису и Марине в Лось, а они ездили к нам на Пресню. Сохранились фотографии, на которых в разных комби-

[1] См. [1] в Части V — ред.

нациях (вместе с детьми и без них) запечатлены наши семейства. Затем наши встречи стали более редкими и прекратились вовсе, но регулярное общение с Борисом продолжалось. Возможной причиной тому были возникшие внутрисемейные проблемы Бориса и Марины, хотя Борис никогда не жаловался и не обсуждал их с нами. Брак Бориса и Марины распался в первой половине 80-х годов... Притом, для нашей семьи он был одним из самых верных и постоянных друзей. Сколько совместных посиделок, встреч, взаимных визитов, путешествий. Для меня неоценимы были его всяческая поддержка и внимание в тяжелый момент жизни — когда внезапно скончалась моя жена К.

Появление персонального компьютера стимулировало, по-видимому, литературные опыты Бориса, склонность к чему у него была и ранее. В конце 60-х годов (точную дату не помню) Борис и я решили написать для заработка детектив (безумная затея!), составили план, но дальше дело не пошло... В 90-е года Борис. очень переживал по поводу произошедших общественно-политических изменений в стране, определенной деградации российской науки, всеобщего обнищания. Так или иначе, это глубокое чувство привело к написанию ряда интересных, но, может быть, спорных текстов по общественно-политической и религиозно-философской тематике (название одного из них — «Квантовая физика как новый взгляд на вечные загадки бытия»). Чтобы дать представление о размышлениях Бориса, его отношении к жизни в последние годы, приведу длинную цитату из письма ко мне по поводу юбилейной даты (e-mail от 11.11.2004): «Поздравляю! Понимаю возможное смятение чувств в связи с достижением очередного рубежа мужской зрелости, но, тем не менее, вполне уверен в твоей мудрости и способности найти правильное отношение к неудержимому течению времени. Уверен, что заложенная внутри каждого из нас загадочная сущность по имени «душа» (квантово когерентное макроскопическое состояние материи?), как это случалось много раз и ранее, сама найдёт смысл своего существования и способ сообщить его бренному телу, даже не прибегая к логическим аргументам. Желаю, чтобы у тебя ещё много, много раз возникало острое ощущение того, насколько прекрасно просто дышать, смотреть по сторонам, идти, разговаривать... Т.е. чтобы как можно чаще вопрос о смысле жизни казался просто глупым и неправильно поставленным. Во всяком случае, некоторые из таких эпизодов моей жизни связаны с нашими совместными приключениями».

Несколько заключительных слов. Цель моих заметок — вспомнить и донести до читателя образ Бориса — яркой и многогранной личности, замечательного человека, общение с которым являлось важной и необходимой частью моей жизни (наверное, не только моей). Благодарен судьбе за то, что на протяжении многих лет он был моим другом.

Б. А. Гришанин: Некоторые даты и факты

Д. Д. Мамаев

В 1969 г. я поступил в аспирантуру и моим руководителем стал Руслан Леонтьевич Стратонович. В этот же год я познакомился с Борисом Андреевичем, бывшим в то время ассистентом кафедры. Общность научных интересов и постоянное общение на кафедре стали основой крепких дружеских отношений с Борисом. Мы опубликовали с ним несколько совместных работ, связанных с теорией информации (см. Часть V, работы [19,23,24]). Хотя они вышли без соавторства с Русланом, безусловно, влияние его идей на нас было весьма велико. Все мы — ученики Стратоновича — были увлечены им и вовлечены в занятия спортом. Об этом много сказано в книге «Профессор Р. Л. Стратонович» (см. Часть V, работа [8]).

Борис Андреевич активно играл в теннис и не оставлял это увлечение до самой смерти. Мы с ним и с Русланом проводили многие часы на разных кортах Москвы. Эти встречи, как правило, заканчивались обсуждением наших научных проблем. Моя последняя встреча с Борисом Андреевичем на корте была в 2005 г.

Борис хорошо ходил на горных лыжах. Я с удовольствием вспоминаю о наших совместных зимних вылазках в Турист. Руслан был непременным их участником. А ещё Борис Андреевич. профессионально занимался велоспортом и был очень сильным велосипедистом. Вместе с ним я объехал на велосипеде многие замечательные места подмосковья, преодолевая по 100–150 км в день. Особенно нам нравились окрестности Пирогово.

Вспоминаются несколько эпизодов наших совместных поездок. Хотя движение на дорогах было не такое плотное, как сейчас, однажды нам не удалось избежать встречи со самосвалом, который задел нас бортом. Сначала в кювет полетел Борис, а я вслед за ним. Слава Богу, оба оказались целы, но Борис страшно ругался, так как руль его велосипеда сильно погнулся.

Дмитрий Мамаев, Москва, Россия

Другой раз, преодолев около сотни километров в жаркий день, решили отдохнуть и выпить пива. По кружечке, а потом и по второй. Едем дальше. Говорю Борису:
— Знаешь, а я еду по синусоиде. Он мне отвечает
— И я заметил , что по синусоиде проще...

Летом 1974 г. Борис Андреевич и я под парусами на собственных швертботах прошли ряд крупных озёр Карелии. Особенно запомнилось Энгозеро, где Боря был в экипаже со своей женой Мариной и я со своей супругой... Казалось, что времена тогда были спокойными, а природа изобильной. Например, набрали мы пол ведра редкой ягоды — морошки. Наши женщины наварили на костре варенья — хотели до Москвы довезти, но оно оказалось таким вкусным, что вскорости все съели.

Плывем вдоль берега — видим поляна вся красная. Причалили. Все было усыпано подосиновиками. Огромные красно-коричневые шляпки и ни одного червивого. Мы с Борисом скинули рубашки и набрали их столько, что едва донесли.

Разговоры у нас крутились больше возле наших научных интересов. А когда речь заходила об общих — философских проблемах, то Боря был всегда при своем особом мнении. Человек он был сугубо беспартийный, и считал, что основной пружиной событий является подпольная деятельность масонов. О них он знал очень много. Своих взглядов никому не навязывал.

Воспоминания Г. Е. Колосова

Г. Е. Колосов

С Борисом Гришаниным я познакомился очень давно. Точно не помню, но могу с уверенностью сказать, что наше знакомство состоялось в интервале 1963–1965 гг. Наша первая встреча произошла, если можно так выразиться, «благодаря» Р.Л. Стратоновичу. Тогда я только что поступил в аспирантуру к Р.Л. Стратоновичу и стал его первым официальным аспирантом («неофициальные» аспиранты были у него и до меня). Находящийся в начале своей блестящей научно-педагогической карьеры Р.Л. Стратонович читал тогда на физфаке несколько факультативных спецкурсов, названия которых он придумывал сам. И хотя посещение этих спецкурсов для студентов не было обязательным, на этих лекциях собиралось довольно много слушателей не только с физфака МГУ, но и из других институтов, академических и отраслевых НИИ, конструкторских бюро. Это создавало особую атмосферу, поскольку заинтересованная публика задавала лектору вопросы, которые часто перерастали в оживлённую дискуссию. Если обратиться к художественным аналогиям, то можно сказать, что те лекции Стратоновича не были похожи на фундаментальные прелюдии и фуги Баха или Генделя, а напоминали скорее картины Манэ или музыку Дебюсси. И всем (включая лектора) это нравилось.

Помню, как однажды на лекцию по курсу «Теория информации» пришли два молодых паренька, которые запомнились мне тем, что во время лекции они очень много разговаривали между собой. Разговаривали идеальным шёпотом, никому не мешали, но между собой, по-видимому, о чём-то спорили. Затем в последующих лекциях один из них стал иногда уже вслух задавать вопросы самому Стратоновичу, на которые Руслан отвечал обычно очень кратко из-за тривиальности этих вопросов. Однако паренёк оказался довольно настырным, он ничуть не стеснялся тривиа-

Геннадий Евгеньевич Колосов, д.т.н., профессор, бывший аспирант Р. Л. Стратоновича
Московский институт электроники и математики, Москва, Россия

альности своих вопросов, и где-то после 4-й или 5-й попытки он всё-таки задал такой вопрос, что Руслан вынужден был прервать плавное течение своей лекторской мысли для подробного ответа. После этого эпизода стало ясно, что Боря Гришанин (а это был он) хоть и настырный паренёк, но паренёк с «идеями». Довольно быстро Боря Руслану понравился, и он согласился быть его научным руководителем. Так Боря стал ещё одним (третьим по счёту) официальным аспирантом Стратоновича. С этого момента мы с Борисом очень сблизились, а потом и подружились. И наши дружеские отношения сохранялись вплоть до последних дней его жизни.

Нельзя сказать, что наши дружеские отношения всегда были ровными и безоблачными. Всякое бывало. Наши взгляды на различные гуманитарные аспекты нашей жизни совпадали далеко не всегда. Однако объединяющих факторов было гораздо больше. Базисом наших дружеских отношений всегда были спорт и наука. Мы (особенно я), конечно, не были профессиональными спортсменами. Хотя более спортивный Боря имел первые разряды по велосипеду (шоссейные гонки) и по шахматам. Но сблизил и надолго привязал нас друг к другу теннис («большой» теннис — не пинг-понг). Когда мы познакомились, Боря в теннис не играл и даже никогда не пробовал. Но когда он увидел нас с Русланом, играющими на кортах спортивного городка МГУ, он заявил, что ему это занятие тоже нравится, и что он вот «сейчас» научится, чтобы играть вместе с нами. Конечно, сразу научиться ему не удалось, но через год-два в результате упорных тренировок он достиг такого уровня, что стал уже меня обыгрывать (сначала эпизодически, а потом довольно регулярно). Он всегда исповедовал силовой теннис. Любил побеждать за счёт силы ударов и бешеной беготни по корту. В конце концов он стал играть гораздо лучше меня. В среднем из каждых четырёх партий он побеждал в трёх, а я в одной. Всякий теннисист поймёт, какой Боря был для меня ценный спарринг-партнёр.

Что касается науки, то научного сотрудничества между нами, понимаемого в обычном смысле, было мало. За всё время нашего знакомства в журнале «Техническая кибернетика» была опубликована единственная наша совместная статья, посвящённая оптимальному квантованию случайных процессов. Основные наши научные контакты были другого рода. Они базировались на том, что я постоянно старался «использовать» Борю в качестве консультанта по тем или иным сложным для меня вопросам математического характера. Замечательным качеством Бори было то, что он никогда мне не отказывал, готов был обсуждать почти любые вопросы, вникать в самые мелкие детали, добиваться ясного понимания сути проблемы. И было очевидно, что ему самому это обсуждение доставляет удовольствие. Поэтому разговаривать с ним на научные темы мне всегда было легко и просто и, конечно, очень полезно.

Прошло уже более 4-х лет с того момента, как Бори с нами не стало. И чем дальше идёт время, тем очевиднее становится, что Борис Андреевич

Гришанин был крупной и сложной личностью, талантливым учёным и хорошим человеком.

Воспоминания С. А. Крупенникова

С. А. Крупенников

У А.А.Тарковского есть замечательное высказывание: «Искусство должно будить в человеке тоску по идеалу». Я думаю, что предназначение Высшего образования заключается в том же: пробуждении в человеке тоски по идеалу. Мне кажется, что одной из особенностей Бориса Андреевича как ученого и преподавателя было то, что он, наверняка не задумываясь об этом, способствовал продвижению к этой цели.

Мне посчастливилось быть одним из дипломников Бориса Андреевича. Получить его согласие на руководство дипломной работой оказалось не так просто: целый месяц я ломал голову над задачей, имеющей простую и изящную постановку. В начальный момент времени начинается вращение N лучей, исходящих из одной точки. Каждый луч имеет постоянную угловую скорость вращения равную $2\pi n/N$, где n — номер луча. Требуется доказать, что через достаточно большой промежуток времени лучи будут равномерно распределены на плоскости. Идея: исходно заданные детерминированные параметры движения приводят в конечном итоге к хаосу.

Столь же изящную формулировку получила тема моей дипломной работы «Оптимальная редукция некоммутирующих спиновых переменных». Что это означает, сейчас я вряд ли смог бы объяснить, но красота названия несомненна.

Мне кажется, именно от Бориса Андреевича я услышал о том, что одним из главных критериев правильности решения любой задачи является его красота. Во всяком случае, я уверен, что он был согласен с этим утверждением.

Я думаю, что Борис Андреевич был одним из тех, кто создал для меня образ идеального преподавателя — образ, которому я пытался соответ-

---

С.А.Крупенников, д.т.н., профессор
выпускник кафедры «Общая физика для мехмата» физического факультета МГУ 1972 г.

ствовать на протяжении тридцатилетней преподавательской деятельности в стенах Московского института стали и сплавов.

Воспоминания А. Петросяна

А. Петросян

Я учился с Борей в одной группе (номер 118 — как много в этой цифре!...), но до поры до времени у нас было шапочное знакомство. Потом выяснилось, что он увлекается шахматами, и тут мы нашли общий язык. Однако времени на шахматы было мало — все-таки физфак!

Но вот после окончания первого курса мы едем на целину. Ехали в товарняке долго, неделю или даже дольше, так медленно, что по пути можно было собирать цветы в поле — риска отстать не было.

Когда наступило время страды — жатвы, нас послали ближе к полям, но жить было негде. Выделили нам конюшню со всем тем, что там накопилось за время проживания лошадей. Взялись за дело — почистили, построили печь, а спали в корытах, из которых раньше поили лошадей, по два человека в каждом.

Вот тут мы с Борей стали играть в шахматы — устраивались после трудового дня в укромном уголке у печки и играли. Однако ни доски ни фигур у нас не было. Зэки мастерили фигуры из хлебного мякиша, а мы с Борей смогли без этого обойтись, играя вслепую и вызывая тем самым удивление профанов.

Потом пути наши разошлись — после 2х с половиной лет наступила специализация и мы с ним ушли на разные кафедры, но при случае обсуждали шахматные события, среди которых выделялся матч 1960 г. Ботвинник–Таль. Большинство желали победы Талю (сколько же может там на вершине быть этот старый гриб Ботвинник?!), а вот Боря уверенно сказал: «В конечном счете Ботвинник победит». И ведь он оказался прав, через год он таки вернул себе титул!

Следующий раз я встретил Борю через 40 лет, когда как раз отмечалось 40-летие окончания факультета. Он был все тот же — подтянутый, сухощавый, и как будто вовсе не поседевший. Таким я его и буду помнить.

А.Петросян, однокурсник Бориса Андреевича.

О Борисе Гришанине

Ю. М. Романовский

В этом разделе не только мои воспоминания о Б. А. Гришанине, но и впечатления разных людей, с ним контактировавших. Авторство этих впечатлений обозначено по мере изложения.

40 лет Борис Андреевич работал со мной бок о бок на одной кафедре. Менялось ее название, менялись заведующие кафедрой: профессора С. П. Стрелков, С. А. Ахманов, Н. И. Коротеев, а теперь — В. А. Макаров). Борис был одним из выдающихся учеников Руслана Леонтьевича Стратоновича. Как он попал на нашу кафедру — об этом лучше прочитать в его воспоминаниях о Руслане, которые приводятся в этой книжечке (см. Часть II). А потом он был ассистентом и совсем уже не долго доцентом. Был беспартийным , а в таком качестве продвигаться по «лестнице» было не просто. Так как он был теоретиком, то много часов семинарских имел на отделении механики мехмата...

По моему опыту — студенты мехмата тех (70-ых) лет сильные и продвинутые. Однако, к физике абсолютно равнодушные. От этого вести семинары было скучно. Наша преподавательница Ниночка Нетребко вспоминает свою учебу в группе, где вел занятия по физике Борис Андреевич: «Девицы по этой науке (физике) не знали **ничего**, кое-как списывали контрольные у мальчишек. 20 мая должен быть зачет, 18-го у меня день рождения, брат подарил билеты в МАИ на 19-е на концерт Окуджавы. Я нервничала, как же завтра зачет сдавать, если ни бум-бум. Подруги меня научили: а ты оденься соответствующе, накрасься и иди сдавать. Надеть особенно было нечего, но накраситься- накрасилась. Первый раз в жизни. И вот зачет, и он объявляет, кому автомат... Видно, я всё правильно на контрольных списала. А зачем же тогда красилась? С тех пор не крашусь». Это уж точно: Борис не был страшным «преподом». По ча-

Юрий Михайлович Романовский, д.ф.-м.н., профессор
Кафедра общей физики и волновых процессов, Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, 119991 Москва, Россия, e-mail: yuromanovsky@yandex.ru

сти суровости ему было далеко до таких корифеев как Лев Шенявский или Борис Буховцев.

Не был я близким другом Бориса Андреевича. Весь его мир общения на нашей кафедре был прежде всего связан с коллективом Руслана. Однако. Когда я к нему обращался по любому поводу — сугубо личному или по науке, то находил незамедлительный положительный отклик. Никаких таких: «сегодня никак не могу или попробую заняться этим весной».

Случилось у меня горе — внезапная смерть близкого и любимого друга. Душа не хочет с этим примириться — перебираю старые фото, письма. И ничего нет в моем компьютере. Иду вечером в соседнюю комнату. Где сидят Задков с Гришаниным. Они продвинутые — сканы и программы у них уже были. Ни слова не говоря Борис просидел над фотографиями, которые я принес, несколько часов и все сделал «от души».

Аспирантка моя Катя Шувалова занималась сложной задачей — моделировала туннелирование протона через сложные флюктуирующие барьеры. Сам я в этом понимал мало — обратился к Борису за помощью. По части квантов он все умел. И уже через пару месяцев Катя с Борисом Андреевичем и Андреем Чикишевым опубликовали две четких работы с конкретными ответами (см. Часть V, работы [5,6]).

Иногда мимолетные контакты с хорошими людьми остаются в памяти на долгие годы. Так случилось и со мной. В 1997 г. я работал в Гумбольдтовском университете в Берлине. Только что ввели шэнгеновские визы. Воспользовавшись этим купил дешевый автобусный тур на три дня Берлин–Париж. И поехал один в автобусе, полном незнакомых немцев. В Париже пообедал у знакомых, а в основном постигал его достопримечательности в одиночку. Погода октябрьская — все время моросил дождь. Спрятался от него в Нотр-дам де Пари. А потом стоял на мостике через рукавчик Сены и все смотрел на собор и темную воду внизу, опершись на «перила». Вдруг почувствовал, что меня сзади за локотки схватили и поднимают над оградой... Я не успел испугаться, как раздался знакомый смех. Это были два друга и мои ближайшие соседи по Лабе — Задков с Гришаниным. Видите ли — и они прилетели в Париж на два дня из Германии... Какова вероятность этой встречи?

У Бориса Андреевича, человека с оригинальным мышлением, были свои взгляды на «случайные события» — не зря он с Русланом (Стратоновичем) развивал теорию информации. Были у него свои взгляды и на устройство Вселенной, на проблему «пространства и времени», на религию, на устройство общества «человеков»... Но он никогда их насильно никому не навязывал.

Коллега по кафедре, Владимир Ильич Емельянов, рассказывает: «Играли с Борисом в шахматы. Он играл вслепую... Посреди партии говорит мне: что же ты моего слона на Е-4 не заметил? Можешь переходить... »

Я уже говорил, что в советские времена было трудно прикрывать Бориса Андреевича от ока парткома. Ведь для прохождения конкурсов и прочих характеристик требовалось предъявить достижения в обществен-

ной работе. А Борис Андреевич искренне не понимал, что сие есть, и когда его «записывали» в агитаторы во время выборов, он очень страдал. Времена изменились, но не для Бориса Андреевича. По рассказу Владимира Анатольевича Макарова: «Борис Андреевич прошел по конкурсу на доцента. От него требовались бумаги: копии дипломов и т.п. А он тормозил. Ему говорили — Ведь зарплата от этого зависит. А он тормозил. Стали вывешивать на его компьютере записку: сдай, мол, копии документов. Записка пылилась, а он тормозил. . . »

А вот как вспоминает о Борисе Андреевиче Ольга Александровна Чичигина — доцент нашей кафедры:

«Я познакомилась с Борисом Андреевичем как с рецензентом моего диплома. Его для этого выбрал Руслан Леонтьевич, потому что он был одним их лучших его учеников. Я особо не беспокоилась, по теме диплома была публикация в ЖЭТФе. Борис Андреевич поразил меня и тем, что моментально вник в суть дела, и еще больше намерением поставить за диплом четверку! Для доказательства своей правоты пришлось читать его книжку «Квантовая электродинамика для радиофизиков» (см. Часть V, работа [1]), которая многое мне разъяснила в моих же результатах. Хорошо бы эту книжку теперь переиздать. А уж тем более издать его книжку про квантовые случайные процессы, которая, кажется, так и не вышла.[1] Это действительно очень красивый единый подход к классической и квантовой статистике, о котором он рассказывал на своих спецкурсах и на основе которого он мог ответить на любой вопрос.

Борис Андреевич был, по сути, вторым научным руководителем моей диссертации. Руслан Леонтьевич умер, когда результаты были получены и опубликованы, но к написанию текста диссертации я даже не приступала и даже не представляла, что это такое. Исключительно из уважения к памяти своего учителя Борис Андреевич потратил огромное количество времени на самую скучную рутинную работу по вычитыванию текста, исправлению несчетного числа ошибок, уточнению формулировок. Еще больше сил и времени понадобилось ему, чтобы доказывать мне необходимость все переделывать и дополнять. Конечно же, все убеждали Бориса Андреевича официально быть вторым руководителем диссертации, и, конечно же, из этого ничего не вышло.

Ни для чего полезного для карьеры у него совершенно не было времени, при этом он часто ссылался на приближающийся конец света. Хотя он мог потратить несколько часов, чтобы просто помочь коллегам. Делал это с такой радостью, что было как-то не стыдно отнимать у него столько времени. Иногда я, заходя к ним в комнату с “небольшим” вопросом, догадывалась, что Борис Андреевич для ответа на мой вопрос начнет тут же что-нибудь вычислять или искать в литературе, и это надолго. Теперь мне особенно не хватает этой возможности зайти в сосед-

[1] Текст этой книги впервые публикуется в Части IV настоящей книги — ред.

нюю комнату с вопросами, иногда приходится вместо этого брать билет до Нижнего Новгорода.

Мы с Борисом Андреевичем жили на соседних улицах. Так что после кафедральных праздников мы часто ехали вместе на нашу «Бабушкинскую». Мне очень нравилось обсуждать с ним кафедральные дела, потому что ко всем сотрудникам он относился с огромной теплотой и даже восторгом. А вот политическим деятелям не оставалось ни капли симпатий Бориса Андреевича. Нужно было очень тщательно избегать политических тем, чаще всего это удавалось. Из множества книг, которые мы обсуждали, сейчас вспоминается только Вудхауз. Он его читал по-английски, а фильм смотреть почему-то принципиально не хотел. А из фильмов ему очень нравился новый «Идиот». Борис Андреевич записывал все серии. Во время одной из них во всем нашем микрорайоне отключили электричество. Борис Андреевич потом уверял меня, что это темные силы пытались препятствовать показу такого хорошего фильма. Это все было незадолго до его смерти, так что запомнилась какая-то такая вот ассоциация с князем Мышкиным».

Воспоминания А. С. Чиркина

А. С. Чиркин

Борис и я однокурсники, и, хотя, как впоследствии выяснилось, мы оба закончили Отделение радиофизики Физического факультета Московского университета, наше знакомство состоялось на Кафедре общей физики для мехмата, когда заведующим этой кафедрой в 1975 г., стал профессор Сергей Александрович Ахманов, мой научный учитель. На эту кафедру с С.А. Ахмановым перешло часть сотрудников Кафедры волновых процессов. В то время я не был сотрудником физического факультета (работал на кафедре научной информации МГУ), но поддерживал самые тесные связи с Кафедрой волновых процессов. Борис был в группе профессора Руслана Леонтьевича Стратоновича, выдающегося советского физика-теоретика, внесшего значительный вклад в развитие статистической физики и статистической радиофизики. Группа Р.Л. Стратоновича занималась, по моим представлениям в то время, довольно абстрактной проблемой — квантовой информацией. С.А. Ахманов относился скептически к этому направлению, и он старался подключить группу Р.Л. Стратоновича к проблемам лазерной физики. Следствием этого явилось работа Р.Л. Стратоновича по пространственной когерентности лазерного излучения, опубликованная им в журнале «Квантовая электроника». Борис постепенно переориентировался на решение проблем лазерной физики. Я помню, что на одной из Школ по голографии (она проходила в Ростове Великом) Борис выступал с докладом по влиянию квантовых флуктуаций в голографии. Затем он в течение ряда лет сотрудничал с группой профессора В.В. Шувалова и разрабатывал теорию релаксационных процессов в конденсированных средах.

Наше тесное сотрудничество с Борисом состоялось после Конференции по квантовой оптике, которая проводилась в Минске в 2000 году. На этой конференции Борис сделал доклад по проблеме квантовой ин-

А.С.Чиркин, д. ф.–м.н., профессор
Кафедра общей физики и волновых процессов, Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва 119991, Россия, e-mail: aschirkin@rambler.ru

формации, вызвавший большой интерес участников. К этому времени я, занимаясь уже в течение ряда лет проблемой генерации неклассических световых полей методами нелинейной оптики, переосмыслил свое отношение к квантовой информации. После конференции мы решили объединить наши усилия в исследованиях и применении неклассического света. Совместно с группой Бориса мы трижды подавали проект в РФФИ и выигрывали гранты. Проекты были посвящены разработке новых нелинейно-оптических процессов и анализу их особенностей с квантово-информационной точки зрения.

С Борисом было легко иметь дело. Если Борис называл срок, к которому обещал что-то сделать, он всегда этот срок выдерживал. Меня удивляла его такая обязательность, пунктуальность. Довольно часто мы не укладываемся в срок, который планируем, и всегда этому находится объяснение. Борис не любил откладывать решение волнующей его проблемы «в долгий ящик». Когда с ним обсуждалась какую-нибудь проблема, то её решение он мог найти в этот же вечер и прислать её решение. Если Борис чувствовал, что не может выполнить работу или сделать доклад на таком научном уровне, который он ставил перед собой, он отказывался от предложения. Весьма поучителен такой пример, о котором я узнал года два тому назад. Юрий Евгеньевич Дьяков рассказал мне, в процессе общения с ним при подготовке второго издания книги «Введение в статистическую радиофизику и оптику» (авторы С.А. Ахманов, Ю.Е. Дьяков и А.С. Чиркин), что С.А. Ахманов приглашал в соавторы написания этой книги Б.А. Гришанина, но он отказался. Насколько я могу судить, Борис считал, что не выполнит работу на надлежащим уровне. Он всегда был нацелен на получение нового знания и неохотно тратил время на изложение известных результатов. В области квантовой информации Борис получил целый ряд оригинальных результатов, важность которых научному сообществу ещё предстоит осознать. Борис давно имел достаточно научных результатов для оформления их в виде докторской диссертации, а на вопрос почему он не пишет диссертацию, он отвечал, что у него на это нет времени. В последние годы своей жизни он интенсивно работал, писал статьи. Даже подать заявку на грант для получение финансовой поддержки на публикацию книги, которую он выложил в Интернете, он жалел время. Он, вероятно, внутренне чувствовал, что у него оставался небольшой ресурс времени в этой жизни и стремился сделать как можно больше.

В моей памяти Борис Андреевич остался как порядочный и обязательный коллега.

Работать с Борисом Андреевичем было честью для меня

В. Н. Задков

Борис Андреевич вошел в мою жизнь в 1991 г., когда я, будучи молодым тогда сотрудником кафедры общей физики и волновых процессов физфака МГУ только стартовал один из моих первых теоретических проектов по сверхбыстрой фотоизомеризации многоатомных молекул. Надо сказать, что в студенческие годы и затем в аспирантуре я больше занимался экспериментом. Все складывалось удачно, было получено множество интересных результатов, защищена диссертация и я был оставлен на работу в МГУ, хотя и не был москвичем (большое исключение в то время!). И так сложилось, что я вынужден был бросить свои занятия экспериментом и уйти из лаборатории «в никуда». После некоторых мытарств и зондирования разных направлений деятельности на кафедре я решил «пристать» к берегу теоретиков (тем более, что еше со студенческих лет мне нравилась теория).

С подачи Сергея Александрович Ахманова я «обрел» пристанище в комнате 3-06 Корпуса нелинейной оптики, в которой были тогда «прописаны» такие великие теоретики как Руслан Стратонович и Юрий Климонтович. Никто там конечно же не сидел целыми днями, но важно было иметь свой стол, свое рабочее место (надо сказать, что большинство теоретиков на кафедре вообще его не имели). И вот через пару лет после моего «причаливания» в эту замечательную «гавань теоретиков» я уже вовсю работал над свои новым проектом по сверхбыстрой фотоизомеризации молекул. Идея родилась в разговоре с Сергеем Ахмановым во время одного из многочисленных научных обсуждений (я как раз решил сменить тему занятий). «Масла в огонь подлил» Юрий Михайлович Романовский, который задавал мне очень простые, на первый взгляд, вопросы, на которые у меня тогда не было ответа, но которые заставляли задуматься. От идеи — к делу, и закрутился проект. Тут подоспел и аспирант из Болгарии — Валентин Вачев (который стал моим вторым аспи-

---

В. Н. Задков, зам. декана, профессор физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, тесно сотрудничал с Борисом Андреевичем с 1991 по 2006 г.

рантом и первым на ниве теории и компьютерного моделирования). Мы с ним быстро раскрутили проект и начали получать интересные результаты, однако полного квантового описания процесса фотовозбуждения при фотоизомеризации многоатомных молекул нам не хватало. Конечно же мы не сидели на месте и использовали имеющиеся в литературе наработки по квазиклассическому описанию таких процессов, но этого было недостаточно, особенно для объяснения противоречивых экспериментальных результатов.

Как то в беседе с Русланом Стратоновичем (с которым я быстро сошелся на почве персональных компьютеров, программирования и системы TeX/LaTeX), когда я пытался ему объяснить чем занимаюсь, он мне посоветовал поговорить об этой проблеме с Борисом Гришаниным, его бывшим аспирантом. Борис тогда работал вместе с Володей Шуваловым и Верой Петниковой и занимался совсем другими задачами. Тем не менее, я попросил его о встрече, он внимательно выслушал постановку нашей задачи, подходы, используемые нами, и проблемы, которые мы имеем. Сказал, что подумает. Каково же было мое удивление, когда через несколько дней он пришел к нам и «выкатил» готовое решение задачи возбуждения многоатомной молекулы в многомерном пространстве ее степеней свободы. Написано это было исключительно компактно, на каком-то «птичьем» для меня тогда языке супероператоров, в самом общем виде, и, честно говоря, сложно было представить, как это «прикрутить» к той модели, которую мы считали. Вот тут-то и начались постепенно наши «взаимоотношения» с Борисом, которые плавно и достаточно быстро переросли в очень интенсивное и плодотворное сотрудничество на протяжении всех последующих лет его жизни.

Каюсь, что я, видимо, был причиной постепенного «охлаждения» научных взаимоотношений Бориса с Володей Шуваловым и Верой Петниковой. Но, как мне кажется, он чем-то напоминал своим поведением кота — был очень независимым и делал то, что считал нужным и как считал нужным. Его невозможно было «удержать», он шел туда, где ему было интересней работать. Так что начало нашего сотрудничества было, видимо, просто поводом, а не причиной.

Хочу подчеркнуть, что этот лейтмотив независимости, как у Бориса, так и у меня (но у Бориса в бóльшей степени), прослеживался до самого неожиданного конца нашего научного сотрудничества. Борис помимо наших научных совместных интересов занимался другими своими проектами, и я делал то же самое. Эта «независимость», как мне кажется, только усиливала достоинства нашей совместной работы.

Итак, в 1991 году Борис Андреевич уже примкнул к нашей гавани теоретиков в к. 3–06. Так сложилась жизнь, что сначала Юрий Климонтович ушел от нас на другую кафедру (хотя продолжал частенько заходить в нашу комнату поговорить и пообщаться), а затем в 1998 году ушел от нас и Руслан.

За годы нашей совместной работы через Бориса, через нашу лабораторию прошло около дюжины студентов и аспирантов. Все они — «штучный» товар, другие у нас не задерживались. Борис сам был «воспитан» в науке таким образом, что будучи в «учении» у Руслана, фактически сам ставил себе задачу, сам ее решал и получал результаты. Руслан был Учителем, который не сюсюкался с учениками, а обсуждал с ними на равных проблемы большой науки. Так и Борис — мог помочь студенту понять проблему, понять почему у того не получается с ее решением, но не решал ее за него. Он не любил, когда студент приходил к нему, не «прорыв» самостоятельно все, что можно.

Далее я хотел бы несколькими «мазками» передать мое «ощущение» Бориса в различных ситуациях. Сразу отмечу, что отношения у меня с ним были число рабочие, хотя и доверительно-дружеские. Мы были на «Вы». Свою личную жизнь он тщательно оберегал и старался в нее никого не впускать. Так о том, что у него была жена и есть дочь, я узнал только после визита его дочери к нам в лабораторию, уже через несколько лет после нашего совместного сотрудничества. Также как о том, что у него есть спутница жизни (Вера Филипповна), я узнал случайно во время нашей командировки в Бонн, Германия, где он попросил меня помочь купить ему детали женской спортивной одежды...

Начну с очень важной, как мне кажется для Бориса темы — его отношения к компьютерам. С появлением персональных компьютеров и, в особенности, таких программных продуктов как TeX/LaTeX и Mathematica, он исключительно органично и очень эффективно начал их использовать как для организации своей работы, так и для выполнения трудоемких аналитических расчетов в системе Mathematica. Последний был им особо почитаем и любим, поскольку позволял довести до конкретного результата, вплоть до цифры и графика, полученные им общие аналитические выражения. Это быс своего рода новый инструмент теоретика. На компьютер же — сначала на работе, затем и дома, — Борис переносил все свои записи, мысли, идеи, статьи, а в дальнейшем архивировал там же и семейные фотографии, музыку и др. Делал он это все по разработанной им системе так, что все было строго катагализировано, имело аннотации и ко всему был автоматизированный доступ.

Борис относился к своим научным результатам очень требовательно. Многие считал второстепенными, хотя они и были очень важны для решения какой-то конкретной задачи. Сам он не занимался «рекламой» своих результатов, считая, что достаточно опубликовать результат, а дальше кому надо, сам его найдет. Как оказалось потом, целый ряд результатов и идей, которые мы обсуждали и решили не публиковать, потом появились в очень престижных журналах на Западе, но уже под другими фамилиями. В тоже время Борис «знал себе цену», сам ставил себя и свои результаты в ряд достижений Науки. Он обладал каким-то фантастическим чутьем в области квантовой физики, не говоря уж об его колоссальных познаниях в этой области, а также в разделах матема-

тики, которые здесь используются. Недаром за советом к нему по этим вопросам обращались многие коллеги не только с нашей кафедры и факультета.

Будучи исключительно честным и порядочным в науке (и в жизни тоже), Борис с этих же позиций рецензировал и оценивал работы других авторов. При этом он никогда не придирался по-мелочам, а старался оценить правильная ли и актуальная ли работа по-сути. Никакой «политики».

Разговор о научных результатах тесно связан с отношением Бориса Андреевича к их презентации и тому, как он эти презентации готовил. Я уже говорил, что не все свои научные результаты Борис считал достойными для презентации их широкой публике. Однако к презентации существенных результатов, будь то доклад на семинаре группы, кафедры или на конференции, он готовился чрезвычайно серьезно и тщательно. Во-первых, тщательно продумывал логику презентации. Далее, готовил компьютерную презентацию, даже писал текст выступления зачастую (особенно на английском языке) и, наконец, многократно «проигрывал» ее. Этого же он требовал от студентов и учил их этому.

Когда мы начали активно представлять свои результаты на зарубежных конференциях и в зарубежных журналах, меня поразило обширное знание Борисом не столько английского языка, сколько его словарный запас, причем, в значительной степени, «старомодный». Как оказалось, он самостоятельно изучал английский язык, читая английскую классику, отсюда и словарный запас. Ударом для Бориса — когда он начал активно общаться с западными коллегами — было то, что они плохо понимали тот, как ему казалось, замечательный английский, который он самостоятельно освоил. Надо было срочно что-то делать и он пошел на курсы английского языка в Международном лазерном центре МГУ вместе с Русланом и др. коллегами. И вскоре Борис начал все лучше и лучше говорить по-английски. Барьер был сломан, и интерес к дальнейшему совершенствованию пропал...

О поездках за границу. Как оказалось, до нашей совместной работы с Борисом он никогда не был за границей, хотя как мне казалось, он очень хотел и посмотреть и проявить себя, но никогда об этом не говорил. Вскоре после начала нашей совместной работы мы с ним и с нашим аспирантом Валентином Вачевым поехали на международную конференцию в Ювяскилу, Финляндию. Поехали в составе еще человек 20 наших коллег из СССР. Денег не было, поэтому ехали на поезде до Калининграда, а оттуда — на автобусе в Финляндию. Поселили нас в молодежном кемпинге, на двухъярусных нарах, в комнате по несколько нар. В общем, походно–молодежные условия. Но было интересно, конференция была интересной. И это был первый опыт выступления Бориса за границей — очень волновался, сильно готовился, и доклад был успешный! Успешный первый опыт свободного общения с зарубежными коллегами. Помню также, что мы тогда впервые попробовали йогурт (в России

его тогда не было). Кроме того, всем нам принимающая сторона выдала какие-то небольшие деньги на карманные расходы. Народ, в основном, покупал шмотки, а Борис на всю валюту купил современную теннисную ракетку.

Далее поездки Бориса за границу стали более частыми и в разные страны, он ездил и один, и в составе группы. Вспоминаются несколько эпизодов из таких поездок с ним.

Когда мы с Борисом были в командировке в Рено (штат Невада, США) по совместному с Джоном Фредериком гранту НАТО, то жили мы для экономии вместе в одном номере гостиницы, расположенной неподалеку от университета, где мы и работали. Были мы там летом, жара несусветная. Ели, в основном, в центре Рено, где расположены все казино. Там еда стоит копейки, основное внимание — на игровые площадки. Помню, как повел Бориса первый раз в обеденную зону в одном из таких огромных казино. Зона эта представляет огромный ресторан самообслуживания с колоссальным выбором всех видов еды, напитков и т.п. — бери сколько сможешь съесть и делай сколько угодно подходов, все за небольшую фиксированную сумму (это называется буфетом в США). Борис был поначалу шокирован и обилием, и выбором, и дешевизной еды; сделал несколько заходов, пока почти-что не смог передвигаться. Однако, после пары таких «походов» в буфет, он резко поменял свое отношение к ним и тактику — брал только толченую картошку (почему-то она ему очень там нравилась), кусок мяса и овощи. Говорил, что хочет быть ближе к нашей еде, так ему быстро приелась американская еда. Так же быстро мы с ним отошли от потребления американского пива и перешли на приличное калифорнийское вино.

Затем была замечательная поездка на озеро Тахо в горах вместе с Валентином Вачевым, его женой и дочерью. Мы там провели в лесу и на пляже целый день, готовили барбекю, гуляли, много говорили о жизни, Борис дажу искупался в этом горном озере, хотя несмотря на 50 градусную жару по Цельсию, вода в озере была всего +10. Первый раз я видел Бориса таким свободным, раскрепощенным и довольным жизнью...

Это были, пожалуй, самые замечательные дни в нашей совместной работе. У Бориса установился очень хороший человеческий контакт с Джоном Фредериком. Джон затем приезжал к нам в Москву и в Питер со своей женой по нашему приглашению. Борис полностью взял заботу о Джоне и его семье на себя во время его пребывания в Москве (я в это время был прикован к постели из-за болезни).

После сотрудничества с США у нас началось интенсивное и плодотворное сотрудничество с Дитером Мешеде (Бонн, Германия). Я провел в Бонне больше года на гумбольдтовской позиции и Борис в это время приезжал в Бонн пару раз для выполнения совместного проекта. Помню, что во второй его приезд не было возможности поселить Бориса в дешевый гостевой дом и Дитер предложил Борису жить в замечательном, красивом и удобном месте – отеле центра физических наук, который он

курировал и который располагался чуть в гору, на другой стороне Рейна. Борис наотрез отказался, узнав цену вопроса, сказав, что за эти деньги он готов ночевать на вокзале. Пришлось поселить его у себя в однокомнатной квартире, которую я снимал тогда в Бонне. Организовал для Бориса матрац и подушку, вот так и жили мы две-три недели в одной комнате, как до этого жили в одном номере гостиницы в Рено. Наговорились вдосталь на все темы, начиная с науки и кончая политикой. Вот на последней-то мы и разругались с Борисом «вдрызг». Он начал как-то разговор о политике (во время очередной дегустации мозельского вина) с малого. Я начал отшучиваться, затем больше и дальше, ну и сильно «разошлись» во мнениях. Борис считал, что прав только он и что только так и должно быть. Обиделся на меня за то, что я имею другое мнение, и хранил молчание несколько дней... После этого мы никогда не говорили о политике.

Во время этого визита в Бонн был у нас с Борисом спонтанный выезд в Париж на уикенд. Мы с ним как то гуляли в центре Бонна после рабочего дня в университете, проходили мимо турагенства. Я ему сказал в шутку, что почему бы нам не махнуть в Париж на грядущий уикенд. Дело было вечером в четверг. Он загорелся, и мы тут же курили тур на уикенд в Париж. На следующий день вечером мы уже вылетели в Париж. Все как в сказке — перелет, отель, Париж, Париж, Париж... И случайная встреча с Борисом на следующий день вечером напротив собора Парижской богоматери (мы гуляли с ним раздельно и не договаривались о встрече), и (не верилось своим глазам) вдвойне случайная встреча с Юрием Романовским там же. Вот и верь после этого в теорию вероятностей!

Далее у Бориса было много поездок за рубеж, в том числе и в Японию, но чем дальше, тем меньше это было ему интересно, как мне кажется. Как то он мне сказал, что эти поездки для него теперь не имеют большого смысла, только отвлекают его от дела, от науки. Даже новый зарубежный паспорт оформлять не стал.

Как то в один из вечеров вместе с Борисом в Бонне мы заговорили о финансировании науки у нас в стране — печальная тема для людей, занимающихся наукой в настоящей России. Его позиция, с которой я полностью согласен, состояла в том, что люди науки должны заниматься своим делом — наукой (а в университете еще и преподаванием), и государство ДОЛЖНО за их качественную работу платить им достойные деньги. Фундаментальная наука и качественное университетское образование без этого не могут существовать. Система же грантов в России в настоящее время настолько дискредитирована и «политизирована», что под идею просто так денег не дают. Борис с радостью вспоминал те годы при советской власти, когда он будучи молодым кандидатом наук получал от государства за то, чем занимался и что ему было интересно, достойную зарплату и не должен был искать где ему подработать.

Надо сказать, что Борис изначально, будучи еще аспирантом Руслана и после этого, занимался абсолютно фундаментальными проблемами

физики, тем, что сейчас сформировалось в целое новое направление — физику квантовой информации. Руслан и его первые аспиранты, включая Бориса, были фактически пионерами в этой области задолго до того, как она стала интенсивно развиваться за рубежом. Многие идеи, обсуждавшиеся Борисом десятилетия тому назад, реализованы в настоящее время, часть уже и экспериментально. Очень жалко, что как это часто бывает, все это мало известно или вообще не известно за рубежом. Занимаясь в последующем более прикладными проблемами, в том числе начав работать со мной, Борис в глубине души всегда тяготел к его основному интересу в физике — квантовой информации.

Так получилось, что возврат Бориса к занятиям физикой квантовой информации был как раз инициирован нашей совместной работой с Дитером Мешеде. Дело в том, что когда я получил гумбольдтовскую позицию и уехал на год с лишним в Бонн, я первоначально планировал продолжать там наш совместный проект по фотоиндуцированной динамике молекул. Мы с Борисом даже предварительно съездили в Бонн и обсудили детали нашей деятельности. Жизнь, однако, богаче наших планов. В процессе работы в Бонне я начал вникать в совершенно новые для меня проблемы квантовой оптики, атомной физики и физики квантовой информации — благо вокруг в институте почти все этим и занимались. Все это настолько меня заинтересовало и вдохновило, что планы были полностью изменены и мы начали абсолютно новый проект по квантовой оптике, а затем и по физике квантовой информации. Обсуждая этот «поворот» в нашей деятельности с Борисом сначала по электронной почте, а затем и в многочисленных беседах в Бонне, я видел, что Борис с радостью начал этим заниматься. Он, наконец, вернулся к тому, с чего начинал, но на качественно новом уровне.

Как я уже говорил, я не входил в круг близких Борису людей, он был, видимо, очень узким. В нерабочей обстановке мы общались с ним не так часто, но случалось, особенно во время совместных поездок на конференции и за рубеж. Из этого общения я сделал вывод, что он живет по своим, четко установленным для себя нормам и правилам. Очень любил обязательность и честность. Старался добиваться наилучших результатов во всем, чем занимался — в спорте, науке. Но достигнув, мог потерять к этому интерес или, как с английским языком, счесть, что это ему уже достаточно и более не имеет смысла тратить на это силы и время.

Несмотря на любовь Бориса к компьютеру и четкой организации своей научной деятельности, он был абсолютно беспомощным в административных вопросах. Даже подготовка бумаг для своего собственного избрания на должность вызывала у него, как мне кажется, внутреннее отторжение. Помню, что получив задание от руководства кафедрой подготовить пакет бумаг для представления на звание доцента, Борис повесил стикер на компьютер, взял образцы бумаг, но так ничего и не сделал в течение пары лет...

То же относилось и к защите им докторской диссертации. Речь об этом шла еще при Сергее Александровиче Ахманове (возможно, и раньше), у Бориса было полно замечательных результатов, причем по разным направлениям (и каждого из них хватило бы на диссертацию), но он не писал, все отшучивался. А как то летом, за несколько месяцев до своей кончины он мне сказал, что это не важно, и он никогда не считал это главным. Это лишь результат, а его истоки лежат намного глубже. Видно было, что Борис очень глубоко к сердцу принимал все, что происходило и происходит с нашей страной, теперь Россией. Ему это все было очень близко и небезразлично, он все это через себя пропускал. И это, возможно, «сломало» что-то в нем...

Помню несколько последних встреч с Борисом Андреевичем. Одна из них — в летнем домике на берегу водохранилища под Москвой, где он любил отдыхать. Я приехал на машине, чтобы помочь ему переехать оттуда домой в Москву. Мы сидели тогда с ним, Верой Филипповной и Юлей Владимировой (нашей аспиранткой тогда), говорили за жизнь. Он уже тогда плохо ходил, но с радостью рассказывал нам как же там хорошо на Природе!

После этого я его перевозил в первую градскую на Ленинском, когда еще была надежда на чудо. Видно было, как Борис держался, превозмогая адскую боль, а затем я видел его и его глаза, когда увозил его из клиники назад домой — он уже все знал о своей болезни, что его скоро ждет, но как достойно держал себя!

Даже во время болезни он оставался ученым — вел на компьютере дневник течения своей болезни и записывал туда свои ощущения, состояние, систематизировал...

Уже несколько лет, как Бориса нет с нами, но я постоянно ловлю себя на мысли о том, что часто пытаюсь себе представить, как Борис поступил бы в той или иной ситуации, каково было бы его отношение, его оценка работы. Это для меня, наряду с моими Учителями в науке, своего рода «планка», ниже которой нельзя, можно только выше. Его ученики, как мне кажется, тоже впитали в себя то, чему их учил Борис Андреевич, и я думаю он бы ими гордился. Ради этого стоит жить...

Воспоминания Д. Н. Сыча

Д. Н. Сыч

Моё первое знакомство с Борисом Андреевичем состоялось в 1998 году, когда я, будучи студентом третьего курса, выбирал кафедру для дальнейшей специализации. Надо сказать, что особых научных предпочтений в то время у меня не было, поэтому рассматривал все варианты: геофизика, акустика, физика атомного ядра, низких температур, магнетизма, биофизика и другие, но окончательного решения принять не мог. В списке наиболее престижных кафедр была кафедра общей физики и волновых процессов. После дня открытых дверей, где представляли свои проекты все научные группы кафедры, меня заинтересовала группа, занимающаяся квантовой информацией. Что такое квантовая информация я тогда толком не понял, но презентация понравилась и заинтриговало само название и новизна тематики. Как раз в это же время проходил курс по квантовой механике, который мне давался легко, а интерес к информационным технологиям был изначально. Прочитав информационный буклет кафедры, новой информации по существу не прибавилось, кроме того что в группе на тот момент было всего два сотрудника: Виктор Николаевич Задков и Борис Андреевич Гришанин.

Придя в назначенный день в лабораторию квантовой информации, я увидел там невысокого пожилого человека, представившегося Борисом Андреевичем Гришаниным. На моё желание выбрать эту лабораторию для научной специализации Борис Андреевич отреагировал с интересом, поинтересовался оценками, и удовлетворившись ответом, сообщил, что в ученики возьмёт максимум одного человека с курса. Далее описал примерные варианты научных проблем, решением которых он будет заниматься в ближайшем будущем. На прощание Борис Андреевич для пробы дал решить одну задачу — квантовый осциллятор со случайной внешней силой. “Если решите — приходите, будем работать”, — на этом и

Денис Николаевич Сыч, бывший аспирант Б.А.Гришанина
Max Planck Research Group, Insitute for Optics, Information and Photonics, Guenther-Scharowsky-Str. 1, Erlangen, Germany, D-91058, e-mail: denis.sych@gmail.com

закончилась моя первая встреча с Борисом Андреевичем. Стандартный курс квантовой механики, читаемый на физфаке, как я сейчас считаю, построен не очень удачно и заточен скорее под нужды ядерной физики, поэтому как решать поставленную задачу я не знал. Самостоятельно покопавшись какое-то время в литературе, я написал черновой вариант решения; детали же были по-прежнему непонятны. Недели через три я пришёл с написанным к Борису Андреевичу, который, как оказалось, и про меня, и про задачу уже забыл. Но принесенному оказался рад, и несмотря на предыдущее замечание о том что в лабораторию возьмёт одного студента, согласился вести кроме меня ещё двух — Владимирову Юлю и Янышева Дениса.

С темой моей дальнейшей работы определились довольно быстро. У Бориса Андреевича была идея о родстве квантовых и классических аналоговых вычислений, о которой мне и было доверено подумать. Речь шла о квантовом компьютере, в котором информация хранится и обрабатывается в квантовом виде, по законам квантовой механики и о классическом аналоговом компьютере, где информация хранится в виде непрерывных, но вполне определённых классических значений. Ни об одном из этих компьютеров я чёткого понятия не имел, поэтому охотно взялся за задачу. “Денис, хорошо бы если на защиту курсовой работы ты принёс работающий квантовый компьютер (речь шла о четвёртом курсе!). В подвале есть мастерская, если что-то надо спаять — помогут. Нужен лазер — тоже найдём”, — такого «простого» задания я, признаться, не ожидал. (Прим: полноценный квантовый компьютер, несмотря на многолетние усилия всего мирового сообщества, к настоящему времени не создан.) Компьютер я, естественно, не сделал, но вот со всей значимой литературой по теме квантовых вычислений и квантовой информации познакомился.

Задачи Борис Андреевич ставил довольно широко. Если появлялась какая-то идея, то он живо её обсуждал, вовлекаясь в процесс постановки задачи. Он относился к старой советской теоретической школе, в которой стандартная педагогическая составляющая учитель-ученик практически отсутствовала. Со мной, да и с другими студентами, он разговаривал так, как будто я его коллега и уже в совершенстве знаю не только квантовую механику, квантовую оптику, но и весь сопутствующий математический аппарат, а также знаком со всеми свежими публикациями по квантовой информации за последние годы. Поэтому первые разговоры с ним давались с большим трудом. После разговора оставалось ощущение, что я ничего не знаю и саму задачу понимаю гораздо хуже, чем до разговора. Но через несколько дней, на удивление, неясные места как бы сами собой прояснялись и знания заметно прибывали. В такой манере общения проявилась характерная черта Бориса Андреевича — уважение к научной деятельности молодёжи. Не делая скидок и не сюсюкаясь, как это принято в некоторых лабораториях (нередко на вопрос «что делал студент?» мне приходилось слышать «цветы полил, пыль протёр, на компьютере текст

набрал — хороший в общем студент, смышлёный»), Борис Андреевич разговаривал на равных, принимал студента за коллегу. Фактически, он давал возможность самому студенту сориентироваться в теме, определить задачу и самостоятельно её решить. Понятно, что такой подход не даёт гарантий выполнения курсовой работы или диплома, но для дальнейшего развития молодёжи в науке существенно помогает.

В то же время строгость педагогического подхода сочеталась с готовностью помочь в решении какой-то конкретной проблемы. Например, в начале моей работы я столкнулся с нехваткой знаний в области компьютерных технологий, в первую очередь с системами компьютерной алгебры. Борис Андреевич делал свои заметки не на бумаге, как это было принято у большинства теоретиков, а сразу на компьютере. Компьютерной математикой он владел совершенно свободно и в этом отношении мог дать фору многим преподавателям. Однажды, в начале нашей совместной работы, видя, что я не понимаю написанную программу, он помог мне в ней разобраться, объяснил как и для чего написаны отдельные части, как они работают, и дал рекомендации как её можно поменять под мои цели.

Позже, в первые совместные поездки на конференции, Борис Андреевич помогал с оформлением презентаций. Помню как я впервые услышал слово «постер» (Прим: стендовый доклад, распечатанный на бумаге большого формата). Как делать этот «постер» я понятия не имел, поэтому взял статью, удалил часть текста и распечатал её на отдельных листах, которые планировал склеить друг с другом. К слову, такие «постеры» можно встретить до сих пор, преимущественно у докладчиков из стран экс-СССР. Борис Андреевич увидел это безобразие и терпеливо объяснил, что в таком подходе неправильно и как нужно делать. Потом, на самой конференции, он всю постерную секцию провёл невдалеке от моего стенда, а при случае подходил и слушал, что меня спрашивают, и что я отвечаю. Иногда случалось, что я не понимал вопроса и отвечал несколько невпопад. Сказывался как недостаток разговорного английского так и общая нервозность от важности мероприятия, всё-таки это была первая серьёзная научная конференция! Борис Андреевич в таких случаях корректно вмешивался в разговор и ситуация прояснялась.

В другом эпизоде при работе над текстом диссертации я получил ценнейшие материалы по истории возникновения интереса к квантовым аспектам информации в СССР. Никаких материалов по этому вопросу в литературе не найти и до сих пор, ведь многое даже не публиковалось! Часть текста Борис Андреевич мне просто подарил, и не захотел чтобы я об этом как-то упоминал.

В последние годы жизни Борис Андреевич с большим интересом занимался фундаментальными вопросами — случайность, причинность, время. Чуть ли не каждый день он приходил с новым определением квантовой информации. Дело в том, что существовавшие на тот момент информационные меры не являлись адекватным отражением сути процес-

сов происходящих в процессах обмена и обработки квантовой информации, например, в квантовых вычислениях или квантовой связи. Борис Андреевич пытался выявить суть этих квантовых процессов с информационной точки зрения и дать её адекватную математическую форму. К концу многочасового обсуждения каждый раз находились контрпримеры для свежепридуманной информационной меры. Несмотря на отрицательный результат, каждый из подходов составлял несомненную собственную ценность. Как это широко распространено в современной науке, мало-мальски интересная идея всегда публикуется, а часто и понескольку раз под разнообразными «соусами». По проблеме определения квантово-информационной меры в мире написаны сотни, если не тысячи статей. Любое из наших тогдашних обсуждений создавало материал, который заслуживал отдельной публикации, причём это были бы хорошие статьи. К сожалению, понимание ценности таких обсуждений пришло гораздо позже, уже после смерти Бориса Андреевича. Его же интересовало прежде всего не наличие публикаций, а решение конечной проблемы. Предварительные ступеньки к ней в лучшем случае откладывались в стол, а зачастую просто забывались. Замечу, что несмотря на усилия всего международного научного сообщества, в общем виде проблема решению не поддалась, насколько мне известно, и по сей день.

Некоторые находки Бориса Андреевича поражают глубиной идеи и филигранной математической формой. Например, его расширенный вариант теоремы о некопируемости квантовой информации. Оператор расходимости вводится по аналогии с классическим выражением для расходимости двух случайных процессов и записывается в интегральном виде. Оказывается, что ему можно найти очень простое и понятное аналитическое представление. На мой вопрос о том, как же получилось это довольно неочевидное и красивое выражение, Борис Андреевич ответил просто: «догадался». Написанная для двумерного случая, эта теорема оставалась долгое время незамеченной и неиспользуемой. Только спустя несколько лет удалось доказать её в общем виде, и уже обобщенное выражение послужило основой для фундаментального результата — созданию генератора чисел с принципиально новым типом случайности, недоступным в классической физике.

Одно из несомненных последних достижений Бориса Андреевича, к счастью, опубликованных — классификация квантовых каналов связи и введение специальной информационной меры — совместимой квантовой информации. Эта мера является непосредственным обобщением классической информации Шеннона на квантовый случай, и её появление обусловлено использованием понятия непрерывной положительно-определенной операторно-значной меры, введённой Борисом Андреевичем ещё в начале 70-х годов, т.е. в до-квантово-информационное время! Детальное исследование совместимой квантовой информации послужило основой для моей дипломной работы, а впоследствии и для диссертации. Несмотря на идеологическую простоту, совместимая информация ока-

зывается очень удобным и эффективным инструментом в самых разных задачах, связанных с хранением и передачей квантовой информации, в первую очередь в квантовой криптографии, только-только набиравшей популярность в зарубежном научном сообществе 90-х годов. В российской науке адекватных специалистов по теории квантовой информации в то время можно было пересчитать по пальцам одной руки, и в силу ряда обстоятельств эта публикация осталась практически незамеченной. К сожалению, в современной литературе мне доводится видеть применение совместимой информации и даже её формальное введение спустя несколько лет после публикации Бориса Андреевича и безо всякого упоминания о нём.

Такая печальная ситуация с признанием его заслуг сложилась во многом из-за другой характерной черты Борис Андреевич — его аскетизма и оторванности от мира. Однажды, будучи у него в гостях, я поразился крайне спартанской обстановкой: стол, стул, кровать, шкаф... Он был крайне неприхотлив в быту и видимо того же ожидал от других. На международные научные конференции он ездил редко, ограничиваясь чтением публикаций в архиве электронных препринтов. Сам же публиковался слишком мало для его уровня интенсивности и результативности работы. Такой отшельнический способ научной деятельности возможно мог бы быть успешным где-то сто-двести лет назад, когда все более-менее значимые учёные знали друг друга. В современном мире, где идёт постоянная гонка достижений, наука перестала быть уделом кустарей-одиночек, пусть даже крайне талантливых. Сейчас результат получается усилием целого коллектива, часто международного. Роль живого общения с коллегами и вовлечённость в международную среду невозможно переоценить. Борис Андреевич же политическими и социальными аспектами науки не интересовался и рекламировать свою работу не хотел.

В ежедневном человеческом общении Борис Андреевич был человеком довольно лёгким. Он умел искренне радоваться маленьким простым подаркам, сочувствовать и думать за других людей. Из редких зарубежных поездок он не забывал привезти небольшой сувенир на память. Характерен эпизод, связанный с защитой моей кандидатской диссертации. На это важное событие из другого города приехала моя мама. В день защиты я был очень занят, и даже не столько наукой, сколько борьбой с бюрократическими проволочками отдельных личностей в диссертационном совете. Так что за приготовление вкусного банкетного стола взялась мама, и непосредственно на мой доклад она не попала, о чём потом переживала. Однако, как оказалось, Борис Андреевич заранее это предусмотрел и снял мой доклад на фото и видео. А после моей защиты Борис Андреевич светился от радости, пожалуй, не меньше чем я сам. Или вот ещё другой фрагмент: на мой день рождения мама организовала небольшой праздничный стол с тортом. Так вот радости от этого вкусного свежего торта Борис Андреевич получал больше всех!

Несмотря на дружеское отношение ко мне, в формальных вопросах Борис Андреевич оставался крайне принципиальным. На последнем семестре он читал лекции по квантовым случайным процессам. Тема интересная, но сложная — как в понимании, так и в математическом описании. Курс этот был факультативный и по выбору, так что слушали его немногие. Дополнительно к лекциям Борис Андреевич написал монографию, впрочем, существовавшую лишь в электронном виде. Казалось бы, с экзаменом, а это был мой последний экзамен, никаких проблем быть не должно. Оценки у меня были хорошие, так что красный диплом, независимо от последних оценок, как мне казалось, уже был обеспечен. Поэтому к экзамену я подготовился не очень тщательно, рассчитывая на лёгкую сдачу, особенно учитывая, что сдавать надо своему научному руководителю. Тем не менее, Борис Андреевич стал принимать экзамен строго как у первокурсников — спрашивал по билету. Увидел что в деталях я «плаваю», переключился на другие, более общие вопросы, и также не услышав чёткого и правильного ответа предложил мне на выбор: 2 балла или неявку. Надо ли говорить, что всю следующую неделю я усиленно читал его монографию? Пошло это на пользу не только мне, сдавшему в итоге курс на 5, но и Борису Андреевичу, получившему от меня ценные коррекции опечаток в формулах и рекомендации по улучшению монографии.

К сожалению, Борис Андреевич прожил довольно короткую жизнь. Его внезапная болезнь помешала осуществлению многих планов, наброски которых мы обсуждали в последние годы его жизни. Так сложилось, что позже мне пришлось сменить тему исследований и место работы. Однако знакомство с Борисом Андреевичем и время нашей совместной работы во многом определило развитие творческих интересов и повлияло на мою дальнейшую судьбу. Его жизненный путь, как падающая звезда на небе, оставила свой след и свет. Новому же поколению ещё предстоит разобраться с творческим наследием Бориса Андреевича и продолжить его дело.

Случайности в нашей жизни

Ю. В. Владимирова

Москва — огромный город и встретиться в нем случайно не так-то просто. Я и не помню практически не одной случайной встречи к кем-нибудь из знакомых за всю свою жизнь, кроме встреч с Борисом Андреевичем. Однажды, еще курсе на четвертом, моя подруга (она училась на журфаке МГУ и работала в каком-то театральном издании) позвонила мне и сказала, что есть возможность попасть на скрипичный концерт в Третьяковской галерее. Там иногда проходят камерные концерты, зрителей не более 150 человек. Каково же было мое удивление, когда там мы встретились с Борисом Андреевичем. Случайность? Он пришел на концерт со своей дочерью. Надо признаться, что мы оба не скрывали своего удивления. Мне Борис Андреевич в то время казался человеком, который живет только наукой и ничто больше его не интересует и не может интересовать. Я, как представитель «молодого поколения», наверное, тоже не производила на него впечатления любителя классической музыки. Но эта встреча вне стен лаборатории изменила атмосферу нашего общения, общаться стало просто и легко.

Еще один случай произошел как-то зимой, не в самую ясную и располагающую к прогулкам погоду, мы с мужем и дочкой вдруг решили поехать погулять на Арбат. И встретили там Бориса Андреевича, они с Верой Филипповной медленно прогуливались, поглощенные беседой. Мы еще потом с Вовой (моим мужем) обсуждали, какова вероятность встретиться в данном месте и в данное время. Случайность?

Однажды, когда Борис Андреевич заполнял, какие-то бумаги, то ли для переизбрания, то ли для гранта, и оказалось, что день рождения у нас с ним в один день. Случайность? Но мне, не буду скрывать, было очень приятно. Мы общались в основном только по науке, но иногда разговаривали о событиях в стране (по-моему, это его сильно волновало), в основном после научных обсуждений, когда я приезжала к нему домой, о музыке и о литературе. Все эти незначительные на первый взгляд «слу-

---

Ю. В. Владимирова, студентка и аспирантка Бориса Андреевича.

чайности» открыли для меня Бориса Андреевича Гришанина — честного и доброго Человека.

Борис Андреевич — Учитель с большой буквы

Д. В. Жданов

Эти воспоминания о замечательном человеке, Борисе Андреевиче Гришанине, который в очень значительной степени повлиял и на становление моей научной карьеры, и на мой взгляд на научную деятельность, да и в целом на моё мировоззрение.

С Борисом Андреевичем я познакомился во время одной из экскурсий, организованных для студентов-третьекурсников, когда я впервые попал в лабораторию квантовой информации, небольшую комнатку на третьем этаже Корпуса нелинейной оптики, с которой, как показало время, будут связаны многие годы дальнейшей учебы. Тематика этой лаборатории привлекла меня своим заманчивым антуражем, но выглядела страшновато. Наверное, по этой причине воспоминания от того первого посещения остались очень смутными и сумбурными. Запомнился лишь образ пожилого, худощавого, но очень жилистого и бодрого невысокого мужчины, который немного сбивчиво (приходилось подыскивать слова, понятные третьекурсникам) рассказывал какие-то заоблачные вещи, а я в с ступоре стоял и думал про себя: «Жуть какая! Куда же это меня нелегкая несет?» После этого визита я полгода страшился подойти к этой лаборатории. Моя нерешительность также подпитывалась местными зловещим студенческими преданиями, по которым новичка, сунувшего туда свой глупый нос, неизбежно ждала скорая, но мучительная смерть с отчислением. Но все-таки кураж взял свое, и я написал заявление уже в самый крайний срок. И этот момент, пожалуй, можно считать моментом настоящего знакомства с Борисом Андреевичем, который стал моим научным руководителем.

Первые встречи быстро развеяли первоначальный испуг. Борис Андреевич очень терпеливо пытался разобраться и ответить на все мои вопросы. Очень часто возникали ситуации непонимания, когда либо я никак

Д.В.Жданов, к.ф.–м.н., аспирант Б.А.Гришанина
Department of Chemistry, Princeton University, Princeton, NJ 08544, e-mail: dm.zhdanov@gmail.com

не мог внятно сформулировать непонятный мне момент, либо для меня слишком сложными были объяснения. И для меня было удивительным упорство и терпение, с которым Борис Андреевич встречал возникшее затруднение. Иногда беседы затягивались допоздна, но никогда не было случая, чтобы вопросы оставались без ответа. Но с другой стороны, Борис Андреевич очень жестко отграничил рубеж, за которым начиналось поле моей самостоятельной работы и очень пристально следил за тем, чтобы его помощь не переходила через эту границу. Позже я убедился, что это одна из самых красивых черт в характере Бориса Андреевича — быть одновременно чутким и открытым к новому, но при этом никогда не позволять наступать или переступать через свои убеждения, быть непримиримым к конформизму.

Однако, как выяснилось, подвох все же ожидал меня на первых шагах моей научной деятельности. Моим первым заданием было продолжить раскопки, брошенные одним из студентов, покинувшим лабораторию незадолго до моего прихода. После цикла бесед с Борисом Андреевичем у меня не осталось никаких вопросов относительно постановки и методики рассмотрения задачи, оставалось только применить эти сведения. И здесь меня ожидал тупик: я не только не мог двинуться вперед, но даже просто воспроизвести имеющиеся результаты. Позже выяснилось, что необычные эффекты, которые мне предстояло изучить, были результатом ошибки, закравшейся в расчёты. Я отчаянно пытался понять, в чем же дело, отчаянно бился с непослушными формулами, пытаясь посмотреть на задачу под разными углами. Мне было очень стыдно, что я оказался не в состоянии решить, казалось бы, элементарную задачку. Я почти перестал появляться в лаборатории, стараясь не попадаться Борису Андреевичу на глаза, при этом прекрасно понимая, что это не выход из положения.

И вот настал день, когда я, окончательно разуверившись в своих силах, решил, что нечего тянуть резину, что у меня нет никаких шансов в неравном противостоянии с колючим и безжалостным квантовым миром, а значит, нечего оттягивать неминуемый конец, и пришло время идти сдаваться. Я договорился о встрече и с виноватым видом начал долго и сбивчиво рассказывать своему научному руководителю о том, что я пытался сделать, какие попытки предпринимал и что из этого выходило. В конце я сделал печальный вывод, что вся моя работа была совершенно бесплодной. Борис Андреевич внимательно слушал, периодически задавая уточняющие вопросы. Он обратил мое внимание, что в своих поисках я дотронулся сразу до нескольких интересных вопросов, и заметил, что каждый из них является интересной темой для исследования. Это заставило меня несколько по-другому взглянуть на проделанную работу, до этого казавшуюся мне совершенно бесплодной, и я вынужден был признать, что мой наставник прав. Мы обсудили скорректированный план дальнейших работ. А в самом конце Борис Андреевич похвалил меня за проделанную работу. Значение этих слов для меня было огромным. По-

тому что я почувствовал не только то, что эта похвала — не пустые слова поддержки, а честно высказанное мнение моего научного руководителя, но и знак того, что меня слышат и понимают вне границ исключительно формальных отношений. Возникло какое-то опьяняющее ощущение от того, что ключевые идеи, которые будут составлять основу исследования, не выдуманы кем-то, подобно формулировке задачки из школьного учебника, а как-то совершенно незаметно и неожиданно созрели внутри меня. И что это является также самым важным результатом и для Бориса Андреевича. я В этот день я впервые покидал лабораторию с совершенно новым настроением, окрыленный. А через два месяца я с успехом защитил свою первую курсовую работу по вновь полученным результатам.

За время моей работы под руководством Бориса Андреевича было несколько случаев, когда новенькие студенты попросившиеся было в лабораторию сходили с дистанции на этом начальном этапе работы — явление, в общем-то, нетипичное для общефизфаковской практики. Именно это и служило источником грозной славы нашей лаборатории, а подчас и источником ворчливых пересудов. Главная причина этого заключалась в том, что с самого начала Борис Андреевич стремился построить научное руководство не в виде прямых указаний, что и как посчитать, и к какому числу, а в форме бесед, дискуссий и обмена мнений на равных, предоставляя с одной стороны очень большую самостоятельность, но при этом возлагая на студента и всю ответственность за результат. Теперь, оглядываясь назад, на примерах своих сокурсников ясно видишь значение этой достаточно жесткой политики. Становится очевидным, что со схожими трудностями рано или поздно, но неизбежно приходилось столкнуться всем моим однокашникам. И реакция на эти трудности на самом деле выступала как бы личным ответом на вопрос, интересно ли тебе связать свою дальнейшую деятельность с наукой. И тем моим сверстникам, к которым это осознание, а с ними зачастую и разочарование в правильности своего выбора, приходило только в аспирантуре, в итоге было существенно сложнее.

Да, работать с Борисом Андреевичем было сложно, потому что он не терпел нечестности и халтуры в любых ее проявлениях. Мне приходилось и на собственном опыте убедиться, что единственным, но бескомпромиссным условием помощи и поддержки является серьезное и самостоятельное отношение к делу. И здесь Борис Андреевич ставил планку так же высоко, как для себя самого, никогда ни на шаг не отступал от обозначенного рубежа. И такими же принципами он руководствовался не только в науке, но и в жизни. Правильнее, наверное, было бы сказать, что научное исследование не являлось для него оторванным от будничного существования выведением абстрактных значков на бумажке, но составляло с этим существованием единое целое. Ядром всей его исследовательской программы служило глубокое убеждение в том, что ответы на фундаментальные «вечные» нравственные и философские вопросы о

нашем существовании, о смысле жизни, о душе, о Боге если и могут быть получены, то только через глубокое осмысление сущности и смысла первооснов квантовой физики. Поэтому наука Бориса Андреевича — живая, а его оценки, размышления и выводы, а также связки и параллели со злободневными проблемами сложной современной российской жизни, которые его остро волновали, подчас парадоксальными, неожиданными и спорными, но всегда свежими, оригинальными и очень интересными.

Могу уверенно сказать: суждения Бориса Андреевича и открытые дискуссии, в которые нередко превращались пешие прогулки по окончании рабочего дня от Корпуса нелинейной оптики МГУ до ближайшей станции метро, существенно изменили мое мировоззрение. Даже если я в чем-то не соглашался с мнением Бориса Андреевича, оспорить его было чрезвычайно сложно — настолько продуманной, цельной и стройной всегда была его точка зрения. И, наверное, цельность и есть то самое главное слово, которым можно было бы охарактеризовать Бориса Андреевича, человека удивительной скромности, но с высоким чувством собственного достоинства, человека, в котором прямота и жесткость уравновешивались чуткостью и деликатностью, а требовательность к окружающим - еще более высокой требовательностью к самому себе. И требовательностью не только в моральном или научном плане. Борис Андреевич всегда был подтянутым и бодрым, активно занимался теннисом, много ездил на велосипеде. А побывав у него дома, я мог оценить, что несмотря на теоретический характер своей основной работы, он умело справляется и с практическими задачами домашнего ремонта. Мне кажется, что за какое бы дело он ни брался, его отношение неизменно оставалось осмысленным, вдумчивым, серьезным.

Кстати, упомянутый визит — один из первых, когда Борис Андреевич пригласил меня в гости после успешной защиты мною дипломной работы, запомнился мне еще и тем, что именно тогда я первые попробовал водку. Помню, что это обстоятельство привело тогда Бориса Андреевича в замешательство и вызвало чувство неловкости. Но зато я узнал об интересных и, кстати говоря, очень здоровых традициях употребления этого напитка в его семье. И еще почему-то запомнился чубайсовский ваучер, хранимый как несмываемая чёрная метка “прихватизаторам”, развалившим и разграбившим нашу Родину в лихие девяностые.

Если же говорить о самом жилище Бориса Андреевича, то даже по нынешним российским условиям его можно смело назвать аскетчным. Но при этом все на месте, в порядке, аккуратно, опрятно и в полной исправности. Уверен, что зарплата и пенсия у Бориса Андреевича были невысокими, но суть не в этом. Возможности получать дополнительный доход, в общем-то, на кафедре были. Но мне кажется, что ему не хотелось тратить свою энергию и время только лишь на изменение внешней формы. Надеюсь, я правильно понимаю его позицию. Думаю, что Бориса Андреевича сильно угнетал низкий достаток, но в первую очередь не потому, что ему ему хотелось большего комфорта, а потому что такое

отношение власти было слишком унизительным. И именно это, как мне кажется, в первую очередь и отталкивало его от любой возможности получения дополнительного дохода — Борис Андреевич был очень гордым и принципиальным человеком внутри, а не на показ, и подработка для него означала бы, что его сломали. Напрямую я Бориса Андреевича об этом не расспрашивал, могу только предполагать.

Конечно, как и у любого физика-теоретика старой закалки, у него собралась обширная библиотека. Были там книги и по истории, философии и живописи. Я знаю, что Борис Андреевич живописью интересовался, даже пытался рисовать, но, к сожалению, я об этом практически ничего не знаю. Знаю, что он совершал далекие поездки на велосипеде (в 65 лет!), активно занимался теннисом, даже хвалился, что ощущает свой прогресс в этом виде спорта, но опять же, я очень мало знаю об этом, многие детали я узнал лишь позже от его близких.

Трудно с этим смириться, но с уходом Бориса Андреевича от нас уходит целая эпоха, эпоха странных, трудных, неудобных людей, называемых настоящими русскими интеллигентами, для которых душа, честь и совесть не пустые звуки, людей не меняющих свои принципы как перчатки только лишь ради призрачного сиюминутного благополучия и покоя. На смену ей приходит моя эпоха, время безразличных конформистов, дешевого пафоса и тупого эпатажа, время когда настоящее, искреннее и подлинное с гиканьем и улюлюканьем вытесняется япоказным, продажным и картонным.

С уходом людей старшего поколения, таких как Борис Андреевич, мы потеряли что-то очень важное. Но хочется верить, что Борис Андреевич прав в своих рассуждениях, и духовное наследие не уничтожается безвозвратно и, подобно птице Феникс, бессмертно по своей физической природе. А значит, за периодом упадка неизбежно, пусть даже через много-много веков, будет следовать новый период, период расцвета и возрождения.

Часть II
«Мои воспоминания о Руслане». Воспоминания Б. А. Гришанина о Руслане Стратоновиче

В этом разделе приведены воспоминания Бориса Андреевича о его учителе, профессоре Руслане Леонтьевиче Стратоновиче, опубликованные им в книге о Руслане (см. Часть V, работа [8]).

Мое первое знакомство с Русланом было заочным и состоялось в МГУ ещё в студенческие годы, когда возник интерес к проблемам, связанным со случайными процессами. В разговоре с друзьями на научные темы — а такие разговоры в 60-е годы были нормой даже во время застолий — я услышал восторженное замечание о том, что у нас на факультете есть корифей по случайным процессам по фамилии Стратонович и что было бы здорово выйти на контакт с ним. Однако при этом тут же было замечено, что работать с ним могут далеко не все, а только те, кто способен работать самостоятельно, и что вообще это очень трудно. Следующее же заочное знакомство состоялось уже во время моей трудовой деятельности с 1963 по 1965 гг. в качестве инженера в теоретической лаборатории И. А. Большакова (в отраслевом институте, ныне известном как НИИ дальней радиосвязи) над проблемами обнаружения и измерения радиолокационных сигналов.

Игорь Алексеевич (И. А.) предложил познакомиться со свежими результатами Стратоновича (далее, Р. Л. или просто Руслан, как к нему обращались все его аспиранты и большинство коллег по кафедре) по условным марковским процессам на предмет их возможного приложения к текущим задачам. От него же я получил информацию о том, сколь важны для радиолокации результаты Стратоновича по теории коррелированных случайных точек и марковским процессам. В это время могло бы состояться и первое очное знакомство с Р. Л., когда И. А. затащил меня на семинар в институте радиотехники и электроники, где Стратонович должен был выступать с докладом. Однако в тот раз его доклад по каким-то причинам не состоялся, и это ещё больше повысило мой интерес к личности этого незаурядного, судя по всем отзывам, человека, для встречи с которым собралась столь солидная аудитория.

В те годы вышло постановление правительства, согласно которому выпускники вузов, ранее обязанные отработать по распределению на предприятия как минимум три года, получали право поступать в аспирантуру уже после двух лет работы на предприятии. Самое интересное и показательное, как к моему намерению пойти в аспирантуру отнёсся мой непосредственный начальник И. А. Большаков: он не только его одобрил, но и, посоветовав выбрать в качестве научного руководителя Стратоновича, даже предложил свою рекомендацию! Более того, он откуда-то узнал, что как раз в это время Стратонович читает на физическом факультете новый спецкурс «Теория информации», и предложил вместе прослушать его, что заодно давало и возможность ненавязчиво выяснить, не согласится ли лектор стать моим научным руководителем.

С первых же лекций курса яркое впечатление произвело обращение к фундаментальным соотношениям между теорией информации и термодинамикой. Кажется, уже тогда оригинальный ход мысли Р. Л. для меня лично стимулировал постановку глобального околонаучного вопроса о первопричине происхождения случайности в нашем мире. Этот вопрос, несмотря на появление определённых надежд (основанных на со-

ответствующей информационной интерпретации квантовой специфики физических состояний) на его научную конкретизацию и разрешение, в сколько-нибудь исчерпывающем виде не разрешён до сих пор, по крайней мере, в моём его понимании. Несмотря на это, он оказал существенное влияние на формирование моих научных интересов. И уже этим я обязан Руслану.

В конечном счёте, в спецкурсе была прочитана наиболее оригинальная часть, в которой было введено количественное определение ценности информации, особенно тесно связанное со статистической физикой. В качестве моей встречной реакции как слушателя с опытом инженера, привыкшего иметь дело с информацией на фоне шумов, у меня возникла идея естественного обобщения этого определения (на системы, в которых ограничение количества имеет место не по отношению к информации, представляющий непосредственный интерес, а лишь по отношению к информации о выходном состоянии некоторого заданного канала с шумами). И вот, с этим дополнительным предложением я подошёл к Р. Л. для важнейшего для меня на тот период времени разговора по поводу аспирантуры. В придачу к этому я подкрепился ещё и экземпляром собственной, опубликованной совместно с И. А. Большаковым, статьи по оптимизации обработки радиолокационного сигнала на выходе многоканального устройства его обнаружения.

Ход разговора при обсуждении статьи, однако, вдруг принял совершенно неожиданное направление. Р. Л. категорически отказался признавать её результаты, на мой взгляд, не только правильные, но и изложенные в предельно доступной — как это мне казалось до разговора — форме. Лишь в результате неожиданного озарения мне вдруг удалось сообразить, что же именно в тексте статьи могло быть воспринято вразрез с нашей с И. А. логикой и привести к столь фатальному повороту в разговоре. Для описания исходной схемы там был использован термин «оптимальное обнаружение»: а по мнению Р. Л., раз уж сказано «оптимальное» — то, по определению, больше оптимизировать уже нечего и приведённый анализ, предлагающий дополнительную оптимизацию, не имеет никакого смысла! Лишь осознав эту логику, я вдруг сообразил, что и такое понимание тоже возможно из-за отсутствия в тексте явного указания на то, что в тексте принималось за очевидное. На самом деле «оптимальность» схемы из-за её дискретизированности буквально таковой не соответствовала, а строго имела место лишь при подразумеваемом условии совпадения параметров сигнала с соответствующими ему параметрами канала дискретизации. Из этого разговора стало ясно, что стиль мышления моего собеседника радикально отличается от аналогов, с которыми мне приходилось сталкиваться до сих пор. Я понял, что он может воспринимать излагаемый материал самым неожиданным с точки зрения обычного человека образом и что, тем не менее, в конечном счёте это оказывается абсолютно логичным, но только основанным на иной интерпретации!

Самое интересное, что несмотря на столь непримиримо дискуссионный характер описанного разговора, его окончание было более чем позитивным: Р. Л. безо всяких колебаний согласился быть моим руководителем и сразу же предложил теорию ценности информации в качестве темы для диссертационной работы, полностью одобрив предлагаемый вариант обобщения исходной проблемы.

Описанная неординарность восприятия Русланом чужих научных текстов, по-видимому, была тесно связана с особенностями его собственного стиля научной работы. Именно оригинальность подхода, в первую очередь, выделяла его работы среди их аналогов. Пожалуй, наиболее наглядными и характерными примерами этого являются интеграл Стратоновича — в сопоставлении с интегралом Ито — и его концепция ценности информации — в сопоставлении с понятием ϵ-энтропии. Как я понимаю, Руслану было бы неинтересно заниматься задачами, которые не требовали введения новой идеологии. Несмотря на то, что многие его работы являются образцами математического искусства, в любой проблематике ему в первую очередь было интересно не просто получение новых математических результатов, а выявление или уточнение истинной роли и места рассматриваемой проблемы в едином здании науки.

Поразительным образом исключительность личности Руслана как учёного сочеталась с его предельным демократизмом в личных отношениях с коллегами и учениками. Что касается его взаимоотношений с аспирантами, то он относился к ним как к равноправным коллегам, не делая скидок на молодость и никоим образом не подавляя их личную инициативу. В соответствии с твёрдо установленным им правилом даже самые младшие по возрасту аспиранты обращались к нему «на ты». И это было не формальностью, а отображало истинное равноправие в личном общении, которое удивительным образом сочеталось с его пониманием собственной научной значимости. Как следствие, его ученики были одновременно и его друзьями, причём не только его лично, но и между собой. С Русланом было легко дружить, хотя, может быть, и не так просто работать. Но последнее — лишь потому, что даже самое дружеское общение с учёным такого масштаба по научным вопросам требует мобилизации всех собственных интеллектуальных ресурсов. Зато в человеческой памяти такое общение остаётся в ряду самых светлых воспоминаний.

Часть III
Избранные работы Б. А. Гришанина

Обобщённые квантовые измерения континуальных переменных

Б. А. Гришанин, В. Н. Задков

Аннотация Предложенная нами ранее [Phys. Rev. A **73**, 042312 (2006)] общая структура обобщённых квантовых измерений с минимальными возмущениями начальной информации рассматривается в приложении к измерению континуальных квантовых переменных и выявляются её качественные особенности в сравнении с аналогичным традиционным вариантом полностью деквантующего измерения, описываемого соответствующей ему положительно определённой операторной мерой.

1 Введение

Квантовые физические системы по сравнению с классическими обладают специфической особенностью, проявляющейся в существенно большем разнообразии их свойств в зависимости от способа их использования. В теоретическом плане это отражается в форме соответствующего многообразия аспектов, в рамках которых может рассматриваться, казалось бы, одна и та же — в классическом пределе — проблема. Поэтому неудивительно, что время от времени возникает необходимость возвращаться к изучению одних и тех же проблем под новым углом зрения. Как показал опыт (в частности, обсуждения парадокса Эйнштейна-Подольского-Розена [2]), такой возврат подчас может давать и практический выход

Эта статья была закончена и опубликована уже после кончины Бориса Андреевича в журнале «Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия», №5, с. 20–25 (2008).

Б. А. Гришанин, к. ф.–м.н., доцент
Кафедра общей физики и волновых процессов, Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва 119991, Россия
В. Н. Задков, д. ф.–м.н., профессор
Кафедра общей физики и волновых процессов, Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва 119991, Россия

(каковым в указанном примере можно считать создание квантовой криптографии [3]).

Одной из фундаментальных проблем квантовой теории является проблема квантового измерения, в обсуждении которой можно, вообще говоря, проследить множество различных аспектов [4, 5, 6, 7]. В контексте данной работы в качестве основных следует выделить два следующих аспекта, относящихся к возможностям отображения классическими системами информации, содержащейся в квантовых систем. Это, во-первых, выяснение принципиальной возможности получения абсолютно точных результатов измерения для совместно измеримых [8] и, во-вторых, возможность получения приближённых — с точностью до минимальной квантовой неопределённости — результатов измерения для совместно неизмеримых квантовых переменных [9] (обсуждение данной проблемы с использованием более общей математической техники и обзор литературы можно найти в [10]).

Предположение о классичности измерительной системы представлялось совершенно естественным для стадии освоения фундаментальных положений квантовой теории, на которой экспериментальное вмешательство в квантовый объект с извлечением из него информации представлялось довольно грубым процессом. Однако, в настоящее время, когда над квантовыми системами различного типа свободно выполняются серии обратимых квантовых преобразований и такие квантовые системы как фотоны свободно используются для реализации протоколов квантовой криптографии, такое ограничение, по нашему мнению, требует пересмотра. А именно, под измерительным прибором (далее — прибор) следует понимать в общем случае существенно квантовый объект, а даёт ли он результат измерения в квантовой или классической форме, определяется его окружением и, соответственно, должно отображаться конкретным видом преобразования, фактически реализованного в системе объект–прибор. Эта идея в наиболее компактной форме отображается введением преобразования *перепутывающего* измерения [11]. Оно в предельных случаях сводится либо к стандартному квантовому измерению с классическим представлением его результата, либо к унитарному преобразованию в системе объект–прибор, для которого результат измерения представляется в чисто квантовой форме перепутанности, устанавливающей 100%-ую корреляцию между выделенными переменными объекта и прибора.

Выделение перепутывающего измерения среди множества прочих преобразований связано с тем, что оно, не возмущая выделенный набор состояний $|k\rangle_A$ объекта, позволяет распределить его среди множества квантовых систем. В предельном случае чисто когерентного измерения такое преобразование при фиксированном начальном состоянии прибора $|0\rangle_B$ отображает начальные базисные состояния объекта $|k\rangle_A$ дублированными состояниями объект–прибор $|k\rangle_A |k\rangle_B$, а произвольные линейные комбинации $\sum_k c_k |k\rangle_A$ — такими же линейными комбинациями дублирован-

ных состояний. Когерентные же квантовые соотношения между волновыми функциями объекта теперь переносятся на те же соотношения в системе объект–прибор, т.е. не сохраняются в объекте в силу невозможности дублирования существенно квантовой информации. Стандартное же квантовое измерение сопровождается дополнительной потерей начальных фазовых соотношений. Идея квантового измерения, таким образом, в общем случае связывается не с классичностью физического представления добытой информации, а с более первичным понятием классичности — возможностью её неограниченного размножения. Такой подход позволяет рассматривать процессы извлечения и преобразования квантовой информации с единых позиций, пригодных как для классических, так и для квантовых приборов.

Помимо концепции перепутывающего измерения как установления взаимно однозначного соответствия между наборами классически совместных состояний квантовых систем объекта и прибора, по аналогии со случаем классического прибора, можно также ввести обобщённые типы измерения. Как показано в [1], можно выделить два основных варианта измерения как установления соответствия посредством классического информационного индекса: а) "нечёткое" измерение как установление соответствия между классически совместным набором состояний объекта и неполностью различимым набором квантовых состояний прибора (фактически, это простейший частный случай т.н. "рыхлых" измерений [12, 13]) и б) частично разрушающее квантовое измерение как установление соответствия между не полностью различимым набором состояний объекта и классически совместным набором состояний прибора.

В [1] были рассмотрены примеры указанных обобщённых измерений двухуровневых квантовых систем. Однако, существенный интерес представляет и рассмотрение такого типа измерений для случая систем с бесконечномерными пространствами состояний, когда речь идёт об измерении динамических переменных с континуальными значениями. В частности, особый интерес представляет — в силу наличия естественного простого соответствия между наборами канонических переменных в системе объект–прибор — измерение с помощью классически совместного набора координат двух осцилляторных (скажем, фотонных) мод, играющих роль измерителя, двух классически несовместных квадратурных компонент одной моды, играющей роль объекта. Тогда можно ожидать, что простота устанавливаемого при таком измерении соответствия является основанием для возможности его экспериментальной реализации, например, методами нелинейной оптики. Кроме того, измерения данного типа выявляют в наиболее общей и концентрированной форме фундаментальные свойства процесса извлечения информации из квантовых систем, начиная с квантовых ограничений на потенциальную точность измерения и заканчивая количественными характеристиками шумов деквантования.

2 Преобразование континуального измерения канонического набора квантовых переменных

Простейшим и наиболее фундаментальным примером измерения континуальных переменных является рассматриваемое практически во всех учебниках квантовой механики измерение координаты электрона $\hat{q}$. Как известно, только эта половина полного набора канонических динамических переменных $\hat{X}^T = (\hat{q}, \hat{p})$ (T — символ матричного транспонирования) квантовой системы с одной степенью свободы в квантовой теории, в отличие от классической, может быть измерена точно.

Для установления боле полной связи квантовой и классической теории логически необходимо рассмотрение и такого измерения, которое даёт минимально возможную неточность для обеих канонических переменных $\hat{X}$ и обеспечивает в квазиклассическом пределе $\hbar \to 0$ их точное измерение. Измерения такого типа не только возможны [9], но и при соответствующих условиях являются оптимальными [14, 10, 15]. В их основе лежит тот простой факт, что квантовая система с удвоенным числом степеней свободы содержит столько же совместно измеримых операторов координат, сколько содержится в полном наборе канонических переменных объекта. Измерения данного типа естественно возникают в рамках подхода [1], включающего обобщение на существенно квантовые измерительные приборы на основе концепции перепутывающего измерения и отказ от требования неразрушающего характера измерения на квантовом уровне точности.

2.1 Супероператор частично разрушающего измерения

Измерение в компактной форме описывается супероператором, отображающим матрицы плотности объекта $\hat{\rho}_A$ в матрицы плотности системы объект–прибор $\hat{\rho}_{AB}$. Поскольку начальное состояние измерительного прибора целесообразно считать фиксированным в форме чистого состояния $\hat{\rho}_B^0 = |0\rangle_B \langle 0|_B$, то, соответственно, полное преобразование в системе объект–прибор, которое для произвольных начальных состояний может быть реализовано различными эквивалентными способами, не представляет интереса.

Супероператор, описывающий в общем случае частично разрушающее перепутывающее измерение набора неортогональных состояний объекта $|\alpha)_A$ с помощью набора ортогональных, т.е. классически различимых, состояний прибора $|\alpha\rangle_B$ имеет вид:

$$\mathcal{M} = \sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}\sqrt{\nu_\alpha\nu_\beta}\,(\alpha|_A \odot |\beta)_A\,|\alpha)_A\,|\alpha\rangle_B\,\langle\beta|_B\,(\beta|_A\,. \tag{1}$$

Здесь $R_{\alpha\beta}$ — матрица перепутанности, удовлетворяющая условиям $R = R^+$, $R_{\alpha\alpha} \equiv 1$, $R \geqq 0$ и определяющая степень деквантования результатов измерения за счёт взаимодействия прибора с дефазирующей системой D (в простейшем случае отображаемой матрицей перепутанности вида $R_{\alpha\beta} = (\alpha\,|\,\beta)_D$ [16]), а набор положительных чисел ν_α описывает степень представленности соответствующих состояний $|\alpha)_A$ и определяет соответствующую положительную операторно-значную меру (POVM)

$$\hat{E}_\alpha = \nu_\alpha\,|\alpha)_A\,(\alpha|_A, \quad \sum \hat{E}_\alpha = \hat{I}_A. \tag{2}$$

Предельные случаи $R_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ и $R_{\alpha\beta} = 1$ описывают стандартное проективное измерение, соответствующее полной дефазировке измеряемых состояний, и обратимое изометрическое отображение гильбертова пространства объекта в пространство состояний объект–прибор, соответствующее отсутствию дефазировки.

В случае ортогонального набора состояний $|\alpha)_A = |\alpha\rangle_A$ данный супероператор преобразует начальные состояния данного вида в состояния $|\alpha)_A\,|\alpha\rangle_B$ системы объект–прибор, т.е. является неразрушающим. Неортогональность же измеряемых состояний приводит к невозможности их сохранения и, соответственно, к частично разрушающему характеру измерения. При этом нетрудно видеть, что подалгебры классически совместимых состояний и соответствующих им динамических переменных асимптотически — при наличии соответствующего малого параметра неклассичности — не искажаются, т.е. данное измерение, рассматриваемое на классическом уровне, является точным и невозмущающим.

Ограничимся для простоты случаем одномерного (одномодового) объекта, которому соответствует коммутатор канонических переменных

$$\hat{X}\hat{X}^T - (\hat{X}\hat{X}^T)^T = C = \begin{pmatrix} 0 & i\hbar \\ -i\hbar & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая на плоскости с координатами q, p равномерную сетку с точками $X_\alpha = (q_\alpha, p_\alpha)$, выберем в выражении (1) в качестве измеряемых состояний $|\alpha)_A$ состояния, получаемые преобразованием сдвига $U(X_\alpha) = \exp\left(-X_\alpha^T C^{-1}\hat{X}\right)$, начального состояния $|0)_A$:

$$|\alpha)_A = U(X_\alpha)\,|0)_A; \tag{3}$$

при этом $U^{-1}(X_\alpha)\hat{X}U(X_\alpha) = \hat{X} + X_\alpha$. При этом в качестве базисного состояния $|0)_A$ можно выбрать состояние, характеризуемое проектором

$$|0)_A\,(0|_A = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{\Gamma - \frac{1}{\varepsilon}\hat{X}^T Q_0 \hat{X}}, \tag{4}$$

получаемым как предел гауссовской матрицы плотности с квадратичной формой, определяющей в общем случае сжатое состояние с повёрнутым эллипсом рассеяния.

Кратность состояний при этом должна быть выбрана в виде

$$\nu_\alpha = \frac{dX_\alpha}{2\pi\hbar}, \tag{5}$$

где dX_α описывает объём ячейки в расчёте на одно состояние $|\alpha)_A$. В этом случае, как это хорошо известно для случая $|\alpha)_A$ в форме когерентных состояний [10, 17], набор операторов (2) в пределе $dX_\alpha \to 0$ действительно соответствует POVM и, следовательно, преобразование (1) задаёт соответствующее обобщённое измерение с результатами измерения, представленными в форме классически различимых (ортогональных) состояний $|\alpha\rangle_B$. Преобразование континуального измерения набора канонических квантовых переменных, таким образом, определяется как предельный переход к бесконечно плотной сетке. Соответствующее отображение проиллюстрировано на рис. 1.

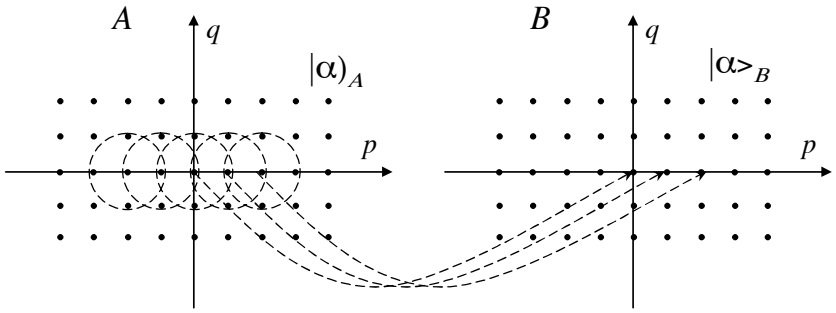

Рис. 1 Отображение элементарных состояний в процессе обобщённого измерения. Показана квантовая неопределённость значений координат и импульсов, соответствующая измеряемым состояниям объекта $|\alpha)_A$, отображаемым классически различимыми состояниями прибора $|\alpha\rangle_B$.

Для установления на основе описанного отображения квантовых состояний соответствия между переменными $\hat{X}$ объекта и соответствующими коммутирующими переменными $\hat{X}_B$ следует учесть представление

$$\hat{X}_B = \sum_\alpha X_\alpha \, |\alpha\rangle_B \, \langle\alpha|_B \tag{6}$$

для дискретных показаний измерительного прибора. В пределе бесконечно плотной сетки состояний это выражение описывается обобщёнными матричными элементами вида $(\hat{X}_B)_{X'X''} = \int X\delta(X'-X)\delta(X''-X)dX$. Фактически при описанных характеристиках измерение (1) отличается

от рассмотренных в [9, 10, 14, 12] лишь одним новым качеством — в общем случае существенно квантовым представлением выходной информации, выражаемым наличием матрицы перепутанности $R_{\alpha\beta}$, отличной от единичной.

Рассматриваемое измерение полностью неселективно по отношению к трансляциям в фазовом пространстве канонических переменных $\hat{X}$ и в этом отношении является аналогом неселективного частично разрушающего измерения в двухуровневой системе [1]. Однако, в отличие от последнего, инвариантного относительно любого унитарного преобразования входного состояния, оно всё же селективно по отношению, например, к операции сжатия или поворота эллипса рассеяния входного состояния, определяемых квадратичной формой Q_0.

2.2 Количественные характеристики измерения

Во-первых, рассчитаем для начального состояния $\hat{\rho}_A = |\alpha_0)\,(\alpha_0|$ среднеквадратичную ошибку измерения

$$\Delta_S = \mathrm{Tr}\,(\hat{X}_B - X_{\alpha_0})^T Q (\hat{X}_B - X_{\alpha_0}) \mathcal{M}\hat{\rho}_A \tag{7}$$

для параметров этого состояния, характеризующую "полуклассические" свойства измерительного канала. Здесь Q — матрица квадратичной формы, учитывающая вклад составляющих компонент измеряемого вектора. При таком подходе фактически оценивается информативность полуклассического информационного канала $\alpha_0 \to \hat{\rho}_B = \mathrm{Tr}_A \mathcal{M}\hat{\rho}_A$, реализованного с помощью измерения $\mathcal{M}$. Другой мерой информативности является информация Холево [18].

Подставляя в (1) в качестве начального состояния гауссовскую матрицу плотности в форме $\hat{\rho}_A = \exp\left[\Gamma - (\hat{X} - X_{\alpha_0})^T Q_0 (\hat{X} - X_{\alpha_0})/\varepsilon\right]$ при $\varepsilon \to 0$, которая соответствует когерентно смещённому преобразованием $U(X_{\alpha_0})$ вакууму $|0)$, $\hat{X}^T Q_0 \hat{X}\,|0) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}|Q_0 C|\,|0)$, с использованием стандартной техники преобразований гауссовских операторов [19] получаем для распределения X_α гауссовскую плотность с матрицей рассеяния $2K_0$, вдвое превышающей вакуумную:

$$\nu_\alpha |\,(\alpha\,|\,\alpha_0)_A\,|^2 \to \frac{dX_\alpha}{\det(4\pi K_0)} e^{-\frac{1}{4} X_\alpha^T K_0^{-1} X_\alpha}, \quad K_0 = \frac{1}{2} C \mathrm{sign} Q_0 C$$

и, соответственно,

$$\Delta_S = \sum (X_\alpha - X_{\alpha_0})^T Q (X_\alpha - X_{\alpha_0}) \nu_\alpha |\,(\alpha\,|\,\alpha_0)_A\,|^2 = 2\,\mathrm{Tr}\,Q K_0.$$

Для квадратичных форм с матрицами $Q = Q_0$, соответствующими гамильтониану $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2\hat{q}^2/2$ одного и того же гармонического

осциллятора, отсюда следует содержащийся в неявном виде в [10] результат $\Delta_S = \mathrm{Tr}|QC| = \hbar\omega$, т.е. квадратичная неопределённость равна удвоенной энергии вакуумных флуктуаций. Их удвоение имеет принципиальный характер и обусловлено добавлением к начальным квантовым флуктуациям переменных $\hat{X}$ в состоянии $|\alpha_0)_A$ шумов деквантования, содержащихся в переменных $\hat{X}_B$ и независимых от этих флуктуаций.

Среднеквадратичная ошибка для канонических операторов объекта $\hat{X}$

$$\Delta_Q = \mathrm{Tr}\,(\hat{X}_B - \hat{X})^T Q(\hat{X}_B - \hat{X})\mathcal{M}\hat{\rho}_A, \tag{8}$$

имеющая место после выполнения измерения характеризует измерение как квантовый канал, дающий информацию о классически несовместных квантовых переменных объекта. Аналогичный предыдущему расчёт для состояния объекта $\hat{\rho}_A = |\alpha_0)\,(\alpha_0|$ теперь, с учётом инвариантности разностного оператора $\hat{X}_B - \hat{X}$ и его диагональности по состояниями $|\alpha\rangle_B$, даёт

$$\begin{aligned}\Delta_Q = &\sum \nu_\alpha\,(\alpha|\,\hat{\rho}_A\,|\alpha)\,\langle\alpha|_B\,(\alpha|_A(\hat{X}_B - \hat{X})^T Q(\hat{X}_B - \hat{X})\,|\alpha)_A\,|\alpha\rangle_B = \\ &= (0|_A\,\hat{X}^T Q\hat{X}\,|0)_A = \mathrm{Tr}QK_0,\end{aligned}$$

что в два раза меньше величины ошибки для измерителя как полуклассического канала.

Эта ошибка равна минимально возможной, совместимой с некоммутативностью операторов $\hat{X}$ и, соответственно, $\hat{X}_B - \hat{X}$. Таким образом, можно утверждать, что измерение (1) не только даёт эффективную оценку для параметров когерентного гауссовского состояния, но и может рассматриваться как способ получения оптимальной оценки для самих канонических переменных $\hat{X}$ квантового объекта независимо от вида матрицы перепутанности R и, соответственно, от степени когерентности выполняемого преобразования.

Частично разрушающий характер измерения (1) проявляется в изменении начального состояния при отображении $\hat{\rho}_A \to \hat{\rho}'_A = \mathcal{M}_A\hat{\rho}_A$, где $\mathcal{M}_A = \mathrm{Tr}_B\mathcal{M}$ — супероператор преобразования состояний объекта безотносительно к результату измерения. В случае двухуровневого объекта соответствующий супероператор представляется через векторы операторов квазиспина $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ в форме $\mathcal{M}_A = \frac{1}{3}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \odot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ [1] и разрушающий характер измерения для начального состояния $\hat{\rho}_A = \frac{1}{2}(\hat{I} + \mathbf{s}\,\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ проявляется в его деполяризации $\mathbf{s} \to \frac{1}{3}\mathbf{s}$. В рассматриваемом случае имеем $\mathcal{M}_A = \int \frac{dX_\alpha}{2\pi\hbar}\,|\alpha)_A\,(\alpha|_A\,(\alpha|_A \odot |\alpha)_A$, и для начального состояния $\rho_A = |0)_A\,(0|_A$ получаем искажённое состояние в виде

$$\hat{\rho}'_A = \int \frac{dX_\alpha}{2\pi\hbar} \left| \left(\alpha \mid 0\right)_A \right|^2 \left|\alpha\right)_A \left(\alpha\right|_A =$$

$$= \int \frac{dX_\alpha}{\det{}^{1/2}(4\pi K_0)}\, e^{-\frac{1}{4}X_\alpha^T K_0^{-1} X_\alpha} \left|\alpha\right)_A \left(\alpha\right|_A =$$

$$= \frac{1}{\det{}^{1/2}(6\pi K_0)} \mathcal{W} e^{-\frac{1}{6}\hat{X}^T K_0^{-1}\hat{X}},$$

где символ $\mathcal{W}$ обозначает симметричное по операторам $\hat{q}, \hat{p}$ упорядочение Вигнера. Соответствующая этой гауссовской матрице плотности корреляционная матрица равна $3K_0$. Нетрудно видеть, что и для смещённых начальных состояний вида $\left|\alpha_0\right)_A$ возмущение при измерении также сводится к утроению матрицы рассеяния $K_0 \to 3K_0$. В случае же произвольных гауссовских состояний $\hat{\rho}_A$ с корреляционной матрицей K и средним значением $X_0 = \left\langle \hat{X} \right\rangle$ искажённое состояние характеризуется изменением корреляционной матрицы $K \to K + 2K_0$ при сохранении среднего значения согласно справедливому для корреляционных матриц гауссовских матриц плотности соотношению

$$\sum \nu_\alpha \left(\alpha\right| \hat{\rho}_A \left|\alpha\right) \left|\alpha\right) \left(\alpha\right| \to K + 2K_0.$$

Для чистого когерентного состояния $\hat{\rho}_A = \left|\alpha_0\right) \left(\alpha_0\right|$ соответствует $3K_0$.

3 Шумы деквантования

С учётом изометричности преобразования $\mathcal{M}$ при $R_{\alpha\beta} \equiv 1$ имеем для произвольной скалярной функции f тождество $\mathrm{Tr} f[\mathcal{M}\hat{\rho}_A] = \mathrm{Tr} f[\hat{\rho}_A]$, из которого следует, что что энтропия системы объект–прибор после такого полностью когерентного измерения совпадает с исходной энтропией объекта и равна нулю в случае его чистого состояния, которому соответствует матрица плотности $K = K_0$: $S_{AB}[K]\big|_{K=K_0} = 0$. Из-за неортогональности состояний $\left|\alpha\right)_A$ они кодируются в сложной комбинации ортогональных двухкомпонентных состояний $\left|\alpha\right)_A \left|\alpha\right\rangle_B$. Явный вид отображения квантовой информации $A \to A{+}B$ задаётся соответствующим выражениями для переполненного базиса

$$\left|\alpha\right)_A \to \sum_\beta \sqrt{\nu_\beta} \left(\beta \mid \alpha\right)_A \left|\beta\right)_A \left|\beta\right\rangle_B .$$

При переходе к стандартному измерению двухчастичные состояния $\left|\alpha\right)_A \left|\alpha\right\rangle_B$ приобретают дополнительную степень свободы, которая соответствует независимым ортогональным состояниям $\left|\alpha\right\rangle_D$ дефазирующей подсистемы — дробовой шум. Тем самым энтропия системы объект–

прибор отражает независимые флуктуации деквантования и, соответственно, неограниченно растёт с уменьшением объёма ячейки измерительной сетки.

Для расчёта эффекта дробового шума, вносимого дефазирующей подсистемой при частичном деквантовании результата измерения, рассмотрим совместную матрицу плотности

$$\rho^{AB}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}\rho^{A}_{\alpha\beta}\sqrt{\nu_\alpha}\sqrt{\nu_\beta}. \tag{9}$$

При $R_{\alpha\beta} \equiv 1$ она определяет изометрическое отображение входной матрицы плотности и их энтропии совпадают, что соответствует отсутствию шумов деквантования. Неравенство же $R_{\alpha\beta} \neq 1$ описывает селекцию дефазирующей подсистемой классически совместных состояний прибора $|\alpha\rangle_B$, когерентно связанных при $R_{\alpha\beta} \equiv 1$. Водимая ею фазовая неопределённость в системе объект–прибор нарушает когерентность отображения и приводит, тем самым, к деквантованию результирующего набора состояний. Естественной мерой вносимых шумов деквантования является соответствующее приращение энтропии по сравнению с полностью когерентным измерением:

$$\Delta S_d = S[\hat{\rho}_{AB}] - S[\hat{\rho}_{AB}]\big|_{R\equiv 1} = S[\hat{\rho}_{AB}] - S[\hat{\rho}_A]. \tag{10}$$

Рассчитаем ΔS_d для *квазиклассических* матриц плотности объекта $\hat{\rho}_A$, которые определим следующим образом:

$$\rho^{A}_{\alpha\beta} \approx dX_\alpha w(X_\alpha)\,(\alpha\,|\,\beta), \tag{11}$$

где $w(X_\alpha)$ определяет вигнеровскую плотностью распределения вероятностей, медленно меняющуюся в масштабах элементарной фазовой ячейки с объёмом $2\pi\hbar$. Соответствующая энтропия рассчитывается с учётом соотношения $(\rho^{A}_{\alpha\beta})^n = [w(X_\alpha)2\pi\hbar]^{n-1}w(X_\alpha)dX_\alpha\,(\alpha\,|\,\beta)$, вытекающего из условия полноты (2) состояний $|\alpha\rangle$ и выражения (5), и даётся хорошо известным в статистической физике квазиклассическим выражением

$$S[\hat{\rho}_A] = -\int \log[w(X)2\pi\hbar]w(X)dX. \tag{12}$$

Здесь фазовый объём $2\pi\hbar$ отображает квантовую неразличимость состояний α, учитываемую в представлении (11) фактором $(\alpha\,|\,\beta)$.

При расчёте же энтропии $S[\hat{\rho}_{AB}]$ с учётом наличия дефазировки $R_{\alpha\beta}$ рассмотрим случай интенсивной дефазировки, когда недиагональные матричные элементы $R_{\alpha\beta}$ спадают как функция разности $X_\alpha - X_\beta$ значительно быстрее, чем на масштабе элементарного фазового объёма $2\pi\hbar$, соответствующего фактору квантовой неортогональности $(\alpha\,|\,\beta)$. Тогда в выражении для совместной матрицы плотности $\hat{\rho}_{AB}$ последним фактором можно пренебречь и исходить из выражения

$$\rho^{AB}_{\alpha\beta} \approx dX_\alpha w(X_\alpha) R_{\alpha\beta}.$$

Эта аппроксимация позволяет получить аналогичную вышеприведённой асимптотическую оценку $S[\hat{\rho}_{AB}] = -\int \log[w(X)v_c]w(X)dX$, которая взамен элементарного квантового объема содержит соответствующий $R_{\alpha\beta}$ *объём когерентности* v_c. Этой оценке соответствует следующее выражение для приращения энтропии

$$\Delta S_d = \int \log\left(\frac{2\pi\hbar}{v_c}\right) w(X)dX, \tag{13}$$

справедливое при $v_c \ll 2\pi\hbar$ и в общем случае учитывающее возможную зависимость объёма когерентности v_c от фазовых переменных X. Данная эвристическая оценка будет строгой, если предположить специальную структуру матрицы перепутанности $R_{\alpha\beta} = (\alpha \mid \beta)_v$, где скалярное произведение воспроизводит такое же для когерентных состояний, но его соотношение с алгеброй операторов отличается заменой постоянной Планка $\hbar \to v_c/2\pi$. В этом предположении нет никакого противоречия с основами квантовой теории, поскольку единственными условиями, которым удовлетворяет матрица $R_{\alpha\beta}$, является её положительность и равенство единице диагональных элементов.

Таким образом, деквантование измеренной информации сопровождается введением шумов деквантования, вклад которых в полную квантовую энтропию системы объект–прибор в пределе стандартного измерения стремится к бесконечности. Этот шум, однако, не отражается на точности измерения, поскольку показания прибора X_α асимптотически не различают потенциально различимые состояния $|\alpha\rangle_B$ в бесконечно малой области значений $X_\alpha \in V$, которой соответствует неограниченно большое число объёмов когерентности $v_c \to 0$. Погрешность измерения лимитируется при этом только внутренней квантовой неопределённостью измеряемых переменных $\hat{X}$.

4 Заключение

Таким образом, в приложении к измерению континуальных переменных, общее определение частично разрушающего перепутывающего квантового измерения [1] для случая канонического набора измеряемых переменных даёт обобщение обсуждавшегося ранее измерения некоммутирующих квантовых переменных [9, 10, 14, 15] на случай квантового измерительного прибора, извлекающего результирующую информацию не обязательно в классической, но допускающей её неограниченное размножение форме.

Искажение входных состояний объекта при рассмотренном типе измерения связано с представлением в классической форме квантово несов-

местных переменных и соответствующих им наборов неортогональных состояний.

Деквантование выходной информации приводит к внесению шума деквантования, обусловленного взаимодействием объекта и измерителя с дефазирующей подсистемой. Этот шум в пределе стандартного полностью деквантующего измерения приводит к увеличению полной квантовой энтропии в системе объект–измерительный прибор до бесконечности, не отражаясь на качестве измерения.

Данная работа была частично поддержана грантом РФФИ №07–02–00128–а и грантом INTAS No. 7904.

Список литературы

1. B. A. Grishanin and V. N. Zadkov, Phys. Rev. A **73**, 042312 (2006).
2. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
3. Ch. H. Bennett and G. Brassard, in: *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer, System and Signal Processing, Bangalore, India* (IEEE, New York, 1984, p. 175).
4. *Quantum Theory and Measurement*, edited by J. A. Wheeler and W. H. Zurek (Princeton University Press, Princeton, 1983).
5. G. Ludwig, in: *Foundations of Quantum Mechanics and Ordered Linear Spaces*, Lecture Notes in Phys. **29**, 122 (1974).
6. V. B. Braginsky and F. Y. Khalili, *Quantum Measurement* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
7. М Б. Менский, УФН **168**, 1017 (1998).
8. J. von Neumann, *Mathematical Foundation of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955).
9. S. D. Personick, Bell Syst. Tech. J. **50**, 213–216 (1971).
10. К. Хелстром, *Квантовая теория проверки гипотез и оценивания* (Мир, Москва, 1979).
11. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, Phys. Rev. **A 68**, 022309 (2003).
12. M. B. Mensky, *Quantum measurements and decoherence: models and phenomenology* (Kluwer Academic: Dordrecht, 2000).
13. M. Schlosshauer, Rev. Mod. Phys. **76**, 1267 (2004).
14. Б. А. Гришанин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **11** (5), 127 (1973); e-print quant-ph/0301159 (2003).
15. А. С. Холево *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории* (Наука: Москва, 1980).
16. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, Laser Phys. Lett. **2**(2), 106–111 (2005).
17. Дж. Клаудер, Э. Сударшан, *Основы квантовой оптики* (Мир: Москва, 1970).
18. A. S. Holevo, Probl. Inf. Trans. **9**, 177 (1973).
19. Б. А. Гришанин, *Квантовая электродинамика для радиофизиков* (МГУ: Москва, 1981).

Информационный анализ квантового невозмущающего измерения фотона в резонаторе

Д. Н. Янышев, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков

Аннотация Концепция перепутывающего квантового измерения продемонстрирована на имеющем фундаментальное значение эксперименте по квантовому невозмущающему измерению наличия фотона в резонаторе с помощью пробного атома [G. Nogues et. al. , Nature, **400**, 239 (1999)]. Выполнен квантово-информационный анализ данного эксперимента. Продемонстрирован механизм передачи информации в схеме невозмущающего измерения в случае классического и квантового формализма и показано, что результаты в обеих случаях совпадают. Это является следствием копирования классической части исходной квантовой информации, связанной с набором состояний в квантовом объекте.

1 Введение

В связи с быстрым прогрессом в последние годы методов обработки, хранения и передачи квантовой информации [1] произошло существенное переосмысление целого ряда основ традиционной квантовой механики и квантовой физики, приведшее, в частности, к переосмыслению понятия

Эта статья была закончена и опубликована уже после кончины Бориса Андреевича в журнале «Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия», №6, с. 50–54 (2009).

Д. Н. Янышев
Кафедра общей физики и волновых процессов, Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва 119991, Россия
Б. А. Гришанин, к. ф.–м.н., доцент
Кафедра общей физики и волновых процессов, Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва 119991, Россия
В. Н. Задков, д. ф.–м.н., профессор
Кафедра общей физики и волновых процессов, Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва 119991, Россия

квантового измерения, когда традиционное определение квантового измерения [2, 3] как установления однозначного соответствия между собственными состояниями измеряемой переменной *квантового* объекта и показаниями *квазиклассического* прибора не соответствует современному пониманию роли квантовых эффектов в физическом эксперименте. Наряду с проблемой одномоментного извлечения из квантовой системы информации непосредственно в классической форме в задачах, где используются специфические особенности квантовой информации, центральной является проблема ее преобразования из одной формы в другую, в то время как её деквантование не является обязательным и, наоборот, во многих случаях практическая ценность преобразования связана именно с сохранением когерентных свойств квантовых состояний.

Одной из привлекательных с физической точки зрения является концепция т.н. *квантовых невозмущающих измерений* [4, 5, 6]. Как показано в [7, 8], само понятие невозмущающего квантового измерения, будучи введено в более общей форме *перепутывающего* измерения, на самом деле может рассматриваться безотносительно к степени потери квантовой когерентности, т.е. степени деквантования показаний прибора (и, одновременно, объекта) в реализуемом в результате измерения отображении $|k\rangle_A \to |k\rangle_A |k\rangle_B$ измеряемых квантовых состояний объекта $|k\rangle_A$ в состояния системы объект–прибор $|k\rangle_A |k\rangle_B$. Даже в случае полностью когерентного — чисто квантового представления результирующей информации — наиболее фундаментальное качество классической информации, связанной с индексами k в этом измерении, тем не менее, адекватно представлено. Оно отображается принадлежностью информационного индекса k сразу к двум различным физическим системам A и B, т.е. фактом копирования и размножения классической части исходной квантовой информации, связанной с набором состояний $|k\rangle_A$ в начальном квантовом ансамбле объекта.

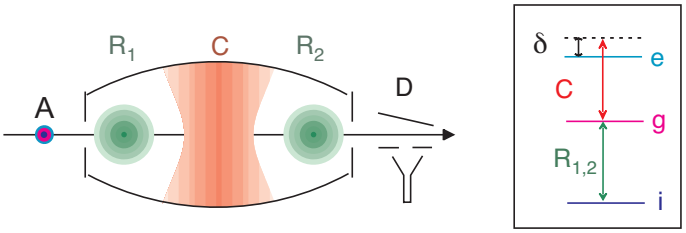

Рис. 1 Схема эксперимента по квантовом невозмущающему измерению наличия фотона (C) в резонаторе с помощью пробного атома (A), пролетающего через резонатор.

Описанная выше концепция квантового измерения может быть продемонстрирована на имеющем фундаментальное значение примере невозмущающего квантового измерения наличия фотона в резонаторе с помо-

щью пробного атома, который был реализован в эксперименте [9] (рис. 1). В нем пробный атом (A) выполняет полностью когерентное перепутывающее измерение начального состояния числа квантов резонаторной моды (C). Это состояние далее деквантуется в результате излучения атомом фотона, фиксируемого затем фотодетектором (D). Состояние последнего является результатом измерения в традиционной полностью деквантованной форме. Перепутывающее же измерение наиболее общего вида соответствует промежуточному во времени состоянию системы атом–фотон–детектор, когда излучённый квант ещё полностью не поглотился и соответствующая квантовая переменная этой составной системы, переносящая информацию об измеренном числе квантов резонатора, реализует перепутанное измерение с промежуточной степенью когерентности.

Учитывая важность данного эксперимента и его тесную связь с проблематикой обработки квантовой информации, в данной работе выполнен информационный анализ квантовых каналов связи, соответствующих данному эксперименту. А именно, расчитана классическая информация Шеннона, применимая к классическому каналу *число квантов резонатора–отсчёты фотодетектора* и квантовая когерентная информация, применимая к квантовому каналу *квантовые состояния резонатора–квантовые состояния атома.*

2 Модель квантового невозмущающего измерения

Для изучения процесса квантового невозмущающего измерения фотона в резонаторе нами была исследована принципиальая схема эксперимента [9]. В ней в качестве прибора выступает пробный атом (A), который рассматривается в простейшей трехуровневой модели. В эксперименте пробный атом пролетает через резонатор C, частота моды которого квазирезонантна переходу $e \leftrightarrow g$ атома. При этом в точках R_1 и R_2 атом подвергается действию вспомогательных импульсов излучения с частотой, квазирезонансной частоте перехода атома ω_{ig}. Процесс измерения состоит из четырех этапов: подготовка атома в определённом состоянии (взаимодействие атома с полем вспомогательного импульса излучения), далее с полем резонатора, измерение состояния после взаимодействия со вторым вспомогательным ипульсом и детектирование. Дадим математическое описание этих процессов.

Прежде всего определим структуру пространства состояний $H_A \otimes H_C$ системы атом (A)–резонатор (C) [10]. Для этого определим следующий базис

$$\begin{pmatrix} |1\rangle_a |0\rangle_c \\ |1\rangle_a |1\rangle_c \\ |2\rangle_a |0\rangle_c \\ |2\rangle_a |1\rangle_c \\ |3\rangle_a |0\rangle_c \\ |3\rangle_a |1\rangle_c \end{pmatrix} \tag{1}$$

по трём возможным состояниям атома (индексы a), и двум состояниям резонатора (есть фотон, или нет в резонаторе; индексы c). В случае, если атом находился в нижнем состоянии $|1\rangle_a$ и в резонаторе есть один фотон, т.е. состояние резонатора $|1\rangle_c$, при облучении атома первым вспомогательным ϕ_1-импульсом излучения мы получим следующее состояние системы:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi_1/2) \\ 0 \\ -i\sin(\phi_1/2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Для первого этапа — подготовки атомов в состоянии, необходимом для проведения процесса измерения — используется вспомогательный импульс излучения (R_1), частота которого настроена на частоту перехода $i \leftrightarrow g$ атома. Если время взаимодействия соответствует $\pi/2$-импульсу, то атом перейдёт в состояние $(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$. В матричном виде это можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} c_1\cos(\phi_1/2) - ic_3\sin(\phi_1/2) \\ c_2\cos(\phi_1/2) - ic_4\sin(\phi_1/2) \\ c_3\cos(\phi_1/2) - ic_1\sin(\phi_1/2) \\ c_4\cos(\phi_1/2) - ic_2\sin(\phi_1/2) \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $t_1 = \phi_1/\omega_{ig}$ — время взаимодействия атома с полем первого вспомогательного импульса излучения (R_1), а начальное состояние системы есть вектор $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$ в базисе (1). Если в резонаторе нет фотона, что соответствует состоянию резонатора $|0\rangle_c$, мы получим следующее состояние системы:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1/2) \\ 0 \\ -i\sin(\phi_1/2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Второй этап — взаимодействие пробного атома с полем резонатора. Частота фотона в резонаторе соответствует частоте атомного перехода $g{\leftrightarrow}e$, а δ мы будем здесь полагать равной нулю. При этом состояние системы будет иметь вид:

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi_1/2) \\ 0 \\ -i\cos(\phi_2/2)\sin(\phi_1/2) \\ -\sin(\phi_2/2)\sin(\phi_1/2) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $t_2{=}\phi_2/\omega_{eg}$ — время взаимодействия атома с полем резонатора, а $\delta{=}0$. Для случая когда $\phi_2 = 2\pi$, мы получим

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi_1/2) \\ 0 \\ i\sin(\phi_1/2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Если частота фотона в резонаторе отстроена на величину δ от частоты перехода $g{\leftrightarrow}e$ пробного атома, мы получим более сложное состояние системы, описываемое следующим образом:

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi_1/2) \\ 0 \\ -i\sin(\phi_1/2)\left(-\frac{e^{\frac{1}{2}(2i\pi\delta-\varkappa)t_2}(-2i\pi\delta-\varkappa)}{2\varkappa} + \frac{e^{\frac{1}{2}(2i\pi\delta+\varkappa)t_2}(-2i\pi\delta+\varkappa)}{2\varkappa}\right) \\ -i\sin(\phi_1/2)\left(\frac{ie^{\frac{1}{2}(2i\pi\delta-\varkappa)t_2}\phi_2}{2\varkappa t_2} - \frac{ie^{\frac{1}{2}(2i\pi\delta+\varkappa)t_2}\phi_2}{2\varkappa t_2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\varkappa = \sqrt{-4\pi^2\delta^2 - \phi_2^2/t_2^2}$. Если фотон в резонаторе отсутствует, то естественно состояние системы не изменится и останется таким же как и в (4).

Третий этап в эксперименте аналогичен первому этапу, т.е. пробный атом подвергается воздействию поля второго вспомогательного импульса излучения (R_2) с частотой, резонансной частоте атомного перехода $i{\leftrightarrow}g$. Если время взаимодействия атома с полем $t_1{=}\phi_1/\omega_{ig}$ и в резонаторе есть фотон, то атом перейдёт в состояние

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\phi_1/2)^2 - \cos(\phi_2/2)\sin(\phi_1/2)^2 \\ 0 \\ -i\cos(\phi_1/2)\sin(\phi_1/2) - i\cos(\phi_1/2)\cos(\phi_2/2)\sin(\phi_1/2) \\ -\sin(\phi_2/2)\sin(\phi_1/2) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Если в резонаторе не было фотона, состояние системы будет иметь вид:

$$\psi_4 = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1/2)^2 - \sin(\phi_1/2)^2 \\ 0 \\ -i\cos(\phi_1/2)\sin(\phi_1/2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, если $\phi_1{=}\pi/2$ и $\phi_2 = 2\pi$, а $\delta{=}0$, мы получим при наличии или отсутствии единичного фотона в резонаторе состояние системы, равное

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

соответственно. Из (10) следует, что при $\delta{=}0$ и при выполнении условий $\phi_1{=}\pi/2$ и $\phi_2{=}2\pi$ атом переводится в состояние i или g — в зависимости от того есть фотон в резонаторе или нет. Причем после такого измерения фотон остается в резонаторе, если присутствовал до взаимодействия, или отсутствует в противоположном случае, т.е. состояние пробного атома после измерения определяется результатом квантового невозмущающего измерения наличия фотона в резонаторе.

Последний, **четвертый этап** соответствует классическому деквантованию квантовой информации при ее измерении классическим детектором (D), что детально описано в работе [9].

3 Классический информационный анализ

3.1 Расчет условной вероятности события измерения

В качестве критерия оценки объёма извлекаемой в нашем эксперименте информации для единичного акта измерения наличия/отсутствия фото-

на в резонаторе с помощью пробного атома мы будем использовать количество информации, задаваемое формулой Шеннона, которая определяется как информационная энтропия, служащая мерой неопределенности сообщений данного источника (сообщения описываются множеством величин $x_1, x_2, ..., x_n$ и соответствующих вероятностей $p_1, p_2, ..., p_3$ появления величин $x_1, x_2, ..., x_n$ в сообщении). Для определенного (дискретного) статистического распределения вероятностей p_k *информационной энтропией* или *информацией Шеннона* (классической информацией) называют величину

$$I_{\rm sh} = -\sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k, \tag{11}$$

при условии $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. В нашем случае мы имеем условную вероятность события измерения которую можно представить следующим образом

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_c|\psi_3[4]|^2 & (1-p_c)|\psi_4[3]|^2 \\ p_c(1-|\psi_3[4]|^2) & (1-p_c)(1-|\psi_4[3]|^2) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где p_c — вероятность наличия фотона в резонаторе. Тогда информация Шеннона будет иметь вид:

$$I_{\rm sh} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \log_2 \left\{ \frac{p_{ij}}{\sum_{l=1}^{2} p_{lj} \sum_{k=1}^{2} p_{ik}} \right\} p_{ij}. \tag{13}$$

На рис. 2 представлена зависимость классической информации от безразмерной отстройки частоты фотона в резонаторе от частоты атомного перехода $g \to e$. Из графика видно, что максимум достигается при нулевой отстройке и равен 1 биту. Знак частотной отстройки не влияет на результат, поэтому на рисунке приведена только положительная часть зависимости.

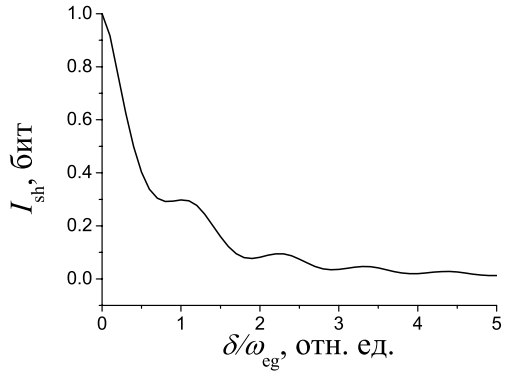

Рис. 2 Зависимость количества классической информации от безразмерной отстройки частоты фотона в резонаторе от частоты атомного перехода $e \to g$.

При изменении времени пролета атома через резонатор, получается зависимость I_{sh} от безразмерного времени пролета атома через резонатор, показанная на рис. 3. Из графика видно, что максимум достигается при времени пролета, соответствующему 2π Раби-импульсу и равен 1 биту.

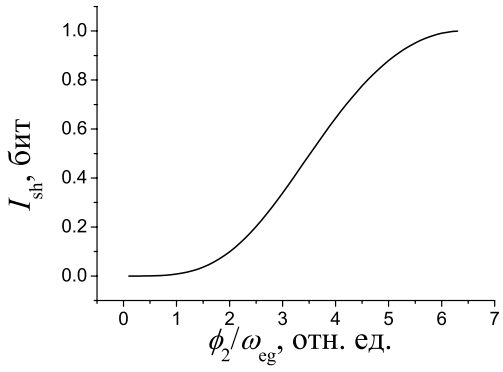

Рис. 3 Зависимость количества классической информации от безразмерного времени пролета атома через резонатор.

3.2 Учет квантовой эффективности детектора

Детектор может определять состояние атома g с некоторой вероятностью p_d. Для расчета количества информации, передаваемой детектором, составим матрицу условной вероятности определения состояния атома

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} (1-p_d)|\psi_3[2]|^2 & p_d|\psi_3[4]|^2 & (1-p_d)|\psi_3[6]|^2 \\ (1-p_d)|\psi_4[1]|^2 & p_d|\psi_4[3]|^2 & (1-p_d)|\psi_4[5]|^2 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Используя формулу Шеннона (13), для всех состояний из матрицы условной вероятности получим зависимость количества информации от квантовой эффективности p_d детектора, представленную на рис. 4.

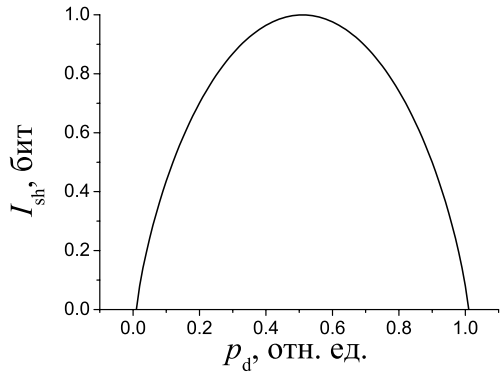

Рис. 4 Зависимость количества классической информации от квантовой эффективности p_d детектора.

4 Квантовый информационный анализ

4.1 Расчёт когерентной информации в системе резонатор–атом с учётом наличия холостового атомного уровня

Преобразование в полной системе $H_{\rm A}\otimes H_{\rm C}$ с размерностями пространств $\dim H_{\rm A}$=3, $\dim H_{\rm C}$=2 в рассматриваемой модели является унитарным, так что преобразованное состояние является чистым и его волновая функция имеет вид

$$\Psi_t = U_{\rm CA}(t)\Psi_0, \quad \Psi_0 = \psi_{\rm C}\otimes|0\rangle_{\rm A}, \tag{15}$$

где, согласно стандартному предположению о структуре измерительного устройства (в данном случае пробного атома) его начальное состояние предполагается предустановленным.

Для информационной характеристики когерентной информации, содержащейся на выходе системы, необходимо учесть, что только два уровня $i_{\rm A}$=1, 2 атома используются для дальнейшей обработки измеренной квантовой информации. Последняя на выходе атома представлена в форме квантовой перепутанности с измеряемым объектом — атомом. Это означает, что информация, связанная с неинформативным уровнем $i_{\rm A}$=3 может быть отображена лишь в некогерентном виде, отображаемом операцией проектирования [11] на выходе атома на соответствующие двумерное и одномерное подпространства $\mathcal{P}=\hat{P}_{1+2}\odot\hat{P}_{1+2}+\hat{P}_3\odot\hat{P}_3$.

Для функционала когерентной информации $I_c[\hat{\rho}_{\rm CA}]$ [11], где $\hat{\rho}_{\rm CA}=\mathcal{P}\Psi_t\Psi_t^+$, с учётом ортогональности слагаемых проектирования в $\mathcal{P}$ имеет место очевидное соотношение

$$I_{\rm c}{=}I_c[\hat{P}_{1+2}\Psi_t\Psi_t^+\hat{P}_{1+2}]+I_c[\hat{P}_3\Psi_t\Psi_t^+\hat{P}_3].$$

В нём второе слагаемое обращается в ноль, поскольку для него, с учётом выражения $I_{\rm c} = S[\hat{\rho}_{\rm A}] - S[\hat{\rho}_{\rm CA}]$, оба слагаемых данного выражения совпадают вследствие одномерности проектора. В результате в расчёте остаётся только проекция волновой функции на двумерное подпространство информативных атомных состояний $\Psi_t^P = \hat{P}_{1+2}\Psi_t$ и выражение для когерентной информации приобретает простой вид:

$$I_{\rm c} = S[{\rm Tr}_{\rm C}\Psi_t^P\Psi_t^{P^+}] - S[\Psi_t^P\Psi_t^{P^+}]. \qquad (16)$$

Данное выражение модифицирует выражение для перепутанности с резонатором трёхуровневого атома и совпадает с ним для случая, когда выходное состояние Ψ_t не содержит вклада уровня $|3\rangle_{\rm A}$. При этом в общем случае последнее слагаемое не обращается в ноль из за нарушения нормировки волновой функции Ψ_t^P.

4.2 Результаты расчёта когерентной информации

С учетом выражения (16) мы можем построить зависимость когерентной информации от безразмерного времени пролета атома через резонатор, подобно тому, как мы это делали в разделе 3. Данная зависимость представлена на рис.я 5. Из графика видно, что максимум достигается при времени пролета, соответствующему 2ϕ-импульсу, и равен 1 биту.

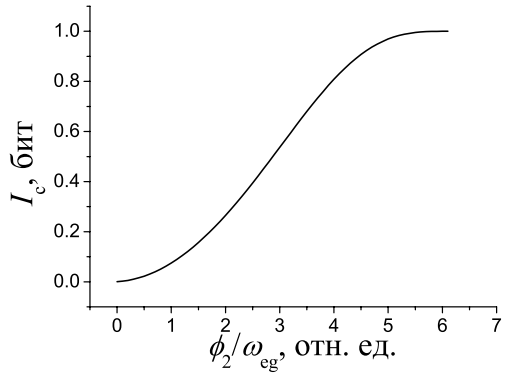

Рис. 5 Зависимость количества когерентной информации от безразмерного времени пролета атома через резонатор.

Используя результаты проведённых расчётов, мы можем проследить за зависимостью когерентной информации $I_{\rm c}$ от безразмерного времени пролета атома через поле первого вспомагательного импульса излучения (R_1) (рис. 6), откуда видно, что максимум достигается в точках $\pi/2$ и $3\pi/2$, что соответствует $\phi/2$-импульсу.

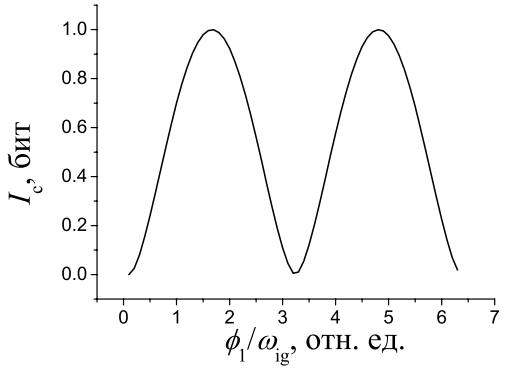

Рис. 6 Зависимость количества когерентной информации от безразмерного времени пролета атома через поле первого вспомагательного импульса (R_1).

При отстройке частоты моды резонатора от резонансной частоты перехода пробного атома $e \leftrightarrow g$ происходит уменьшение количества передаваемой когерентной информации при увеличении отстройки (рис. 7).

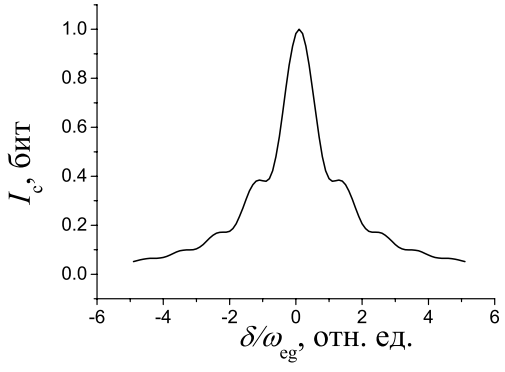

Рис. 7 Зависимость количества когерентной информации от безразмерной отстройки частоты фотона в резонаторе от частоты атомного перехода $e \leftrightarrow g$.

5 Заключение

В заключение, концепция предложенного нами ранее перепутывающего квантового измерения продемонстрирована на имеющем фундаментальное значение эксперименте по квантовому невозмущающему измерению наличия фотона в резонаторе с помощью пробного атома [9]]. Выполнен квантово-информационный анализ данного эксперимента. Продемонстрирован механизм передачи информации в схеме невозмущающего измерения в случае классического и квантового формализма и показано, что результаты в обеих случаях совпадают. Это является следствием ко-

пирования классической части исходной квантовой информации, связанной с набором состояний в квантовом объекте.

Список литературы

1. *Боумейстер Д., Экерт А., Цайлингер А.* Физика квантовой информации: Квантовая криптография. Квантовая телепортация. Квантовые вычисления. М.: Постмаркет, 2002.
2. *Neumann J. von.* Mathematical foundations of quantum mechanics. Princeton, 1955.
3. *Садбери А.* Квантовая механика и физика элементарных частиц. М.: Мир, 1989.
4. Quantum Theory and Measurement / Ed. by J. A. Weeler and W. H. Zurek. Princeton, 1983.
5. *Braginsky V. B., Khalili F. Ya.* // Rev. Mod. Phys. 1996. **68**, N 1. P. 1.
6. *Grangier P., Levenson J. A., Poizat J.-P.* // Nature. 1998. **396**. P. 537.
7. *Grishanin B. A., Zadkov V. N.* // Phys. Rev. 2003. A**68**. P. 022309.
8. *Grishanin B. A., Zadkov V. N.* // Laser Phys. Lett. 2005. **2**, N 2. P. 106.
9. *Nogues G., Rauschenbeutel A., Osnaghi S., Brune M., Raimond J. M., Haroche S.* Nature. 1999. **400**. P. 239.
10. *Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J., Grynberg G.* Photons and Atoms. Introduction to Quantum Electrodynamics. Wiley-Interscience, 1989.
11. *Grishanin B. A., Zadkov V. N.* // Phys. Rev. 2000. A**62**. P. 032303.

Классическая механика в квантовой форме: почему природа “предпочла” квантовую механику?

Б. А. Гришанин

Аннотация Излагается переход от классических уравнений Гамильтона к их операторной форме и обсуждаются связанные с ним основные варианты логики физических событий. Показывается, что только логика квантовой механики в полной мере отвечает пониманию динамических переменных как генераторов движения и, в том числе, импульса материальной частицы как физической переменной $p = mv$, автоматически связанной с временной динамикой вследствие соотношения $v = dq/dt$.

1 Введение

При изучении традиционного курса теоретической физики у студентов, по крайней мере, дважды возникает ощущение шока, связанного с явным противоречием изучаемого материала здравому смыслу. Один раз — при изучении специальной теории относительности, и второй раз — квантовой механики. Чтобы сохранить почву под ногами и, честно глядя в глаза заинтересованному собеседнику, утверждать, что понимаешь, о чём тут вообще идет речь, необходимо каким-то образом объяснить, в первую очередь своему “я”, смысл самых первичных понятий этих теорий.

В специальной теории относительности надо как-то примирить заложенное с несознательного детства представление о времени как о некоем абсолюте с его относительностью. И хотя при изложении теории обычно не объясняется, каким образом это можно сделать, для себя самого каждый обычно находит простейший и единственно возможный выход

Эта статья была не закончена Борисом Андреевичем, мы ее публикуем в том виде, в каком он ее оставил, исправили лишь стилистические погрешности и неточности.

Б. А. Гришанин, к. ф.–м.н., доцент
Кафедра общей физики и волновых процессов, Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва 119991, Россия

из положения — надо просто смириться с неполнотой своей интуиции. Чтобы разобраться в этом противоречии глубже, необходимо затратить серьезные усилия на осознание того, что же все-таки конкретно понимается в физике под термином *время* (а заодно и пространство). В качестве источника такого неформального знания можно посоветовать книгу Пуанкаре [1] — сборник нескольких популярных статей, написанных на чисто на качественном уровне, о наиболее трудных для понимания основополагающих понятиях и проблемах математики и физики.

В квантовой же теории положение с пониманием её основ намного хуже: примириться с тем, что электрон не находится в каком-то определенном месте, а интерферирует сам с собой как волна, оставаясь в то же время материальной точкой — это уже слишком для любого уровня компромисса со своей научной совестью. Известно, что этого компромисса не могли принять такие признанные авторитеты физики как Эренфест и Эйнштейн [2]. В конце концов, наконец-то, стало понятно, к чему сводится наиболее прямое выражение первопричины столь непривычных свойств частиц в квантовой теории. Оказалось, что это — ни много ни мало — отличие логики, управляющей элементарными событиями в физической природе, от классической логики, на которой мы основываем как свое поведение в реальной жизни, так и свой подход к науке [3, 4, 5]. Однако, принять такую точку зрения и примириться с этим тоже далеко не просто. Возможно, в этой концепции присутствует и некий пока не осознанный глубокий смысл, выходящий за традиционные рамки физики как точной науки, но об этом сейчас можно только догадываться.

Наиболее общий уровень изложения механики соответствует подходу, естественному для теории вероятностей и случайных процессов. В традиционных терминах этой теории квантовая и классическая механики естественно представляются в единой форме, что позволяет лучше осознать как их единство, так и качественные отличия. Такая форма изложения квантовой теории обладает серьёзными преимуществами по сравнению с традиционным изложением, основывающимся на понятии волновой функции и уравнении Шредингера. Она позволяет воспринимать механику как единую теорию, в которой временная динамика описывается уравнением Гейзенберга, совпадающим для канонических импульсов и координат q, p с классическими уравнениями Гамильтона. Такой подход позволяет выявить важный, на наш взгляд, факт, что, хотя в предельном случае $\hbar \to 0$ и возможно пренебрежение квантовым характером логики физических событий, качественный смысл набора всех физических переменных вида $f(q, p)$ как характеристик, физически связанных с временной динамикой системы, при любых сколь угодно малых $\hbar$ правильно отображается только неклассическим характером логики событий. (Реально здесь, конечно, подразумевается не сама размерная постоянная $\hbar$, а некоторая выражающаяся через неё безразмерная постоянная, специфичная для рассматриваемой конкретной проблемы.) Связь же физических переменных с динамикой системы следует из определения импульса

как производной $p{=}\partial L/\partial\dot{q}$ функции Лагранжа $L(q,\dot{q})$ по обобщённой скорости [6], что, в частности, для одномерной нерелятивистской частицы массы m, движущейся вдоль прямой линии, даёт $p{=}m\dot{q}$. Есть основания надеяться, что учёт описанных связей способен смягчить противоречие основного содержания квантовой механики с повседневым здравым смыслом.

2 Классическое пространство физических состояний

Основой классической механики являются уравнения Гамильтона

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\,,\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\,, \tag{1}$$

где q и p описывают канонически сопряжённые обобщённые координату и импульс , соответствующие фазовым координатам $X{=}(q,p)$ двумерного фазового пространства одномерной механической системы (специфика многомерных систем здесь не представляет интереса), а функция $\mathcal{H}=\mathcal{H}(q,p)$ — её гамильтониан. Эта система уравнений может быть записана в форме единого уравнения Лиувилля с оператором Лиувилля (лиувиллианом) $\mathcal{L}$:

$$\frac{dA}{dt}=-\mathcal{L}A\,, \tag{2}$$

$$\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}\,, \tag{3}$$

которое справедливо и для любой динамической переменной рассматриваемой системы, представляемой произвольной функцией $A=A(X)$. Система уравнений (1) дополняется заданием при $t=0$ начальных условий $X(t)=X_0$, т.е. $q(t)=q_0$, $p(t)=p_0$.

Решение данных уравнений даётся взаимно однозначным отображением $\mathcal{S}(t){=}\exp(-\mathcal{L}t)$ произвольного начального состояния с точно известными фазовыми координатами $X_0=(q_0,p_0)$ в состояния с фазовыми координатами $X_t=(q_t,p_t)=\mathcal{S}(t)X_0$. При этом кососимметричность уравнений проявляется в сохранении при данном преобразовании фазового объёма рассматриваемых подмножеств фазовых координат. Сохранение фазового объёма приводит к сохранению во времени функционалов $F[\rho_t]$ плотности вероятностей $\rho_t(X)$ вида

$$F[\rho_t]=\int f(\rho_t(X))\,dX \tag{4}$$

с произвольной функцией f (см. **Замечание 1**). Временная инвариантность таких функционалов становится явной из замены переменных

$$\rho_t(X) = \rho_0(X_{-t}), \quad X_{-t} = \mathcal{S}(-t)X, \quad dX = d\mathcal{S}(t)X_{-t} = dX_{-t},$$

которая приводит к тождеству $F[\rho_t] = \int f(\rho_0(X_{-t}))\, dX_{-t} = F[\rho_0]$, проверяемому обычно [7] на основе дифференциального соотношения $dF/dt = 0$. При этом зависимость от времени для плотности вероятностей $\rho_t(X)$ подчиняется уравнению (см. **Замечание 2**):

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho_t = \mathcal{L}\rho_t. \tag{5}$$

Благодаря сохранению фазового объёма фазовое пространство $\mathcal{X} \ni X$ в любой момент времени может рассматриваться как математическое представление *множества элементарных* (физических) *событий*, не изменяющихся в процессе динамики и однозначно определяющих состояние системы как в будущем, так и прошлом. Произвольные физические события при этом описываются подмножествами $\sigma \subseteq \mathcal{X}$, совокупность которых Σ, замкнутая относительно операций объединения (аналог операции сложения для чисел) и пересечения (аналог умножения) в теории вероятностей называется σ-алгеброй событий. После задания распределения вероятностей, описываемого определённой на Σ вероятностной мерой $\mathcal{P}$, тройка описанных математических объектов $(\mathcal{X}, \Sigma, \mathcal{P})$ в классической теории вероятностей называется вероятностным пространством [8].

Алгебры событий Σ классической механики, определённые как алгебры подмножеств и построенные с помощью операций объединения и пересечения подмножеств, являются одновременно выражением соответствующих правил логики, управляющей логическими соотношениями между классическими событиями. Эта логика как формализованная теория впервые была введена Аристотелем, привлёкшим для анализа событий изображающие их подмножества — “круги Аристотеля”. В ней справедлив закон дистрибутивности

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

легко проверяемый геометрически. В частном случае, когда a является элементарным событием (X в случае механической системы), а $c = \overline{b}$ есть дополнение события b до тривиального ($\mathcal{X}$ в случае механической системы), т.е. выражает событие *не-b*, данное соотношение с учётом обнуления одного из слагаемых описывает основополагающий для классической логики *закон исключённого третьего*:

$$a = b \textit{ или } \text{не-}b.$$

Таким образом, выясняется, что в классической механике неявно присутствуют все базисные понятия классической теории вероятностей, связанные с алгеброй физических событий, включая формальное представление классической логики. Однако, для их явного введения нужна

дополнительная аксиоматизация, которая бы зафиксировала бы такое представление уравнений (1) и алгебры физических переменных. Само по себе существование классической алгебры событий не является достаточным аргументом в пользу её справедливости для реальных физических событий. До начала XX века казалось, что таким аргументом является совокупность экспериментальных данных, которые прекрасно укладывались в рамки предположения классичности логики физических событий. Однако, ряд связанных с применением классической механики парадоксов, таких как “ультрафиолетовая катастрофа” и несуществование устойчивого состояния атомов, привёл к необходимости отказа от классической физики и мучительным поискам новых представлений. И теперь, осмысливая новую картину реальности, сформировавшуюся по результатам этих поисков, можно обнаружить, что классическая физика неудовлетворительна не только по своим физическим следствиям для конкретных физических систем типа электромагнитного поля или атомов, но и в самих её основах. Для этой цели необходимо более внимательно проанализировать наиболее общее математическое содержание описанных соотношений.

Физические величины (динамические переменные) после учёта факта существования более первичного объекта — алгебры событий — выступают уже не как первичные понятия, а как отображения множества $\mathcal{X}$ элементарных физических событий X на множество Λ числовых значений A, задаваемых функциями $A = A(X)$. Чтобы не отождествлять такую функцию, заданную для *всех* значений X, с её частными значениями $A(X)$, целесообразно обозначить всё отображение соответствующим символом $\hat{A}$, используемым в квантовой теории для обозначения квантовомеханических операторов, описывающих квантовомеханические динамические переменные.

Для более детального понимания структуры физических величин необходимо ввести в рассмотрение индикаторную функцию фазового пространства $\Pi(X, dX)$ на множестве значений X, равную 1 для $X \in dX$ и 0 вне элемента dX. Используя для неё как отображения обозначение $\hat{\Pi}(dX)$, записываем физическую величину в виде

$$\hat{A} = \int A(X)\, \hat{\Pi}(dX) \equiv \int\limits_{\Lambda} \lambda \hat{P}_A(d\lambda). \tag{6}$$

Качественный смысл данного представления состоит в явном разделении математического представления физической величины на *два* математических объекта — 1) набор Λ (спектр) её возможных значений $\lambda{=}A(X){\in}\Lambda$ и 2) набор соответствующих индикаторов этих событий, представленных их собственными индикаторными функциями

$$\hat{P}_A(d\lambda) = \int\limits_{A(X)\in d\lambda} \hat{\Pi}_A(dX). \tag{7}$$

Данные индикаторные функции описывают неэлементарные события, из которых могут быть образованы *редуцированные* (уменьшенные) алгебры событий в то время как исходные индикаторы $\hat{\Pi}(dX)$ образуют базис максимально полной алгебры событий, включающую все элементарные события.

Для базисных переменных — канонических координаты и импульса — имеем два аналогичных представления с единым спектром $\Lambda = (-\infty, +\infty) \ni \lambda$:

$$\hat{q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \hat{P}_q(d\lambda), \quad \hat{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \hat{P}_p(d\lambda), \quad \hat{X} = (\hat{q}, \hat{p}). \tag{8}$$

Индикаторы $\hat{P}_q(d\lambda)$ и $\hat{P}_p(d\lambda)$ получаются согласно (7) интегрированием меры $\hat{\Pi}(dX)$, которая представляется на фазовой плоскости функцией сингулярным дифференциалом площади $\Pi(\tilde{q}, \tilde{p}, dq, dp) = \delta(\tilde{q} - q, \tilde{p} - p)\, dqdp$, по соответствующей переменной p или q.

Описанное представления отображений как линейных комбинаций индикаторных функций может быть дополнено простейшим определением операции их умножения как поточечного умножения представляемых ими функций:

$$\begin{aligned} &\text{если} \quad \hat{A} \to A(X), \hat{B} \to B(X), \\ &\text{то} \quad\ \widehat{AB} \to A(X)B(X), \end{aligned}$$

то есть:

$$\widehat{AB} = \hat{A}\hat{B}. \tag{9}$$

Именно это естественное определение вводит алгебру физических переменных как алгебру отображений $X \to \lambda = A(X)$ со значениями из множества вещественных (или, при более общем понимании физической величины, комплексных) чисел, которая локальна по отображаемым фазовым координатам X. При этом произведение индикаторов $\hat{P}_A(d\lambda)$, $\hat{P}_B(d\mu)$ двух физических величин $\hat{A}$ и $\hat{B}$, как нетрудно убедиться, соответствует индикатору пересечения соответствующих $d\lambda$, $d\mu$ подмножеств σ_λ, σ_μ на плоскости $\mathcal{X}$. Отсюда следует, что локальное представление алгебры физических величин с помощью коммутативного и дистрибутивного правила умножения (9) отображает алгебраические соотношения Σ-алгебры событий, т.е. приводит к выполнению законов классической логики, подразумеваемой при изложении классической механики "по умолчанию". Однако, открытым остаётся вопрос, в какой степени такое представление согласуется с динамическим характером механической системы, описываемым уравнениями движения (1)?

3 Операторное представление физических величин

Заметим, что операторному правилу (9) можно формально удовлетворить в пространстве линейных отображений, если понимать под $\hat{A}$ и $\hat{B}$ операторы преобразования линейного пространства H на себя: $H \to H$. Чтобы такая замена приобрела физический смысл, необходимо принять, что для каждой из точек X фазового пространства имеется взаимно однозначное соответствие некоторому вектору $|X\rangle$ из H, причём вся совокупность таких векторов образует ортогональный базис в H: $\langle X|X'\rangle = \delta(X - X')$[1]. При этом для выполнения (10) необходимо постулировать, что все операторы физических переменных диагональны, т.е. имеют матричные элементы вида $A_{XX'} = A(X)\delta(X - X')$. Алгебра таких операторов эквивалентна рассмотренной выше алгебре их диагональных элементов, соответствующих каждому значению X. Наглядно специфика такой алгебры, связанная с диагональностью множества рассматриваемых операторов, может быть проиллюстрирована в простейшем — двумерном гильбертовом пространстве H:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},\ \hat{B} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \ldots, \hat{P}(d\lambda) \to \hat{P}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{P}(\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведения и линейные комбинации таких операторов комбинируются как наборы произведений $A_k B_k$ и линейных комбинаций $\alpha A_k + \beta B_k$ их собственных значений A_k, B_k, соответствующих одному и тому же собственному вектору $|k\rangle$.

Поскольку, переопределённые операторы физической величины теперь не осуществляют непосредственного отображения на множество ее значений, мы должны отдельно сформулировать соответствующее правило. Прежде всего, разумеется, должно быть введено операторное представление $\hat{\rho}$ для состояний физической системы. Для состояния, характеризуемого вероятностными распределениями $\rho(X)$ начальных значений, определим $\hat{\rho}$ следующим образом: $\hat{\rho} = \int |X\rangle \langle X| \rho(X) dX$. Тогда легко видеть, что средние значения $\langle \hat{A} \rangle = \int A(X)\rho(X)dX$ в матричной записи могут быть выражены как:

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \operatorname{Tr} \hat{A}\hat{\rho}. \tag{10}$$

С учётом спектрального представления (6) соответствующие вероятности отдельных значений физических величин задаются как средние значения

$$P_A(d\lambda) = \operatorname{Tr} \hat{P}_A(d\lambda)\hat{\rho} \tag{11}$$

[1] Использованы обозначения Дирака для кет- и бра-векторов, т.е. соответствующих векторов-столбцов и сопряжённых им строк.

операторных индикаторов событий $A(X) \in d\lambda$. Точно известному начальному состоянию соответствует некоторый фиксированный базисный вектор $|\psi\rangle = |X_0\rangle$, через который оператор распределения вероятностей представляется как

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|, \tag{12}$$

а усреднение (10) — как

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \langle\psi| \hat{A} |\psi\rangle . \tag{13}$$

4 Квантовая механика и природа движения

Операторное описание физических переменных в совокупности с определениями правил усреднения, определённых соотношениями (10)–(13), лежат в основе математического описания, используемого и в квантовой механике. Тем не менее, они не включают главного и единственного различия между этими теориями — различия в содержании и математическом представлении элементарных событий. В классической механике это физически различимые точки $X \in \mathcal{X}$, после фиксации которых все физические величины приобретают точно определённые значения, т.е. могут быть точно измерены — по крайней мере, в принципе. В описанном выше диагональном операторном представлении это связано с одновременной их диагональностью в едином базисе $|X\rangle$ и, соответственно, локальностью алгебры физических переменных, для любых операторов которой все состояния $|X\rangle$ являются собственными. (Фактически дело не в самой диагональности, поскольку соотношения (10)–(13) не зависят от базиса и поворотом системы координат поэтому могут быть эквивалентным образом представлены и в недиагональном виде. Необходимым и достаточным условием одновременной представимости операторов в диагональном виде является их коммутативность, отражающая их коммутативность как точечных отображений $X \to \Lambda$.)

Введённая алгебра операторов не содержит возможности описания *динамических* изменений, поскольку преобразование $|\psi\rangle \to \hat{A} |\psi\rangle$ сохраняет любые начальные состояния $|X_0\rangle \to A(X_0) |X_0\rangle$ вследствие отсутствия у операторов $\hat{A}$ недиагональных матричных элементов. Уравнения же динамики (1), (2) содержат оператор дифференцирования $\partial/\partial X$ и порождают состояния $|X_0\rangle \to |S(t)X_0\rangle$ с новыми значениями $X_t = S(t)X_0$. Поэтому преобразование временной динамики $S(t)$ на состояниях ψ представляется оператором $U(t)$, перенумеровывающим базисные векторы, который не может быть выражен в терминах динамических переменных.

Это, однако, возможно, если входящие в операторные уравнения Гамильтона

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(\hat{q}, \hat{p}), \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(\hat{q}, \hat{p}) \tag{14}$$

($\partial\mathcal{H}/\partial p$, $\partial\mathcal{H}/\partial q$ описывают классические функции, отвечающие соответствующим производным функции Гамильтона и применённые к операторным аргументам $\hat{q}, \hat{p}$) канонические операторы координаты и импульса не коммутируют. При этом с классической теорией совместимо простейшее — *каноническое* коммутационное соотношение

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \tag{15}$$

для коммутатора $[\hat{q}, \hat{p}] \equiv \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}$, если рассматривать его в асимптотике $\hbar \to 0$. В q-представлении получаем $\hat{q} = q$, $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial q$, что делает явным динамический характер импульса, оператор которого сдвигает состояние по координате. Даже если величина $\hbar$ для рассматриваемых в конкретной проблеме процессов несущественна, использование некоммутативного представления операторов координаты и импульса позволяет представить временную динамику в качественно новой математической форме.

Действительно, с учётом соотношения (15) нетрудно показать (что и делается в курсах квантовой механики), что при произвольном значении величины $\hbar$, по крайней мере для функций Гамильтона вида $\mathcal{H} = T(p) + V(q)$, выполняются соотношения

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(\hat{q}, \hat{p}) = \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{p}], \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(\hat{q}, \hat{p}) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{q}],$$

где $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p})$. С учётом антисимметричности уравнений Гамильтона по отношению к координате и импульсу оба этих уравнения отображают одно и то же преобразование

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}], \tag{16}$$

справедливое для любой физической переменной. Это единое уравнение Гейзенберга описывает как классические, так и квантовые системы — в зависимости от степени существенности ненулевого значения постоянной Планка. Даже в классическом пределе $\hbar \to 0$ оно отражает нетривиальное динамическое преобразование состояния системы, представленное как результат некоммутативности динамических переменных.

Оператор преобразования динамических переменных, представляющий решение уравнения (16), имеет по-прежнему вид экспоненты $\mathcal{S}(t) = \exp(-\mathcal{L}t)$, где оператор $\mathcal{L}$ теперь преобразует операторы динамических переменных и в связи с этой спецификой называется супероператором. В символическом представлении он имеет вид $\mathcal{L} = -(i/\hbar)[\hat{\mathcal{H}}, \odot]$, где символ подстановки $\odot$ обозначает место подстановки преобразуемого опера-

тора. С учётом правил алгебры супероператоров в символическом представлении нетрудно убедиться [9], что справедливо представление $\mathcal{S}(t) = U^{-1}(t) \odot U(t)$, где $U(t) = \exp(-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar)$ — оператор временной эволюции, описывающий решение уравнения Шредингера $d\psi/dt = -(i/\hbar)\hat{\mathcal{H}}\psi$. Это уравнение возникает при замене описания временной зависимости как изменения физических переменных в форме уравнения (16) — "картины Гейзенберга" — на эквивалентное изменение матрицы плотности $\hat{\rho} = \psi\psi^+$ — "картину Шредингера".

Учёт ненулевого значения коммутатора (15) приводит и к качественно новому представлению об элементарных квантовых событиях, роль которых играют векторы ψ гильбертова пространства H. Никакой выбор состояния $\psi \in H$ не может сделать определёнными одновременно значения импульса и координаты, поскольку их одновременная определённость означала бы нулевое значение коммутатора на данном состоянии ψ. Тем самым с любым состоянием связана внутренняя неопределённость совместно рассматриваемых некоммутирующих переменных $\hat{q}, \hat{p}$. Поскольку эквивалентным выражением некоммутативности операторов является неортогональность соответствующих собственных векторов, то описанная неопределённость соответствует неклассичности логики событий, включающей состояния, описываемые неортогональными векторами пространства H. При этом логическими операциями являются объединение и пересечение подпространств, которые обобщают операции классической логики, введённые в форме объединения и пересечения подмножеств фазового пространства, точки которого играют роль номера ортогонального базиса. Нетрудно убедиться на простейших примерах [9], что закон дистрибутивности $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ для логики, представленной алгеброй подпространств гильбертова пространства H, не выполняется, так же как и закон исключённого третьего.

Элементарное состояние ψ, не ортогональное к собственным состояниям $|k\rangle$ некоторой физической переменной $\hat{A} = \sum \lambda_k |k\rangle \langle k|$, содержит внутреннюю неопределённость значений λ_k этой величины, распределением вероятностей которых в соответствии с выражением (11) имеет вид $P(\lambda_k) = \langle k|\psi\rangle \langle\psi|k\rangle = |\langle\psi|k\rangle|^2$. Такое состояние ψ не соответствует ни одному из взаимоисключающих событий $A = \lambda_k$ и $A \neq \lambda_k$, т.е. нарушает закон исключённого третьего. Классической логике подчиняются лишь наборы событий $|k\rangle$, соответствующих принятию одной произвольной физической величиной $\hat{A}$ или подалгеброй коммутирующих величин их соответствующих $|k\rangle$ наблюдаемых значений λ_k. Если в реальной системе все наблюдаемые переменные могут быть с высокой степенью точности отображены коммутативными подалгебрами, то такая физическая система классична. Механика же в целом является единой теорией как по сути, так и по форме наиболее общего математического представления. Отличие классических систем от квантовых связано лишь с асимптотической при $\hbar \to 0$ одновременной определённостью их координат и импульсов и несущественностью квантового характера логики полной алгебры физи-

ческих событий благодаря достаточности рассмотрения более грубой — деквантованной — подалгебры.

5 Заключение

Квантовая неопределённость канонических координаты и импульса, отображаемая их некоммутативностью, позволяет представить динамику механической системы с помощью самой алгебры физических наблюдаемых, элементом которой является оператор энергии, которой одновременно является и оператором временной эволюции, преобразующим начальное состояние. В противовес этому в последовательно классическом представление механики с помощью коммутативной алгебры наблюдаемых никакие динамические переменные не связывают заданное состояние (q, p) с другими и, в результате, временная эволюция описывается преобразованием Лиувилля, которое является “внешним” по отношению к алгебре наблюдаемых. В квантовом же представлении механики для классической механической системы “остаточная” после предельного перехода $\hbar \to 0$ некоммутативность в квантовом уравнении Гейзенберга (или Лиувилля) правильно отображает представление об импульсе как характеристике скорости изменения пространственного состояния и приводит к нетривиальному пределу — квазиклассическому движению. Образно выражаясь, пружина временной динамики классической системы скрыта внутри бесконечно малой неклассичности, несущественной для наблюдателя, которому доступно лишь наиболее грубое её проявление — само существование движения.

Таким образом, квантовое представление классической механики приводит к более “экономному” пониманию динамических переменных — как пространства, на котором не только отображается движение, но и одновременно содержится его генератор. Множеством же, на котором лишь отображается движение, является пространство элементарных физических событий. Именно это представление органично сочетается с естественным для механики пониманием импульса как переменной, органически связанной с движением. И, поскольку для физиков уже стало привычным представление о природе, “выбирающей” наиболее элегантные формы для реализации своих замыслов, и в данном случае с этой точки зрения можно логично утверждать, что именно с учётом изложенных в данной статье соображений природа “предпочла” квантовую механику классической.

Замечания

1. В частности, определяемая функционалом (4) при $f(\rho) = -\rho \log \rho$ полная энтропия $S[\rho]$ сохраняется для сколь угодно сложной, но замкнутой N-частичной термодинамической системы с $\rho = \rho_{Nt}$ — в противовес возрастанию макроскопической энтропии Больцмана $S_B = NS[\rho_{1t}]$

[7]. Это возрастание возникает в результате пренебрежения микроскопической обратимостью динамики, возможной благодаря временным корреляциям, которые реально присутствуют в динамике соответствующей микроскопически незамкнутой одночастичной подсистемы с плотностью ρ_{1t} на временах, существенно меньших времени установления равновесия.

2. Уравнение (5), в отличие от уравнения (3) и по аналогии с уравнениями Колмогорова (Фоккера-Планка) 1-го и 2-го типа в теории марковских случайных процессов [8], может быть классифицировано как уравнение Лиувилля 1-го типа, а (2) — как уравнение Лиувилля 2-го типа. Они отличаются эрмитовым сопряжением, которое в данном случае сводится просто к замене знака у вещественных, но не эрмитовых операторов $\partial/\partial q$, $\partial/\partial p$ в (3), и приводит к соотношению $\mathcal{L}^+ = -\mathcal{L}$.

Список литературы

1. Пуанкаре А *О науке* (Москва: Наука, 1983).
2. Вижье Ж-П "Панельная дискуссия", в *Эйнштейновский сборник* (Москва: Наука, 1970).
3. Birkhoff G and Neumann J "The logic of quantum mechanics", in *Annals of Mathematics* **37** 823 (1936).
4. Primas H and Müller-Herold U, in *For Ilia Prigogin* (Ed S A Rice) (New York: Wiley, 1978).
5. Mittelstaedt P *Quantum Physics and Classical Physics — in the Light of Quantum Logic*, arXiv:quant-ph/0211021 v. 2 (2003).
6. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Механика* (Москва: Наука, 1973).
7. Климонтович Ю Л *Статистическая физика* (Москва: Наука, 1982).
8. *Справочник по теории вероятностей и математической статистике*, под редакцией В С Королюка (Киев: Наукова думка, 1978).
9. Гришанин Б А *Квантовые случайные процессы*, доступна в интернет по адресу http://qilab.phys.msu.ru/papers/bagbook.pdf

Квантовая физика как новый взгляд на вечные загадки бытия

Б. А. Гришанин

1 Введение

Философия и религия, с одной стороны, вызывают безусловное уважение, подчас граничащее с робостью. Нет никакого сомнения в том, что мыслить или чувствовать на уровне, соответствующем их духу, хотя бы время от времени, необходимо просто даже для того, чтобы оставаться нормальным человеком. Но, с другой стороны, оглядывая в целом достигнутые в этих областях результаты, которые могут быть восприняты простым человеком — не философом, теологом или священником — поражаешься, насколько они неизменны по сравнению со скоростью тех перемен, которые происходят как в повседневной жизни, так и в науке. Если допустить, что эти сферы человеческой мысли не требуют научного развития, а необходимы лишь как *вечные истины*, тогда, разумеется, всё в порядке. Но полностью поверить в то, что вообще не должно быть никакого усовершенствования, вряд ли возможно. Наряду с вечными истинами, скорее всего, должно сосуществовать и определённое развитие их восприятия, идущее вместе с развитием человеческого общества, в том числе, с развитием науки. Связь науки с философией и религией, вне всякого сомнения, существует: недаром подавляющее большинство наиболее крупных учёных приходило и приходит через науку к богу, не говоря уже о восхождении на философские высоты. Мысль, на которой основана данная работа, состоит в том, что, несмотря на кажущуюся "недосягаемость" высших истин прямолинейному анализу методами точных наук, тем не менее, наиболее фундаментальные и элементарнейшие понятия математики и физики всё же каким-то образом неразрывно свя-

Б. А. Гришанин, к. ф.–м.н., доцент
Кафедра общей физики и волновых процессов, Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва 119991, Россия

заны с высшими истинами — какими бы неожиданными эти связи поначалу не представлялись.

Круг излагаемых в этой работе идей сложился как результат личного опыта исследования конкретных проблем квантовой теории, в особенности, в области квантовой теории информации. Используемый при этом подход базируется главным образом на относительно простых моделях квантовой физики, которые, оказывается, имеют поразительно точное качественное соответствие с такими фундаментальными понятиями как *душа*, *бог*, *время*, *жизнь*, *смерть*, *воскресение*. В результате приобретённого опыта конкретных физических исследований представляется возможным и вполне оправданным описывать самые глобальные категории, относящиеся, как правило, к бесконечно сложным объектам, с помощью объектов элементарных. Необходимость такого подхода можно пояснить хотя бы таким наглядным примером (кажется, заимствованным из литературы). Пусть некто, скажем, инопланетянин, пытается изучить земную жизнь, облетая Землю на своём корабле. Но увидит он при таком подходе лишь океаны, моря, леса, горы, реки и города в виде набора клеточек. Для того же, чтобы увидеть самое главное, что отличает Землю от других планет — жизнь — он должен будет спуститься вниз и разглядеть отдельные деревья и растения, животных и, наконец, людей, создавших города и активно воздействующих на природу, различимую с большой высоты. Такой «микроскопический» подход — уверенность в этом теперь вполне созрела — является необходимым дополнением для любой области человеческого мышления, в том числе и для философии и религии.

Удивительным образом именно квантовая физика, точнее, теория, на которой она построена, даже на уровне своих первичных понятий даёт для интерпретации описанных вечных тайн человечества такие точные аналогии, что нельзя не поверить, по крайней мере, в неслучайность этого.

2 Квантовая теория для всех

Несмотря на присутствие в заглавии данного раздела названия “Квантовая теория”, для понимания его содержания не потребуется ни специальных знаний, ни особых мыслительных усилий. Главное из того, что передаётся в данной работе, абсолютно доступно каждому, окончившему то, что соответствует хотя бы семи классам советской школы (сформулировать теперешний эквивалент данному условию затруднительно в силу весьма смутного представления о современном прогрессе в области образования: это представление можно основывать лишь на телевизионных выступлениях ответственных за данный прогресс министров — «демо-

кратического образования» — Филиппова и «демократической культуры» — Швыдкого).

Для упрощённого изложения основного качественного содержания квантовой теории достаточно хотя бы примерно представлять себе, что такое вектор и векторное пространство. Чтобы освежить данное представление, достаточно взглянуть на рис. 1а. Там графически изображён набор двумерных векторов на плоскости. Что ещё нужно для понимания — это то, что все они могут быть получены из двух, в частности, ортогональных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ как их сумма, взятая с соответствующими коэффициентами: $\mathbf{a} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2$. Коэффициенты c_1, c_2 при этом называются проекциями рассматриваемого вектора $\mathbf{a}$.

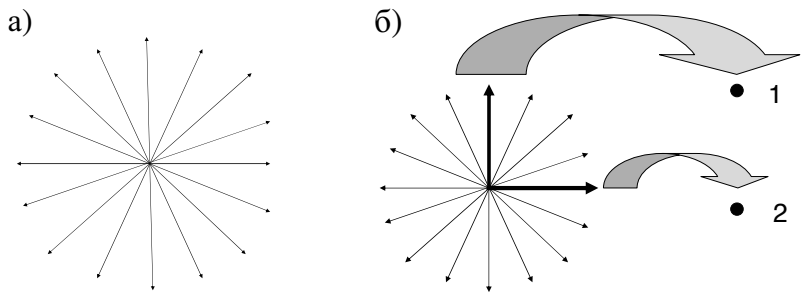

Рис. 1 а) Двумерный пример абстрактного векторного пространства — множество всех направленных линий, исходящих из единого центра. б) Множество из двух точек, описывающих набор классических событий, и их соотношение с множеством квантовых событий: два классических события соответствуют двум ортогональным векторам всего пространства, описывающего полное множество квантовых событий.

Идея, выражающая основное содержание квантовой теории, точнее, её качественное отличие от классической, графически проиллюстрирована на рис. 1б. Две точки 1, 2 описывают простейшее *полное* множество классических событий, состоящее всего из двух точек. Примеры таких простых множеств реальных событий можно сколько угодно найти хоть в повседневной жизни: например, два события — есть дождь или нет дождя, и третьего варианта нет, что в данном случае и означает полноту данного множества событий. Указанное соотношение — либо есть, либо нет — выражает так называемый закон исключённого третьего, который является одним из основных законов классической логики. Классическая логика лежит в основе как нашего представления об окружающих нас явлениях, так и нашего поведения, несмотря на отдельные — кажущиеся или действительные — отступления от неё в реальной жизни. В квантовой же теории данная логика несправедлива, и это отображается на рис. 1б тем, что соответствующее классическому двухточечному множеству множество квантовых событий описывается всеми векторами

векторного пространства с единичной длиной (т.е. лежащими на одной окружности). Различить среди них, наподобие того как в классическом множестве точка 1 отличается от точки 2, можно лишь такие пары событий, которые описываются ортогональными векторами. Ортогональные векторы нельзя "спутать" друг с другом, потому что они имеют нулевые проекции друг на друга, или, другими словами, их скалярное произведение равно нулю. Скалярное же произведение двух произвольных векторов описывается проекцией одного вектора на другой. Вероятность же спутать один вектор с другим стремится к 100% (с учётом того, что оба вектора не только становятся равновероятными, но и неразличимыми) для векторов с бесконечно близкими направлениями.

В реальном физическом мире физические системы являются квантовыми, хотя в повседневной жизни мы этого не ощущаем. Дело в том, что наличие квантовой неопределённости не проявляется для таких сложных физических объектов, с которыми мы сталкиваемся повседневно. Более того, забыв о показанном на рис. 1б соответствии классических и квантовых систем и считая всё классическим, не содержащим внутренней квантовой неопределённости, физики создали классические теории — механику, электродинамику и статистическую физику — которые до определённого времени прекрасно объясняли все наблюдаемые физические явления и без учёта квантового характера физических систем. Квантовая теория потребовалась и возникла лишь для объяснения а) отсутствия при тепловом равновесии светового излучения со сколь угодно малой длиной волны при заданной температуре окружающих тел (так называемая «ультрафиолетовая катастрофа'» — парадокс, разрешённый в 1900 г. Планком) и б) устойчивости атомов, в которых вращающийся электрон почему-то не излучает свою энергию и не падает на атом (парадокс, первый фундаментальный шаг в разрешении которого был сделан Бором, создавшим в 1913 теорию квантования атомных орбит). После же создания полноценной квантовой теории выяснилось, что она фактически отличается от классической лишь одной уже описанной выше особенностью — наличием помимо классически различимых состояний ещё и множества других не полностью различимых состояний, естественные соотношения между которыми не подчиняются классической логике, что приводит к проявлению этих соотношений в форме внутренней специфически квантовой статистической неопределённости. В частности, не существует таких состояний внутреннего момента электрона — спина, в которых его проекции на две различные оси имели бы одновременно точно определённые значения, а также в любых состояниях электрона его координата и скорость одновременно не могут быть точно известны. В приведённой на рис. 1 векторной картине квантовых состояний эта неопределённость заключена в невозможности одновременного детерминированного описания двух неортогональных векторов: квадрат проекции одного из них на другой даёт вероятность p их совпадения, а $1-p$, соответственно, даёт вероятность их несовпадения.

Эта неопределённость фактически лежит в основе всех специфически квантовых эффектов, хотя и не всегда просто проследить такую связь в каждом конкретном случае.

3 Вселенная

Квантовая теория в самих её основаниях содержит естественное объяснение необъяснимого в классической теории соотношения между естественно предполагаемой полной определённостью мира и его наблюдаемым разнообразием. Дело в том, что в квантовой теории в том случае, если состояние системы, составленной из двух различных подсистем, хотя и квантово детерминировано, но не независимо[1], то каждая из них, рассматриваемая по отдельности, содержит статистическую неопределённость точно такого же типа, которая возникает при бросании монетки. Другими словами, квантовая определённость включает внутреннюю статистическую неопределённость. В предположении детерминированного состояния Вселенной как целого это приводит к появлению разнообразия событий, рассматриваемых без полной информации о всей Вселенной. Это разнообразие проявляется в форме статистической неопределённости, необходимой для нетривиальности существования Вселенной — в частности, невозможности её абсолютного покоя. В результате противоречие между полной детерминированностью и необходимостью статистической неопределённости просто отсутствует.

4 Почему именно душа непознаваема, некопируема и бессмертна?

Так как одновременно все события из полного квантового набора неразличимы, то и копировать их полностью невозможно. Математически это выражается соответствующей теоремой о невозможности квантового *клонирования*. Следовательно, никакую квантовую систему в полном виде невозможно отобразить в другой — ни в точности такой же по форме системе, ни сколь угодно сложной. И это как раз то главное свойство души, которое первично закладывается в это понятие. Душа не есть совокупность информации, которая может быть «передана по телеграфу», как в 50-е годы вульгарно предполагал Винер в своей нашумевшей книге «Кибернетика и жизнь». Более того, человек сам даже по доброй воле и при всей возможной откровенности не сможет передать другому, даже

[1] Такое совместное состояние двух систем в квантовой теории является наиболее общим и называется *перепутанным*.

сколь угодно близкому по духу человеку, абсолютно всё своё внутреннее содержание. Тем более, его никогда нельзя скопировать и передать другому индивиду — «клону», сосуществующему одновременно с оригиналом.

Однако, квантовая теория не запрещает уничтожение всех состояний в одной системе и переход их в другую. Это из существующих вечных идей ближе всего к идее *переселения душ*. Таким образом, если принять на веру понимание души как точного аналога квантовой системы, переселение души в такое же по форме тело или в несколько (или даже большое множество) тел возможно. Полное же безвозвратное уничтожение квантовой системы невозможно не только с точки зрения квантовой физики, но и в рамках любой динамической теории, например, механики — здесь неважно, классической или квантовой. В любых динамических теориях движение в полных динамических системах всегда обратимо, и все их начальные состояния только трансформируются — информация о них распределяется по другим системам, но никогда абсолютно не уничтожается. Это, таким образом, выглядит как естественная физическая причина *бессмертия души*.

5 Что же такое душа с точки зрения физики?

Таким образом, предположение, что душа обладает свойствами квантовой системы, кажется очень вероятным: качественных совпадений — только перечисляй! Но возможно ли это физически?

Дело в том, что обычно квантовые свойства присущи микроскопическим системам: атомам, отдельным фотонам, микрочастицам. Для других объектов, составленных из многих микрочастиц они нивелируются за счёт того, что коллективные состояния суммируются из отдельных не как простые суммы положительных чисел, а наподобие того, как суммируются волны в волновых процессах, т.е. с учётом фаз каждой волны. если фазы беспорядочны, то получаем нечто несущее следы квантового происхождения, но утерявшее самое главное для состояний квантовой системы — неприменимость к ним классической логики. Так, например, белый свет хотя и составлен из принципиально квантовых частиц — фотонов, может описываться как совокупность тех же фотонов, но уже как классических частиц, хотя и обладающих нулевой массой покоя, но в остальном полностью подчиняющихся классической логике. А именно, один фотон с другим в такой картине складывается как складываются две материальных классических частицы, не интерферируя, как истинные (когерентные) волны. Поле обычного лазера хотя и обладает подобной когерентностью, зато может рассматриваться как классическая волна, отдельные части которой не обладают никакой специфической

квантовой неопределённостью. Только отдельные фотоны несут ярко выраженные квантовые свойства.

Однако, в физике есть и исключения, когда главная квантовая специфика — наличие классически несовместимых событий — выживает и для макроскопического набора микросистем. Это сверхтекучесть и сверхпроводимость. Для них существуют такие коллективные физические переменные, которые, будучи уже не микроскопическими по обычным характеристикам, сохраняют когерентный характер их квантовых состояний и, соответственно, не подчиняются классической логике.

Основываясь на этом прецеденте, логично предположить, что и при зарождении жизни происходит что-то в этом роде. Т.е. тайна жизни состоит в зарождении квантовой души в первоначально квантово не организованной материи. Возможно, этим и объясняется отличие живого от неживого? В связи с развитием исследований по созданию квантового компьютера эту идею иногда формулируют так, что называют человека «квантовым компьютером». По главной сути, конечно, с этим можно согласиться, но употребление термина «компьютер» в применении к живому существу, а в особенности по отношению к человеку воспринимается, конечно, как оскорбление — неуважение к очевидным отличиям свободной души от порабощённой машины (может быть, при капитализме и нужны лишь люди-компьютеры?). Тем не менее, для тех, кто понимает, насколько качественно меняет дело приложение термина *квантовый* к понятию компьютера, понятно, что этот оскорбительный характер связан лишь с представлением о классическом компьютере, заведомо не обладающем чертами живой души, в то время как появление у компьютера квантовых свойств как раз и выглядит как его «одухотворение».

6 Локальное физическое время и отдельная жизнь

Жизнь многогранна, и для различных её проявлений в квантовой физике существуют свои аналогии. Внутренняя — это динамика динамически замкнутой системы без всякого её обновления, по-кругу. Внешняя — с конечным или постоянным обновлением состояний. *Локальное* же время — это параметр, характеризующий эти изменения, который не имеет сам по себе абсолютного смысла. О возможном содержании единого *мирового* времени см. далее.

7 Взаимодействие душ

Полное постижение одной душой другой души невозможно из-за её уникальности. Для того, чтобы что-то в душе понять, её необходимо изме-

нить, ибо любое взаимодействие какие-то состояния обязательно изменяет. Чтобы понять полностью, необходимо принять в себя её всю, т.е. полностью уничтожить её прежний состав с заменой на полностью обновлённый. Эта замена может иметь две крайние формы — замена той душой, которая её приняла на себя, и заменой на нечто совершенно новое. Если других душ при таком обмене не присутствует, то получается взаимный полный обмен душами, при котором автоматически выполняется закон: чем больше отдаёшь, тем больше получаешь, и неравенство при таком обмене невозможно.

8 Мир и единое пространство и время

Единые время и пространство возникают в физике как единый способ отображения всех связей между событиями, которые в мире наблюдаются. Однако, представляется весьма удивительным, что столь обобщённое описание бесчисленного множества событий, большая часть из которых не должна иметь никакой связи с другими, всё же существует! Тем не менее, этому может быть единая причина, смысл которой также отчасти раскрывается квантовыми аналогиями, описанными ниже.

9 Природа динамического характера мироздания

Мы, возможно, недооцениваем роль квантового характера мироздания в повседневной жизни. Многие вообще полагают, что с квантовыми эффектами сталкиваются только физики и только придя в лабораторию, чтобы наблюдать, скажем, эффект сверхпроводимости или проводить эксперименты с отдельными атомами или молекулами и т.п. Более просвещённые в физике могут добавить, что и в жизни мы весьма обязаны квантовой природе мироздания. Например, тем фактом, что нас не испепеляет своей бесконечной интенсивностью излучение даже сколь угодно холодных окружающих тел мы обязаны конечности энергии элементарной порции электромагнитного излучения — кванта электромагнитного поля, которое неизбежно излучается всеми нагретыми телами. Также чисто квантовую природу имеет сама возможность существования устойчивых атомов и молекул, из которых построена вся наблюдаемая нами материальная природа.

Но есть кое-что и более неожиданное. Например, возьмём даже основу классической физики — классическую механику. Она, с одной стороны, по-определению «классическая», т.е. управляется классическими законами движения. Но вот движение! Откуда оно берётся? Почему господь-бог не распорядился всё заморозить, чтобы ничего не менялось на вечные

времена? Что является пружиной, раскручивающей движение в механике и, как следствие, и в жизни, откуда берётся движение даже в отсутствие внешних сил (т.е. равномерное движение по инерции)?

В классической механике состояние задаётся координатой и скоростью (или соответствующим импульсом) частицы (механической системы). Любые физические переменные при этом являются однозначно определёнными функциями координат и скоростей, т.е. в заданном состоянии однозначно определены. В математической модели состояния как вектора некоторого линейного пространства применение любой функции координаты и скорости к состоянию с этими же значениями координаты и скорости не может привести к новому состоянию. Чтобы получить такое преобразование применением функции координат и импульсов необходимо, чтобы чтобы эти функции не имели определённых значений в данном состоянии, а приводили бы к переходу в новые состояния, что соответствует вращению этих состояний в соответствующей модели пространства всех состояний. Именно это возникает в квантовой теории, где координаты и скорости не имеют определённых значений, а состояния задаются распределением значений только координаты либо скорости. Движение при этом возникает как результат применения физических величин к состояниям, что неизбежно приводит к изменению состояния. Таким образом, в классической механике физические величины имеют характер генераторов движения, в то время как в классической механике их использование в качестве таких генераторов приводит к полному покою — отсутствию движения вообще! Это значит, что только квантовой природе соответствует наличие движения внутри самой теории, в то время как в классической теории движение является ещё одним постулатом теории, который надо ввести дополнительно, после определения множества состояний и набора физических величин.

Возможно, такое же динамическое восприятие человеком окружающего мира тоже есть следствие квантовой специфики мира?

10 Загадка рождения

Основная загадка рождения — это, очевидно, загадка не столько биофизического механизма, сколько самой качественной сути появления новой жизни. Напрашивается аналогия с самоорганизацией, имеющей место при возникновении сверхтекучести или сверхпроводимости. Первоначально неупорядоченные на квантовом уровне коллективные соотношения между отдельными микрообъектами организуются в такие материальные объекты (в случае обычного вещества это так называемый квантовый конденсат), квантовая упорядоченность которых уже не подавляется неупорядоченным влиянием микроскопической природы составляющих элементов. Хаотичность последних перестаёт затрагивать важ-

ные для рассматриваемого коллективного эффекта соотношения. Очень естественно предполагать, что именно такого типа организация неживой материи приводит к появлению жизни, столь устойчивой к внешним воздействиям при её видимой хрупкости и особенно удивительно проявляющей эту устойчивость на ранних стадиях развития.

Правда, при таком предположении возникает и сопряжённая с ним неясность: всё ли живое имеет то, что мы называем душой? Очевидно лишь, что живое качественно отлично от неживого, и это качество уже и может быть названо «душой». Или душа — это что-то ещё боле высокое?! Увы, в самой квантовой теории пока никаких намёков на существование ещё одной — иной — аналогии для явления более высокого качества по сравнению с самой жизнью. Так что получается, что жизнь и душа — это примерно одно и то же или вещи, неотделимые друг от друга, и какого-то глобального подкрепления церковных воззрений на понятие души физика в самих своих основах непосредственно не содержит. Хотя, можно попробовать предположить в качестве возможного механизма возникновения кроме самой жизни ещё и души дальнейшую квантовую организацию уже зародившейся жизни. Т.е., может быть, сама жизнь ещё не обязательно представляет информационно организованную систему? Или, может быть, она не обязательно связана с Богом и именно связь с Богом отличает душу?!

В последнем случае существует мощная аналогия из квантовой физики для такой связи — это квантовая корреляция событий, сколь угодно разнесённых в пространстве, известная в квантовой теории как «перепутанность» квантовых систем. Она аналогична обычной статистической связи между различными событиями — наличию взаимозависимости между ними, которая может быть и стопроцентной. Однако, в отличие от классической статистической связи квантовая перепутанность означает, что две физически различных системы в отношении некоторых свойств являются физически одной системой! Такая картина проливает физический свет на возможный механизм предполагаемой связи живых существ с Космосом. Вопрос о соотношении жизни и души при этом также однозначно таким предположением не решается, но, очевидно, появляется возможность их разделения по типу или по факту наличия связи живого существа с Космосом (или Богом).

11 Старение, смерть и бессмертие

Механизм старения тесно связан со взаимодействием живого существа с физическим миром. При этом наряду с известными медицине нарушениями, накапливаемыми в процессе такого взаимодействия и носящими неквантовый характер, для квантовых процессов типичным является потеря специфически квантовой когерентности состояний. Она, однако, не

исчезает абсолютно, но перераспределяется между существом и другими объектами и как бы «утончается». Смерть, повидимому, и означает её умаление до некоторой критической величины, после достижения которой происходит полный распад квантовой организованности. Однако, распадается она всё же так, что полная информация о ней всё же сохраняется, хотя и в форме, сложно и непонятно для отдельного существа распределённой между неограниченно многими физическими объектами. Так что потенциально любое существо в некотором смысле бессмертно.

12 Новая жизнь и полное возрождение

Если живое существо (душа) связана с неким центром — Космосом или Богом — эффектом квантовой перепутанности, и эволюция этого центра упорядочена, то дальнейшая судьба души может быть тесно увязана с этим центром. Более того, если в каком-то отношении эволюция центра обратима, то и, естественно, будет неизбежно возрождение души после её физической смерти. Действительно, в этом случае смерть есть таковая только в отсутствие информации о центре, а при наличии квантовой связи становится понятным возможный механизм возрождения, предполагаемый в самых разных религиях.

13 Бог

Две возможности в самом крупном плане: Бог — это некий центр, с которым квантово коррелированы живые души, или Бог — это существо, который управляет миром «по своей воле». В последнем случае возможно представление о Боге как о некоем «существе», приготовляющем начальное состояние Вселенной и, возможно, способным управлять ею наподобие того как экспериментатор управляет, например, состоянием атома в оптической ловушке. Здесь мы имеем слишком много вариантов конкретизации данных схем. На данном же этапе, наряду с естественной идей отсутствия какого-то ни было аналога управления, автору представляется наиболее убедительным вариант космического центра[2], определяющего существование всех живых существ (или, по крайней мере, тех, которых можно считать наделённых душой). Обсуждать же наличие у такого центра собственной воли в рамках физики хотя и в принципе

[2] Нельзя не отметить аналогию этой точки зрения с представлением о свойстве человеческой души связываться с миром посредством специальных органов — «чакр», известном из оккультной литературы [в частности, индуистского толка — Брамари Ананда, Према Шакти Ананда, Бала Янтра, *Манифест эволюции* (Амрита-Русь, Москва, 2005)].

возможно, но нецелесообразно из-за необходимости введения огромного числа новых предположений и определений для самой возможности такого обсуждения. Самым же разумным выходом из этой неопределённости представляется пока воздержаться от попыток дальнейшей конкретизации, особенно с учётом того, что более адекватный подход к этой проблеме, скорее всего, связан с отходом от обременительных в данном случае ограничений, обусловленных принятым здесь ограничением естественными рамками научности.

14 Вопрос вместо заключения

Как всё же понимать описанное выше такое прямое и такое детальное соответствие основных свойств квантовых физических объектов и высших понятий, связанных с существованием человека?! Это свидетельство какой-то новой загадки, приводящей к тесному единству живого и неживого, или всего-навсего выражение простого факта ограниченности человеческой фантазии, приводящей к использованию одного и того же набора методов описания для сколь угодно различных объектов исследования?

Часть IV
Книга Б. А. Гришанина «Квантовые случайные процессы»

В основу этой книги, над которой Борис Андреевич работал до конца своей жизни, лег курс его лекций по квантовым случайным процессам. Начальный вариант ее был издан в 1981 г. [Б. А. Гришанин, “Квантовая электродинамика для радиофизиков” (Изд-во МГУ, Москва, 1981)]. С тех пор эта книга была существенно расширена и планировалась к печати, но так и не была закончена и издана. Этой работе Борис Андреевич придавал очень большое значение, и поэтому мы решили опубликовать эту книгу в том виде, в каком ее оставил Борис Андреевич, «причесав» отдельные места рукописи.

Глава 1
Введение

Данная книга обязана своим появлением специальному курсу, который читался автором на физическом факультете МГУ, начиная с 1973 г. Она содержит систематическое изложение методов квантовой теории случайных процессов в том виде, как они используются в теоретических расчетах квантовых открытых систем.

Наибольшее применение эти методы нашли при решении задач лазерной физики, в связи с чем рассматриваемые физические системы относятся, в основном, к этой области приложений квантовой теории. Помимо этого, необходимо отметить новейшую сферу приложения квантовой теории случайных процессов — создание квантовых компьютеров. Последняя задача в результате наблюдавшейся в последние несколько лет бурной активизации исследований перешла из разряда абстрактной идеи в многобещающую технологическую проблему. Специфика данной книги состоит в том, что, будучи рассчитанной по содержанию и характеру изложения, главным образом, на читателя-физика, она, тем не менее, базируется на идеологии и наиболее важных понятиях математической теории случайных процессов. Это позволяет использовать принятую в математической теории систематизацию описываемых методов, которая является наиболее общей и компактной. Изложение сопровождается обсуждением наиболее существенного качественного содержания рассматриваемых процессов с физической точки зрения. В частности, подробно обсуждается модель двухуровневого атома с акцентом на таких вопросах как пределы применимости марковского описания, структура и качественные особенности спектра флуоресценции и роль упругой дефазировки. В книге содержится значительный объем оригинального материала как в части математического описания, так и физических приложений, однако, его использование полностью согласовано с основной целью — дать замкнутое изложение теории и ее наиболее важных приложений к задачам лазерной физики.

Хотя существует значительное количество ориентированных на физиков книг, в которых излагаются математические методы описания квантовых случайных процессов, в данной книге имеется элемент качественной новизны. Он связан с базовой концепцией, естественным образом объединяющей все рассматриваемые приложения в единую теорию, для которой различные типы рассматриваемых физических систем являются просто специальными случаями, исследуемыми с помощью единых методов.

Если ранее данный подход имел в качестве обоснования лишь соображения методического порядка, то за период развития лазерной физики и компьютерной техники в течение 80–90-х годов появились еще более убедительные аргументы. За эти годы эксперименты с отдельными атомами и молекулами, охлаждение атомов ниже допплеровского предела, создание квантово-интерферирующих атомных ансамблей и квантово-сжатых состояний светового поля, а также большое разнообразие других существенно квантовых эффектов вошли в арсенал регулярных методов лазерной физики, в результате чего полностью осознана необходимость развития практических методов расчета, которые позволяли бы оперировать с разнообразными квантовыми моделями столь же свободно, как и с классическими. В этом плане можно особо выделить проблему квантовых компьютеров, которая связана с обсуждением неограниченного набора физических моделей с самыми разнообразными физическими механизмами как взаимодействий, используемых для реализации квантовых вычислений, так и взаимодействий, обусловливающих возникновение шумов. За указанный период также появились коммерчески доступные системы компьютерной алгебры (например, *Mathematica*), сделавшие возможным широкое внедрение аналитических методов выполнения компьютерных расчетов. Благодаря им наиболее общая математическая техника квантовой теории случайных процессов, ранее рассматриваемая многими физиками просто как необязательный математический прием компактного описания, доказала свою эффективность для выполнения конкретных расчетов при исследовании самых разнообразных задач. Это обеспечивается адекватной математической конкретизацией общих понятий, что, наряду с рассмотрением некоторых приложений к наиболее фундаментальным проблемам лазерной физики, и составляет содержание данной книги.

Книга рассчитана на научных работников, студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в различных областях приложений квантовой физики, и должна представить интерес и для математиков, соприкасающихся с проблемами квантовой теории.

Глава 2
Квантовая теория вероятностей — составная часть квантовой механики

2.1 Необходимость привлечения новых методов и представлений квантовой теории в задачах квантовой радиофизики

Применение квантовой механики к задачам квантовой радиофизики требует существенного выхода за рамки излагаемых в ней понятий и подходов. Наиболее фундаментальное обобщение состоит в перенесении методов описания замкнутых квантовых систем на системы с шумами. Убедиться в этом можно уже на примере простейшей квантовой системы — *двухуровневого атома* (ДА).

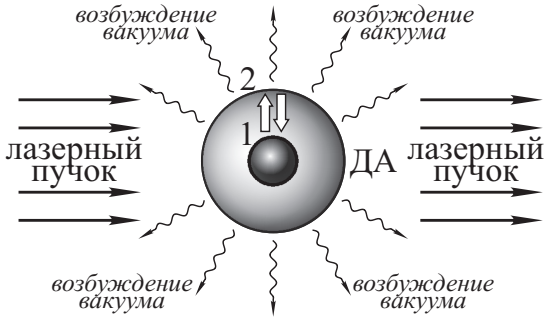

Рис. 2.1 Взаимодействие двухуровневого атома (ДА), возбуждаемого излучением лазера, с электромагнитным полем вакуума, воспринимающим излучение двухуровневого перехода и оказывающим на него реакционное воздействие.

В то время как в обычной квантовой механике он рассматривается как замкнутая система, описываемая соответствующим гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}$, в квантовой радиофизике необходимо также рассмотреть динамику процесса его излучения. Это требует привлечения к рассмотрению дополнительных физических степеней свободы — электромагнитного поля, с которым рассматриваемый атом взаимодействует по законам электро-

динамики. В результате атом должен описываться не как замкнутая, а как так называемая *открытая система* (ОС). Это взаимодействие проиллюстрировано на рис. 2.1. Для описания таких систем методы обычной квантовой механики непригодны, и необходимо привлечение понятий и *методов квантовых случайных процессов* (КСП), которые, в свою очередь, требуют существенной модификации изложения самой квантовой теории. Такое обобщение особенно актуально для широкого спектра задач лазерной физики [1]–[3] и для проблематики квантового компьютера [4], хотя, разумеется, для любой реальной квантовой системы с конечным числом степеней свободы всегда можно указать физический механизм, выводящий ее описание за рамки обратимой квантовой динамики и приводящий к возникновению квантовых шумов.

Общепринятые схемы изложения квантовой теории диктуются, как правило, сложившимися традициями обучения студентов и, в основном, следуют истории развития квантовой механики. В качестве примеров можно привести наиболее популярные учебники по квантовой механике, используемые в традиционных общих курсах квантовой физики [5]–[8], а также базовые руководства по проблемам взаимодействия излучения с атомами [2, 3]. За основу принимается представление, использующее волновую функцию как исходное понятие квантовой механики, и лишь на стадии перехода к гейзенберговским уравнениям движения восстанавливается единство квантовой механики и классической. Плюсом такого подхода является максимальная преемственность с исторически наиболее важным этапом становления квантовой механики, на котором возникло уравнение Шредингера и с его использованием был решен ряд фундаментальных задач атомной физики. Основным минусом, который, в чем можно не сомневаться, остро воспринимается каждым физиком в процессе изучения квантовой механики, является невозможность изложения в рамках одних и тех же терминов основ как квантовой, так и классической механики. Это связано с отсутствием в классической теории физического аналога волновой функции, вследствие чего квантовая динамика прямо не представима в терминах классической механики и квантовая механика выглядит неожиданным и искусственным построением. Общеизвестно, что вокруг проблемы интерпретации квантовой механики возникали очень серьезные дискуссии [9] (знаменитый пример — дискуссия Бор–Эйнштейн на Сольвеевском конгрессе 1927 г.) и многие исследователи испытывали большие трудности в использовании ее методов в тот период, когда ее логическое обоснование было далеко от совершенства (наиболее драматический пример — восприятие квантовой механики Эренфестом [10]). Теперь, однако, после осознания логического смысла различия между квантовой и классической теориями (см. п. 2.2), можно по-настоящему понять, как совмещается принципиальная "непознаваемость" квантовой системы в терминах классических понятий с детерминированным характером самих квантовых уравнений. Особенно "понятной" специфика квантовой теории становится, если выйти за

рамки физико-математического подхода и рассмотреть ситуацию с точки зрения ее возможного высшего смысла, т. е. “божественного промысла”, к которому с неизбежностью в той или иной форме приходят многие исследователи в различных областях науки при обсуждении ее наиболее фундаментальных проблем[1]. В противоположность Эйнштейну, который видел в квантовой теории противоречие с его представлением о Боге — “бог математик, а не азартный игрок в кости!”, теперь становится понятным, что, наоборот, более естественно рассматривать квантовую теорию как математическую модель, дающую представление о том, как могут совмещаться непознаваемость божественного промысла и свобода познания, т. е. отсутствие ограничений на познание любых его конкретных проявлений. В квантовой теории “непознаваемость в целом” отображается невозможностью одновременного обсуждения в терминах классического описания всех квантовых событий, а свобода познания отображается возможностью классического рассмотрения событий, связанных с любой произвольно выбранной физической величиной, или несколькими, описываемыми набором коммутирующих операторов.

В случае динамически замкнутых квантовых систем, представляющих основной объект изучения традиционной квантовой механики, описанная выше трудность в понимании фундаментального смысла квантовой специфики не является, однако, препятствием для вполне адекватного изложения квантовой динамики, задаваемой уравнением Шредингера

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}\psi \tag{2.1}$$

с оператором Гамильтона $\hat{\mathcal{H}}$. При рассмотрении же случайных процессов состояние случайной квантовой системы в общем случае не может быть описано волновой функцией, поскольку волновая функция описывает так называемое “чистое” состояние, которое в классической теории отвечает в некотором смысле детерминированному, а не случайному состоянию (последнему в квантовой теории соответствует смешанное состояние, описываемое матрицей плотности). Поэтому для построения квантовой теории случайных процессов необходимо представить саму квантовую теорию в новой форме, которая, после необходимого перехода от волновой функции к матрице плотности, может быть единой как для квантовых, так и для классических систем.

---

[1] Разумеется, при таком обсуждении необходимо учитывать деликатность темы и правомочность ее рассмотрения с богословской точки зрения только служителями церкви. В то же время очевидна и необходимость, по крайней мере, начального обсуждения специалистами в конкретных областях, в данном случае физиками, обладающими соответствующей узко-профессиональной подготовкой, поскольку появление соображений подобного рода, например, в духовной академии, в силу естественных причин невозможно.

2.2 Представление логики физических событий

Обычно при изложении как классической, так и квантовой теории описание ее общей структуры использует только определение *физических величин*. Поэтому может создаться впечатление, что именно физическая величина является первичным и простейшим понятием физики. Однако, это не так. Сами правила оперирования с физическими величинами подчиняются наиболее общим принципам, закладываемым в теорию как первичные. В классической механике эти принципы принимаются "по умолчанию", и только в теории вероятностей они вводятся в виде самостоятельной математической модели — σ-алгебры событий. В квантовой же теории они постулируются в форме аксиомы, описывающей структуру пространства квантовых состояний в виде гильбертова пространства волновых функций. Напомним соответствующие определения и выявим соответствие между ними.

Более первичным понятием по сравнению с физической величиной является понятие физического события в рассматриваемой физической системе. В классической теории совокупность всех физических событий образует *алгебру событий* $\mathcal{B}$, т. е. множество всех возможных событий, которые описываются как подмножества $A \subseteq \Omega$ *множества элементарных событий* Ω с элементами ω. На алгебре $\mathcal{B}$ определены две операции — объединение подмножеств $A_1 \bigcup A_2$ и их пересечение $A_1 \bigcap A_2$, которые аналогичны, соответственно, операциям сложения и умножения чисел, соответственно, "$+$" и "$\cdot$". Алгебра $\mathcal{B}$ носит название σ-алгебры и является *представлением* классической *логики событий*, которая в абстрактных математических моделях вводится в самом общем виде посредством абстрактной *алгебры логики* безотносительно к описанному здесь ее специальному представлению с помощью σ-алгебры. Отметим, что возможность математической формализации логики была осознана еще в древности и ее представление в виде σ-алгебры было предложено Аристотелем, который рассматривал частный случай σ-алгебры — набор подмножеств геометрического множества на плоскости — так называемые "круги Аристотеля". В этой логике существенным свойством, выражающим ее "классичность", является закон дистрибутивности:

$$(A_1 + A_2) \cdot A_3 = (A_1 \cdot A_3) + (A_2 \cdot A_3). \tag{2.2}$$

Это соотношение легко проверяется хотя бы с помощью геометрических построений на плоскости, как это показано на рис. 2.2а.

Рассмотрим частный случай, когда $A_2 = \bar{A}_1$, где $\bar{A}_1$ обозначает событие, дополнительное к A_1 до единичного — "максимального" — элемента E рассматриваемой алгебры: последний описывает событие, имеющее место всегда, т. е. заведомо "истинное". При этом истинность одного из пары событий $A_1, \bar{A}_1$ автоматически влечет ложность другого. Из соотношения (2.2) получаем:

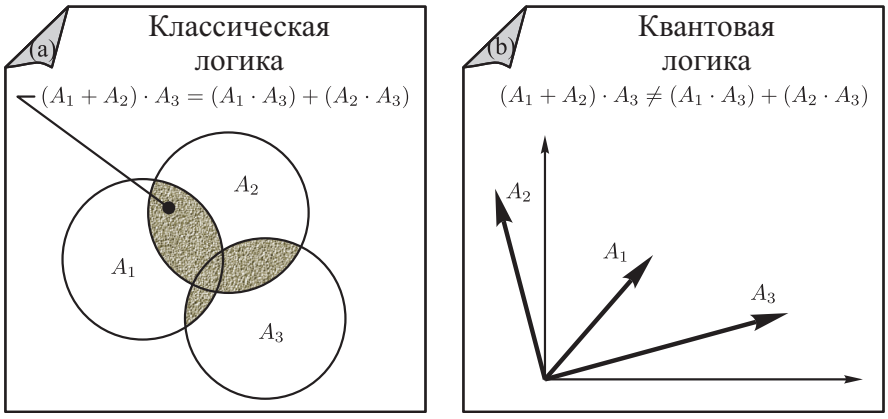

Рис. 2.2 (a) — Иллюстрация закона дистрибутивности классической алгебры логики с помощью кругов Аристотеля. Комбинирование подмножеств в соответствии с обеими частями приведенного равенства дает один и тот же результат. (b) — Недистрибутивность в квантовой логике. Для изображенных элементарных событий имеет место приведенное неравенство.

$$A_3 = (A_1 + \bar{A}_1) \cdot A_3 = A_1 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_3. \tag{2.3}$$

В этом соотношении в силу неперекрываемости $A_1, \bar{A}_1$ из двух слагаемых в правой части для случая атомарного — "нерасщепляемого" события $A_3 = \omega$ только одно может быть отличной от нулевого элемента, т. е. соответствующей *истинному* событию. Тем самым любое событие — "высказывание" ω — представляется в виде "*либо* A_1, *либо* не-A_1." Это логическое соотношение выражает так называемый *закон исключенного третьего*, роль которого во всех точных науках хорошо известна.

В квантовой теории роль множества элементарных событий играет гильбертово пространство H, элементами которого являются волновые функции ψ, описывающие элементарные квантовые события как соответствующие одномерные подпространства в H. При этом алгебра квантовых событий $\mathcal{B}$ образована совокупностью подпространств $A \sqsubseteq H$, причем теперь в качестве операций сложения и умножения возникают операции *а)* линейного объединения подпространств $\mathrm{sp}(A_1, A_2)$ (sp — обозначение линейной оболочки подпространств) и *б)* их пересечения. Однако в описываемой данной алгеброй квантовой логике закон дистрибутивности (2.2) уже не имеет места. В этом легко убедиться на примере двумерного гильбертова пространства, совпадающего с двумерной плоскостью, взяв в качестве элементов A_1, A_2, A_3 три неортогональных вектора ψ_1, ψ_2, ψ_3, изображенных на рис. 2.2-*b*. Действительно, поскольку линейная оболочка двух векторов ψ_1, ψ_2, совпадает со всем пространством (это "единичный" элемент алгебры), левая часть соотношения (2.2) в этом случае равна просто $A_3 = \psi_3$, в то время как правая для ψ_3, не совпадающих

ни с одним из ψ_1, ψ_2, равна нулевому элементу. Однако, в частном случае, когда A_3 либо совпадает с ψ_1 или ψ_2 или с их линейной оболочкой — всей плоскостью, закон дистрибутивности выполняется. Этот случай можно обобщить на произвольную размерность гильбертова пространства, потребовав в общем случае, чтобы каждый новый элемент либо не принадлежал линейной оболочке предыдущих, либо совпадал с одним из них (или принадлежал ему). В этом случае подалгебра рассматриваемых подпространств эквивалентна алгебре подмножеств множества из двух точек. Таким образом, в случае рассмотрения подалгебры ортогональных подпространств квантовая логика является классической ("аристотелевой") логикой, т. е. в алгебре квантовой логики можно всегда выделить неограниченный набор подалгебр, описывающих классические логики.

В связи с невозможностью описания квантовых событий в рамках классической логики возникает вопрос о "познаваемости" квантовых физических событий, поскольку наблюдатель может однозначно интерпретировать лишь классические наборы событий и может возникнуть предположение о необходимости постулирования некоторого специального принципа, касающегося взаимодействия квантовых и классических объектов. На эту роль может претендовать постулат квантового измерения [7, 11]. В действительности, теперь можно считать твердо установленным, что никакого специального постулата не требуется, поскольку и в рамках только квантовой теории можно детально проследить динамику процесса измерения квантовой величины классической системой, понимая под последней, разумеется, квантовую, но такую, что квантовые эффекты в ней асимптотически несущественны (см. п. 9.5). При этом удается не только проследить динамику процесса квантового измерения, но и динамически обосновать борновскую интерпретацию волновой функции ψ, описывающей чистое состояние квантовой физической системы. Формулировка Борна может быть переформулирована следующим образом — с обобщением на произвольные квантовые события: "Вероятности квантовых событий задаются квадратами модулей соответствующих коэффициентов разложения волновой функции в ортогональном базисе, описывающем набор рассматриваемых событий".

2.3 Представление случайных физических величин

Связь физической величины с элементарными событиями задается самой структурой физической величины, в которой можно выделить два базисных понятия: набор возможных значений физической величины $\lambda \in \Lambda$ и набор физических событий, заключающихся в том что физическая величина приняла определенное значение λ. В классической механике, где элементарные события ω описываются точками $X = (q, p)$ классическо-

го фазового пространства, соответствующее представление физической величины $f = F(X)$ имеет вид

$$f = \int_{\Lambda} \lambda \delta \left[F(X) - \lambda \right] d\lambda. \tag{2.4}$$

Очевидно, что этот интеграл тождественно равен $F(X)$. Тем не менее, это очевидное соотношение имеет глубокий качественный смысл. Оно является основанием на введение понятия *индикатора*

$$\chi(A, X) = \begin{cases} 1, \, F(X) \in A, \\ 0, \, F(X) \notin A. \end{cases} \tag{2.5}$$

классического события $f \in A$. Функция (2.5) связана с используемой в теории множеств *характеристической функцией* $\mu(B, X)$ множества $B = B(A)$ точек X, отвечающих множеству A значений функции F: B включает те X, для которых $F(X) \in A$. Фигурирующая в соотношении (2.4) δ-функция есть просто плотность функции χ на спектральном множестве Λ:

$$\chi(d\lambda, X) = \delta \left[F(X) - \lambda \right] d\lambda, \quad f = \int\limits_{\Lambda} \lambda \, \chi(d\lambda, X) \tag{2.6}$$

В квантовой теории, где в традиционной формулировке физические величины описываются самосопряженными операторами (обсуждение возможного обобщения см. в *Приложении П1*), соответствующее представлению (2.4) выражение есть спектральное представление самосопряженного оператора

$$\hat{f} = \begin{cases} \int\limits_{\Lambda} \lambda \hat{P}(d\lambda) \\ \sum\limits_{k} \lambda_k \hat{P}_k, \end{cases} \tag{2.7}$$

описывающее случаи непрерывного и дискретного спектра собственных значений λ. Здесь набор операторов $\hat{P}(d\lambda)$ или $\hat{P}_k$ есть операторы проектирования на подпространства собственных волновых функций, соответствующие областям спектра $d\lambda$ или собственным значениям λ_k. Таким образом, квантовые операторы проектирования есть точный аналог классических характеристических функций. Те и другие реализуют математическое отображение свойств соответствующей логики физических событий на алгебре физических величин. В чем же проявляется для операторов $\hat{P}_k$ или $\hat{P}(d\lambda)$ их неклассичность? Из предшествующего анализа логики квантовых событий следует, что их квантовый характер связан с наличием неортогональных квантовых подпространств. Набору же ортогональных подпространств отвечает ортогональный набор проекторов на соответствующий ортогональный набор подпространств. Соответственно, логика событий, связанных только с одной квантовой величиной, все-

гда является классической. Это не случайно и необходимо для того, чтобы квантовая теория имела логическую связь с миром доступных нашему пониманию событий, подчиняющихся классической логике Аристотеля. Если два самосопряженных оператора коммутируют, то им соответствует общий ортогональный набор собственных проекторов и собственных подпространств, а также классическая логика соответствующего набора квантовых событий, отвечающих этим величинам. Таким образом, эквивалентным выражением классичности на языке физических величин в квантовом случае является коммутативность представляющих их операторов. Только наличие некоммутирующих физических величин делает квантовую теорию отличной от классической. Если же рассматривается множество событий, отвечающих двум некоммутирующим квантовым величинам $\hat{f}$, $\hat{g}$, то в нем законы классической логики неприменимы.

Наличие некоммутативных переменных в квантовой теории с учетом соответствующей ей несправедливости закона исключенного третьего приводит к тому, что в квантовой теории всегда присутствует соответствующая неопределенность, и теория становится принципиально статистической, несмотря на то, что часть физических переменных может иметь точно определенные значения. Поэтому для единообразного описания квантовых и классических систем оно должно строиться на математическом аппарате, ориентированном в общем случае на системы со статистической неопределенностью. В классической теории вероятностей статистические системы описываются так называемым (классическим) *вероятностным пространством* [12], т. е. следующей тройкой объектов:

$$(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P}), \tag{2.8}$$

где Ω и $\mathcal{B}$ — описанные выше множество элементарных событий и некоторая алгебра подмножеств на нем (не обязательно всех), а $\mathcal{P}$ есть классическая вероятностная мера, задающая вероятность для любого множества $A \in \mathcal{B}$ (т. е. для любого подмножества $A \subseteq \Omega$). *Квантовое вероятностное пространство* задается аналогичным образом:

$$(H, \mathcal{B}, \mathcal{P}), \tag{2.9}$$

только роль множества элементарных событий играет гильбертово пространство H, а $\mathcal{B}$, как уже было определено ранее, есть алгебра его подпространств. Вероятностная мера, соответствующая квантовому событию $A \in \mathcal{B}$, выражается в общем случае через матрицу плотности $\hat{\rho}$ квантовой системы:

$$\mathcal{P}(A) = \mathrm{Tr}\hat{P}_A\hat{\rho}, \tag{2.10}$$

где $\hat{P}_A$ обозначает квантовый индикатор события A, т. е. проектор на соответствующее подпространство. Классические же вероятности $\mathcal{P}(A)$ могут быть определены через их распределение на множестве элементарных событий $\mathcal{P}(d\omega)$ с использованием классической индикаторной функции

χ очевидным соотношением

$$\mathcal{P}(A) = \int \chi_A(\omega)\mathcal{P}(d\omega), \tag{2.11}$$

аналогия которого с соотношением (2.10) становится понятной, если учесть, что $\hat{\rho}$ является аналогом классического распределения вероятностей $\mathcal{P}(d\omega)$, проектор $\hat{P}_A$ — аналогом индикаторной функции $\chi_A(\omega)$, а операция вычисления следа Tr — аналогом классического интегрирования или суммирования. Изложенное описание квантовых и классических систем показывает возможность их описания в одних и тех же терминах. После этого, очевидно, должны возникнуть дополнительные возможности, например, при выяснении соотношения между классическим и квантовым описанием для одной и той же физической системы и, в частности, при выполнении предельного перехода от квантового рассмотрения к классическому.

2.4 Единообразное представление квантовой и классической динамики

Временная динамика физической системы теперь может быть приложена не к точным начальным условиям, как это делается в классической механике, и не к чистому состоянию (заданной волновой функции), как это делается при обычном изложении квантовой механики, а к вероятностному пространству. Это соответствует временной эволюции статистического ансамбля, рассматриваемого в статистической физике [13]. Для замкнутой системы в классической теории она описывается классическим уравнением Лиувилля

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P} = \{\mathcal{H}, \mathcal{P}\}, \tag{2.12}$$

а в квантовой теории — квантовым уравнением Лиувилля

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, \hat{\rho}]. \tag{2.13}$$

Далее будет показано, что фигурирующее здесь преобразование $[\cdot, \cdot]$, называемое *квантовой скобкой Пуассона*, в классическом пределе переходит в классическую скобку Пуассона, т. е. эти уравнения не только аналогичны, но и совпадают в квазиклассическом пределе.

Уравнения (2.12), (2.13) задают адекватный подход для построения математической техники случайных процессов. Они определяют эволюционное преобразование $\mathcal{S}(t)$ на алгебре событий. Соответственно, на вероятностном пространстве событий определены зависящие от времени

случайные физические величины, что и является определением *случайного процесса* в теории случайных процессов [12]. Для конкретизации рассматриваемых случайных процессов следует применить описанные понятия к замкнутой физической системе, включающей ОС и все источники шумов, и попытаться редуцировать соответствующую динамику, выделив эволюцию, относящуюся только к ОС. При этом, однако, как это известно из статистической физики, возникает новое качество динамики — необратимость. Так, например, из классической кинетической теории Больцмана известно, что энтропия одночастичной подсистемы в газе только возрастает, когда полное число частиц неограниченно велико. Для развития соответствующей математической техники в квантовом случае, однако, по сравнению с классической теорией требуются дополнительные усилия. Они в существенной степени связаны с тем, что традиционный математический аппарат квантовой механики непосредственно не приспособлен для описания эволюции открытых систем, так как основан на описании эволюции в терминах волновой функции, которая не представлена непосредственно в определении квантового вероятностного пространства. Необходимо, таким образом, развить математическую технику, связывающую аппарат описания динамики волновых функций и аппарат описания динамики матрицы плотности.

Так называемое *шредингеровское* представление динамики основано на уравнении Шредингера (2.1). Оно описывает фактически изменение распределения вероятностей $\mathcal{P}$ квантовой системы, поскольку соответствующая матрица плотности в момент времени t для чистого состояния может быть записана в виде

$$\hat{\rho}(t) = \psi(t)\psi^{+}(t), \tag{2.14}$$

где ψ понимается как вектор-столбец, ψ^{+} — как вектор-строка, а их произведение дает матрицу в соответствии с традиционными обозначениями теории матриц. Соответствующее решению $\psi(t)$ преобразование начальной волновой функции $\psi(0)$ описывается оператором временной эволюции

$$\mathcal{U}(t) = \mathrm{T}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{\mathcal{H}}(\tau)d\tau\right]. \tag{2.15}$$

Здесь T — символ хронологического упорядочения. Изменение во времени матрицы плотности записывается через оператор временной эволюции в виде

$$\hat{\rho}(t) = U(t)\hat{\rho}(0)U^{-1}(t). \tag{2.16}$$

Оно может быть эквивалентным образом перенесено на алгебру самих физических переменных. При этом их операторы будут изменяться в соответствии с преобразованием

$$\hat{f}(t) = U^{-1}(t)\hat{f}(0)U(t), \tag{2.17}$$

являющимся обратным по отношению к преобразованию (2.16), а матрица плотности будет фиксированной. Это представление динамики называется *представлением Гейзенберга*. Помимо представлений динамики в форме Гейзенберга и Шредингера важное значение имеет комбинированное представление — *представление взаимодействия*. Оно полезно, например, когда гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ представляется в виде суммы двух слагаемых вида $\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_I$, где первое слагаемое описывает "невозмущенный" гамильтониан, а второе — внешнее возмущение. Тогда справедливо операторное тождество:

$$\mathcal{U}(t) = U_0(t)U_I(t), \tag{2.18}$$

где $U_0(t)$ описывает невозмущенную эволюцию, а

$$U_I(t) = \mathrm{T}\exp\left[\int_0^t \mathcal{U}^{-1}(\tau)\hat{\mathcal{H}}_I\mathcal{U}(\tau)\,d\tau\right] \tag{2.19}$$

— дополнительное преобразование за счет возмущения. В представлении взаимодействия полагается, что $U_0(t)$ преобразуют в соответствии с соотношением (2.17) все операторы физических величин, а $U_I(t)$ — матрицу плотности согласно соотношению (2.16).

Приведенное описание квантовой динамики в терминах матрицы плотности и физических переменных качественно соответствует подобному же описанию классических систем. Однако очевидно и важное техническое отличие квантового описания: оно комбинируется в виде билинейной операции из эволюционных операторов, действующих на волновую функцию, т. .е. в квантовой теории по сравнению с классической существует дополнительный "нижний этаж" в виде волновых функций, образующих гильбертово пространство: это иллюстрировано на рис. 2.3. Он не имеет непосредственного "физического" смысла, а является просто возможным методом описания квантовых событий.

Если развить какой-либо способ выполнения всех необходимых вычислений без обращения к конкретному представлению гильбертова пространства, то необходимость в этом нефизичном (по крайней мере, в современном понимании) объекте вообще отпадет, и квантовое описание будет аналогично классическому и в смысле математической техники. В таком описании, соответственно, преобразования квантовых физических величин должны фигурировать не в виде комбинации преобразований в гильбертовом пространстве, а в виде линейных операторов непосредственно на линейном пространстве матриц плотности или физических величин. Тем самым, изложение квантовой теории не будет непосредственно использовать нижний уровень на рис. 2.3b, и оно станет аналогично по форме описанию классических случайных систем. Это не исключает, однако, возможность использования волновых функций в тех ситуациях, когда это приводит к упрощению проблемы. В частности, описание марковского случайного процесса стохастической n-компонентной волновой функцией имеет очевидные преимущества перед использованием

Рис. 2.3 Иерархия математических объектов, используемых в классической и квантовой теориях. $\mathcal{L}$ символизирует операторы — в квантовом случае супероператоры — преобразований физических величин или распределений вероятностей, f и $\hat{f}$ — физические величины, $\mathcal{P}$ и $\hat{\rho}$ — классические распределения вероятностей и квантовые матрицы плотности.

матрицы плотности с $n \times n$ матричными элементами и особенно эффективно в компьютерном моделировании динамики квантовых случайных процессов [14]. Поскольку квантовые физические величины и матрицы плотности, в отличие от классических физических величин и распределений вероятности, уже представляются операторами, то действующие на них преобразования, заданные на втором этаже на рис. 2.3b, хотя и являются частным случаем линейных операторов, но с учетом данной двухэтажной операторной структуры часто называются *супероператорами* с целью отличить их от обычных квантовомеханических операторов в гильбертовом пространстве.

Глава 3
Алгебра супероператоров и ее представления

3.1 Символическое представление супероператоров

Поскольку структура квантовой теории уже задана в терминах гильбертова пространства, то в этих же терминах заданы и супероператоры, даже если понятие супероператора явно не используется при изложении. Действительно, в выражениях (2.16), (2.17) *Главы 2*, задающих временную динамику замкнутой квантовой системы без шумов, супероператорное линейное преобразование задано билинейной суперпозицией операторов временной эволюции $U(t), U^{-1}(t)$. Чтобы ввести соответствующие супероператоры безотносительно к преобразуемым операторам, достаточно ввести *символ подстановки* $\odot$, обозначающий место подстановки преобразуемого оператора. Например, для преобразования (2.17) *Главы 2* соответствующий супероператор представляется символическим выражением

$$\mathcal{S}(t) = U^{-1}(t) \odot U(t), \tag{3.1}$$

так что

$$\hat{f}(t) = \mathcal{S}(t)\hat{f}(0). \tag{3.2}$$

Примером подобного использования символов является использование символа $\frac{d}{dx}$ для оператора дифференцирования, образующего в сочетании с оператором умножения на x алгебраический базис шредингеровского представления операторов квантовой механики. Подобного типа представления могут быть определены как *символические*. Их удобство состоит в том, что они вводят новую математическую структуру в терминах исходной. В случае шредингеровского представления это алгебра операторов квантовых физических величин в терминах аргументов волновой функции, а в данном случае — алгебра супероператоров в терминах алгебры квантовых операторов. Для конкретизации символического представления супероператоров следует выявить правила обращения с символическими выражениями, вытекающими из общих определений

алгебры линейных операторов применительно к специфическому случаю алгебры супероператоров.

Итак, символ подстановки определяется в супероператорных выражениях вида $\hat{A} \odot \hat{B}$ правилом применения этого выражения к операторам $\hat{f}$:

$$(\hat{A} \odot \hat{B})\hat{f} = \hat{A}\hat{f}\hat{B}. \tag{3.3}$$

Важно обратить внимание на необходимость использования скобок в левой части, чтобы отделить супероператорное выражение от оператора, к которому оно применяется. Целесообразно также использовать сокращенные выражения

$$\hat{A}\odot \equiv \hat{A} \odot \hat{I}, \quad \odot\hat{A} \equiv \hat{I} \odot \hat{A}$$

и сам символ $\odot$ в качестве единичного супероператора:

$$\odot \equiv \hat{I} \odot \hat{I}.$$

При этом следует при использовании этих выражений помнить о необходимости введения обозначений в форме, различающей операторы, входящие в структуру супероператорного выражения и операторы, к которым оно применяется, например,$(\odot)\hat{f} \equiv \hat{f} \neq \odot\hat{f}$. Рассматривая произвольные квантовомеханические соотношения на алгебре квантовых операторов, легко обнаружить, что любой супероператор может быть отображен в классе линейных комбинаций вида $\mathcal{S} = \sum_n \hat{A}_n \odot \hat{B}_n$, с произвольными операторами $\hat{A}_n, \hat{B}_n$, что эквивалентно классу линейных комбинаций

$$\mathcal{S} = \sum_n c_n \hat{P}_n \odot \hat{Q}_n,$$

где $\hat{P}_n$, $\hat{Q}_n$ —некоторые операторы проектирования в гильбертовом пространстве H состояний квантовой системы. Таким образом, использование символа подстановки позволяет представить любые элементы алгебры супероператоров.

Для обобщения операции комплексного сопряжения на супероператоры следует конкретизировать способ представления пространства преобразуемых операторов. Он определяется соответствующим видом скалярного произведения операторов. В случае волновых функций скалярное произведение имеет вид $(\varphi, \psi) = \int \varphi^*(x)\psi(x)dx$ в континуальном или $(\varphi, \psi) = \varphi^+\psi$ в дискретном случае. В последнем варианте φ, ψ описывают векторы-столбцы, а φ^+ — эрмитово сопряженную строку, так что в соответствии с общими правилами умножения прямоугольных матриц [15] выражение $\varphi^+\psi$ дает стандартное эвклидово скалярное произведение векторов. В линейном же пространстве операторов определение

$$(\hat{A}, \hat{B}) = \mathrm{Tr}\, \hat{A}^+\hat{B} \tag{3.4}$$

с использованием метрики $\rho(\hat{A},\hat{B}) = \sqrt{(\hat{A}-\hat{B},\hat{A}-\hat{B})}$ позволяет различить любые операторы, описываемые различными матрицами $\hat{A}$, $\hat{B}$. Таким образом вводится линейное пространство E операторов Гильберта-Шмидта. Это определение E наиболее эффективно и для описания алгебры супероператоров в E. С учетом эрмитовости матрицы плотности оно адекватно и для отображения важнейшей операции квантовой механики — усреднения операторов по квантовой формуле

$$\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{Tr}\hat{\rho}\hat{A}, \tag{3.5}$$

которая, как и соответствующая формула классического усреднения, включает операторы $\hat{\rho}$ и $\hat{A}$ как существенно вещественные и симметричные относительно перестановки объектов. Оно может быть представлено в виде эквивалентного скалярного произведения

$$\langle\hat{A}\rangle = (\hat{\rho},\hat{A}), \tag{3.6}$$

поскольку $\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}$ и применение в (3.6) определения (3.4) дает требуемое усреднение (3.5).

Сформулируем наиболее важные правила символического представления алгебры супероператоров.

1. *Правило умножения*:

$$(\hat{A}_2 \odot \hat{B}_2)(\hat{A}_1 \odot \hat{B}_1) = \hat{A}_2\hat{A}_1 \odot \hat{B}_1\hat{B}_2.$$

Ближе к символу подстановки в правой части стоят операторы, относящиеся к супероператорам, действующим в левой части раньше, т. е. стоящим правее. С учетом данного правила любое супероператорное выражение может быть представлено в виде линейной комбинации выражений с единственным символом подстановки.

2. *Правило возведения в степень*:

$$(\hat{A} \odot \hat{B})^n = \hat{A}^n \odot \hat{B}^n.$$

3. *Правило обращения*:

$$(\hat{A} \odot \hat{B})^{-1} = \hat{A}^{-1} \odot \hat{B}^{-1}.$$

4. *Правило суперпозиции коммутаторов*:

$$[\hat{A}_n,\odot]...[\hat{A}_1,\odot] = [\hat{A}_n,[\hat{A}_{n-1},[...,[\hat{A}_1,\odot]...]]],$$

где $[\hat{A}_k,\odot] = \hat{A}_k \odot - \odot \hat{A}_k$ описывает операцию коммутирования преобразуемого оператора с оператором $\hat{A}_k$, а $[\hat{A}_n,[\hat{A}_{n-1},[\ldots,[\hat{A}_1,\odot]...]]]$ — суперпозицию последовательных операций коммутирования с операторами $\hat{A}_n,\hat{A}_{n-1},\ldots,\hat{A}_1$.

5. *Правило коммутации односторонних одночленов*:

$$(\hat{A}\odot)(\odot\hat{B}) = (\odot\hat{B})(\hat{A}\odot),$$

т.е. коммутатор "левого" и "правого" одночленных супероператоров $\hat{A}\odot$, $\odot\hat{B}$ равен нулю.

6. *Правило вычисления экспоненты от суммы односторонних одночленов*:

$$\exp(\hat{A}\odot + \odot\hat{B}) = \exp(\hat{A})\odot\exp(\hat{B}).$$

Доказательство: с учетом правила коммутативности 5 супероператорная экспонента $\exp(\hat{A}\odot + \odot\hat{B})$ сводится к произведению супероператоров $\exp(\hat{A}\odot)\exp(\odot\hat{B})$, что и приводит к результату 6.

7. *Правило вычисления экспоненты от коммутатора*:

$$\exp([\hat{A},\odot]) = \exp(\hat{A})\odot\exp(-\hat{A}).$$

Это простое следствие правила 6 при $\hat{B} = -\hat{A}$.

Последнее правило позволяет представить преобразование временной эволюции (3.1) квантовомеханических операторов через супероператор коммутирования — квантовую скобку Пуассона, или лиувиллиан

$$\mathcal{L} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{\mathcal{H}}\odot - \odot\hat{\mathcal{H}}\right] \tag{3.7}$$

в виде экспоненты

$$\mathcal{S}(t) = \exp\left(\mathcal{L}t\right), \tag{3.8}$$

где для простоты полагается, что гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ не зависит от времени. Супероператор (3.8) описывает временную эволюции матрицы плотности в виде решения (3.2) уравнения (2.16) *Главы 2*. Для гамильтонианов, зависящих от времени, это соотношение должно быть представлено в хронологически упорядоченном виде, для чего необходимо определить хронологическое упорядочение супероператоров. Эволюция динамических переменных задается обратным преобразованием (2.17) *Главы 2*, для которого, по аналогии с унитарным преобразованием в гильбертовом пространстве H также полезно установить его связь с эрмитово сопряженным супероператором, для чего это понятие должно быть соответствующим образом определено.

8. *Хронологическое упорядочение супероператоров* определяется следующим образом:

$$\mathrm{T}\left\{...\hat{A}(t_1)...\hat{A}(t_2)\ldots\odot\ldots\hat{B}(\tau_1)\ldots\hat{B}(\tau_2)\ldots\right\} = \ldots\hat{A}(t_2)\hat{A}(t_1)\odot\hat{B}(\tau_1)\hat{B}(\tau_2)\ldots, \tag{3.9}$$

где в правой части времена $t_1, t_2, \ldots$ и $\tau_1, \tau_2, \ldots$ для случая супероператоров, преобразующих матрицу плотности расставляются в порядке их

возрастания по мере удаления от символа подстановки, а для супероператоров, преобразующих физические величины — наоборот. Эти правила иллюстрируются на рис. 3.1.

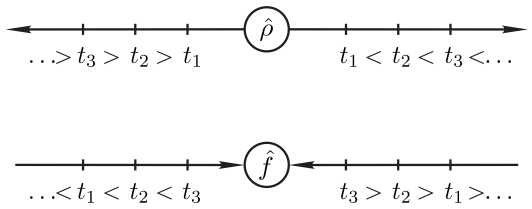

Рис. 3.1 Хронологически упорядоченное расположение операторов в символически представленных супероператорных выражениях, преобразующих матрицы плотности (верхняя схема) и физические величины (нижняя схема).

С использованием понятия о хронологическом упорядочении определение (3.8) эволюционного супероператора может быть следующим образом обобщено на случай, когда гамильтониан и соответствующий ему лиувиллиан (3.7) зависят от времени:

$$\mathcal{S}(t) = \mathrm{T}\exp\left[\int_0^t \mathcal{L}(\tau)d\tau\right]. \tag{3.10}$$

9. *Эрмитово сопряжение супероператоров* определяется тем же соотношением, что и для любых линейных операторов в гильбертовом пространстве

$$\left(\mathcal{S}^+\hat{A}, \hat{B}\right) = \left(\hat{A}, \mathcal{S}\hat{B}\right), \tag{3.11}$$

где использовано скалярное произведение (3.4). Соответствующее правило сопряжения для символических представлений определяется соотношением

$$(\hat{A} \odot \hat{B})^+ = \hat{A}^+ \odot \hat{B}^+, \tag{3.12}$$

т.е. эрмитово сопряжение супероператора сводится к эрмитову сопряжению операторов $\hat{A}, \hat{B}$. Справедливость этого соотношения очевидна после подстановки $\mathcal{S} = \hat{A} \odot \hat{B}$ в определение (3.11) с учетом определения скалярного произведения (3.4):

$$\mathrm{Tr}\left(\mathcal{S}^+\hat{X}\right)^+\hat{Y} = \mathrm{Tr}\hat{X}^+\hat{A}\hat{Y}\hat{B} \to \mathcal{S}^+\hat{X} = \left(\hat{B}\hat{X}^+\hat{A}\right)^+ = \left(\hat{A}^+ \odot \hat{B}^+\right)\hat{X}.$$

10. *Транспонирование супероператоров* в абстрактном виде может быть определено как

$$\mathcal{S}^{\mathrm{T}}\hat{A} = \left(\mathcal{S}^+\hat{A}^+\right)^+. \tag{3.13}$$

Нетрудно видеть, что если вместо $\mathcal{S}$ в этом соотношении рассматривать как $n \times n$ матрицу, а вместо $\hat{A}$ — n-мерный вектор, то оно сводится к перестановке матричных индексов соответствующей матрицы $\mathcal{S}$, причем само соотношение (3.13) эквивалентно векторному тождеству $(S^{\mathrm{T}}a) = (S^{+}a^{*})^{*}$. В символическом представлении правило транспонирования имеет вид:

$$(\hat{A} \odot \hat{B})^{\mathrm{T}} = \hat{B} \odot \hat{A}, \tag{3.14}$$

т.е. в отличие от эрмитова сопряжения операторы $\hat{A}$, $\hat{B}$ не сопрягаются, но переставляются местами. Справедливость этого результата легко проверить, рассматривая $\mathcal{S} = \hat{A} \odot \hat{B}$ и убеждаясь с учетом (3.12), что

$$\mathcal{S}^{\mathrm{T}}\hat{X} = \left(\hat{A}^{+}\hat{X}^{+}\hat{B}^{+}\right)^{+} = \hat{B}\hat{X}\hat{A}\,.$$

11. *Левое супероператорное преобразование* определяется следующим образом:

$$\hat{A}\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\mathrm{T}}\hat{A}. \tag{3.15}$$

Это определение левого умножения аналогично отождествлению умножения слева вектора-строки на квадратную матрицу с результатом умножения транспонированной матрицы на такой же столбец в соответствии с выражением $a^{\mathrm{T}}S = \left(S^{\mathrm{T}}a\right)^{\mathrm{T}}$ с тем отличием, что в выражении (3.15) оператор $\hat{A}$ фигурирует в общем виде, а не в виде его представления вектором-столбцом или строкой.

12. *Эрмитовость супероператоров* определяется соотношением $\mathcal{S}^{+} = \mathcal{S}$. Супероператоры вида

$$\hat{A} \odot \hat{A}^{+} + \hat{A}^{+} \odot \hat{A},$$
$$\hat{A} \odot \hat{B} \text{ для эрмитовых } \hat{A}, \hat{B},$$
$$\hat{A} \odot + \odot \hat{A} \text{ для эрмитова } \hat{A},$$
$$i(\hat{A} \odot \hat{A}^{+} - \hat{A}^{+} \odot \hat{A}),$$
$$[\hat{A}^{+}, \odot][\hat{A}, \odot]$$

эрмитовы.

13. *Антиэрмитовость супероператоров* определяется соотношением $\mathcal{S}^{+} = -\mathcal{S}$. Супероператоры вида

$$i[\hat{A}, \odot] \text{ для эрмитова } \hat{A}$$

антиэрмитовы.

14. *Антисимметричность супероператоров* определяется соотношением $\mathcal{S}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{S}$. Супероператоры вида

$$\hat{A} \odot \hat{A}^{+} - \hat{A}^{+} \odot \hat{A},$$
$$[\hat{A}, \odot] \text{ для эрмитова } \hat{A}$$

антисимметричны. Соответственно, лиувиллиан (3.7) является эрмитовым и антисимметричным супероператором.

Используя определение эрмитовой сопряженности (3.11), получаем для супероператоров вида (3.1) простое соотношение

$$\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^{+}, \tag{3.16}$$

справедливое для унитарных операторов, которыми и являются супероператоры вида (3.1) в линейном пространстве квантовых операторов с введенным выше скалярным произведением.

Для символических представлений унитарных супероператоров (3.1) справедливо

15. *Правило унитарного преобразования*:

$$\mathcal{S}f(\hat{A} \odot \hat{B})\mathcal{S}^{-1} = f(\mathcal{S}\hat{A} \odot \mathcal{S}\hat{B}). \tag{3.17}$$

Для случая супероператора временной эволюции $S = S(t)$ оно выражает тот очевидный факт, что преобразование временной эволюции, примененное к супероператору, выраженному с помощью функции f через операторы физических величин, сводится просто к замене начальных значений операторов на их значения в момент времени t.

В результате описанной конкретизации основных определений теории линейных операторов применительно к супероператорам символическое представление самым естественным образом отображает все основные операции матричной алгебры. Это делает данное наиболее экономное и наглядное представление супероператоров эффективным не только для целей описания структуры супероператоров, возникающих в теории квантовых случайных процессов, но и для выполнения наиболее общих расчетов как в аналитическом, так и численном виде.

3.2 Матричные представления

Как и любые линейные операторы, супероператоры могут быть представлены в виде матриц после введения линейного базиса на линейном пространстве квантовых операторов. Теперь следует отметить, что в квантовой теории определены два качественно отличные класса операторов: операторы, описывающие физические переменные, и операторы, описывающие квантовые состояния, т. е. матрицы плотности. Этот дуализм проявляется в структуре усреднения по формуле (3.5), билинейной по этим операторам. При этом эти два класса операторов качественно неравноправны, поскольку матрицы плотности удовлетворяют условиям ограниченности и нормировки, в то время как такие требования к физическим величинам излишни. Кроме того, матрицы плотности безразмерны, в то время как рассмотрение физических величин обычно связано

с определенными физическими размерностями. Например, в квантовой механике материальной точки алгебраический (но не линейный) базис алгебры физических величин образуется операторами канонического импульса и координаты, произведение размерностей которых имеет размерность действия. Поэтому удобные операторные базисы для физических переменных могут иметь физическую размерность, отличную от размерности базиса матриц плотности. Кроме того, в общем случае рассматриваемые в теории линейные пространства матриц плотности и операторов физических величин могут не совпадать и принципиально не иметь общего линейного базиса.

Еще одно важное соображение общего характера связано с геометрической размерностью линейного пространства, необходимого для представления физических величин и матриц плотности. Поскольку все мыслимые в квантовой механике преобразования получаются комбинацией унитарных преобразований и усреднения по части переменных, то они заведомо не изменяют единичный оператор, если применяются к операторам физических величин, и след, если применяются к матрицам плотности. Поэтому, если представить операторы физических величин в виде

$$\hat{A} = a\hat{I} + \hat{B}, \tag{3.18}$$

где a — произвольное число, а оператор $\hat{B}$ принадлежит некоторому линейному пространству операторов, не включающему единичный, то для бесконечно малого при $\varepsilon \to 0$ линейного преобразования

$$\hat{A} \to \hat{A} + \varepsilon\, \mathcal{L}\hat{A}$$

из условия неизменности $\hat{A}$ при $\hat{B} = 0$, т. е. $\mathcal{L}\hat{A} = \mathcal{L}\hat{I} = 0$, вытекает следующая самая общая блочная структура супероператора физического преобразования:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{W}^{\mathrm{T}} \\ 0 & \mathcal{L}_\sigma \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

где верхний нулевой элемент есть нулевое число, описывающие преобразование $a \to a' = 0$; нижний нулевой — преобразование $a \to \hat{B}' = 0$; верхний ненулевой — преобразование $\hat{B} \to a' = \mathcal{W}^{\mathrm{T}}\hat{B}$, т. е. $\mathcal{W}^{\mathrm{T}}$ есть линейный функционал на линейном подпространстве операторов $\hat{B}$ (символ транспонирования указывает, что при векторном представлении $\mathcal{W}^{\mathrm{T}}$ есть строка, полученная транспонированием вектора $\mathcal{W}$); нижний ненулевой — супероператорное преобразование $\hat{B} \to \hat{B}' = \mathcal{L}_\sigma\hat{B}$. Если применить супероператор $\mathcal{L}$ к матрицам плотности $\hat{\rho}$, представив их в виде линейной комбинации какого-либо выделенного оператора с ненулевым следом и произвольного оператора с нулевым следом (в качестве первого можно взять оператор, кратный единичному), то получаем блочную структуру, транспонированную по отношению к описываемой соотношением (3.19). Если ввести преобразование матрицы плотности как ее умножения слева

в виде $\hat{\rho} \to \hat{\rho}' = \hat{\rho} + \varepsilon\, \hat{\rho}\hat{\mathcal{L}}$, то представление (3.19) является единым выражением как условия неизменности единичного оператора, так и условия сохранения следа матрицы плотности. Матрицы плотности однозначно могут быть заданы лишь второй компонентой разложения (3.18), поскольку ее нормировка на единицу определяет параметр $a = 1/(\mathrm{Tr}\,\hat{I})$ как константу системы ($w_0 = 1/2$ для ДС). Несмотря на это произвольные преобразования в общем случае могут включать не только линейное преобразование в подпространстве компонент $\hat{B}$, но и недиагональный элемент. Однако, если рассматриваемое преобразование унитарно, т. е. описывает динамику замкнутой системы, то $\mathcal{W}^{\mathrm{T}} = 0$, и оно всегда может быть описано в подпространстве, не содержащем единичного оператора. В случае произвольных ОС это не так, хотя для специальных типов ОС это иногда возможно. В общем случае при рассмотрении только этого подпространства рассматриваемые преобразования теряют свойство линейности, так как в соответствующих уравнениях вклад $\mathcal{W}^{\mathrm{T}}$ отображается свободным членом, не содержащим компонент матрицы плотности $\hat{\rho}$. В некоторых работах по релаксации ДА или электронного спина динамика ОС исследовалась именно таким образом [16], с использованием представления динамики в терминах трехмерного пространства векторов Блоха, задающих матрицу плотности. Невозможность для ОС представления динамики унитарным преобразованием только в подпространстве динамических переменных при использовании представления стохастическим уравнением для волновой функции выражается в нелинейности уравнения [14].

Супероператорам вида (3.19) соответствует следующая универсальная структура собственных значений и соответствующих правых и левых собственных векторов, записанных с использованием системы обозначений Дирака [8]:

$$\lambda_0 = 0, \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \langle 0| = \left(1,\, -\mathcal{W}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}_\sigma^{-1}\right), \tag{3.20}$$

$$\lambda \neq 0, \qquad |\lambda\rangle = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}\mathcal{W}^{\mathrm{T}}\hat{e}_\sigma \\ \hat{e}_\sigma \end{pmatrix}, \qquad \langle\lambda| = \left(0,\, \hat{h}_\sigma\right). \tag{3.21}$$

Здесь $\hat{e}_\sigma$, $\hat{e}_\sigma$ — правые и левые собственные операторы супероператора $\mathcal{L}_\sigma$:

$$\mathcal{L}_\sigma \hat{e}_\sigma = \lambda\, \hat{e}_\sigma, \qquad \hat{h}_\sigma \mathcal{L}_\sigma = \lambda\, \hat{h}_\sigma. \tag{3.22}$$

После перехода к векторному представлению операторов они описываются векторами-столбцами или строками, а функционал $\mathcal{W}^{\mathrm{T}}$ — вектором-строкой. При этом правое соотношение в (3.20) определяет общий вид стационарной матрицы плотности, а (3.21) сводят исходную проблему расчета собственных значений и собственных векторов к проблеме (3.22) в подпространстве с размерностью меньшей исходной на единицу, кото-

рое отвечает только физически переменным величинам, линейно независимым от единичного оператора $\hat{I}$.

Супероператорная блочная структура (3.19) является частным случаем более общего класса супероператоров, играющего важную роль в теории атомных резонансов и в теории релаксации системы линейных осцилляторов. Это *понижающие* супероператоры, для которых в естественном для рассматриваемой проблемы выборе операторного базиса $\hat{e}_k$ существует такое разложение линейного пространства E рассматриваемых операторов в виде $E_1 \oplus E_2$, для которого лиувиллиан имеет блочное представление

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ 0 & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

т. е. никакие переменные из подпространства E_1 не преобразуются в переменные из подпространства E_2. Соответственно, $f(\mathcal{L})E_1 = f(\mathcal{L}_{11})E_1$, т. е. для расчета переменных $\hat{A}$, принадлежащих линейному подпространству E_1, не требуется введения в рассмотрение переменных из E_2, т. е. происходит уменьшение размерности проблемы при расчете средних значений $\langle\hat{\rho}|\, f(\mathcal{L})\,|\hat{A}\rangle$, если только векторное представление $\langle\hat{\rho}|$ матрицы плотности известно. Целесообразно особо выделит класс *глобалььно* понижающих супероператоров, которые имеют описанную структуру для любой пары подпространств $E_k \oplus E_{k+1}$ из разложения полного пространства в виде $E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2...$, естественного для рассматриваемой проблемы. Такая ситуация возникает в следующих двух специальных случаях — в N-уровневом атоме и в системе гармонических осцилляторов. В N-уровневом атоме это имеет место, если для системы уровней с энергиями, превосходящими энергию некоторого уровня, отсутствуют процессы возбуждения с нижележащих уровней. В системе гармонических осцилляторов с линейным затуханием эволюционный оператор представляется в вид суммы оператора гармонических осцилляций, оператора линейного затухания и оператора линейной диффузии, которые преобразуют полиномы n-ой степени координат и импульсов в полиномы той-же степени. В качестве подпространства E_1 при этом может рассматриваться линейная оболочка полиномов любой степени n.

Пусть супероператор $\mathcal{S}$ определен на линейном пространстве E операторов $\hat{A} \in E$ и в E определен линейный базис операторов $\{\hat{e}_k\}$, с помощью которого операторы $\hat{A}$ представляются в виде соответствующих линейных комбинаций

$$\hat{A} = \sum a_k \hat{e}_k. \tag{3.24}$$

Базис $\{\hat{e}_k\}$ может быть определен как *правый*, поскольку используется для представления операторов, стоящих справа в выражении $\mathcal{S}\hat{A}$. Набор чисел a_k является *векторным представлением* оператора $\hat{A}$. Результат преобразования $\hat{B} = \mathcal{S}\hat{A}$ представляется в линейной комбинации $\mathcal{S}\hat{A} = \sum a_k \mathcal{S}\hat{e}_k$. Коэффициенты S_{nk} разложения

$$\mathcal{S}\hat{e}_k = \sum_n S_{nk}\hat{e}_n \tag{3.25}$$

называются *матричным представлением* супероператора $\mathcal{S}$. При этом векторное представление оператора $\hat{B} = \sum b_k\hat{e}_k$, как легко видеть, описывается в виде матричного преобразования

$$b_n = \sum_k S_{nk}a_k. \tag{3.26}$$

Удобно использовать систему обозначений Дирака, чтобы сделать наглядной связь между векторными представлениями операторов и самими операторами. Будем описывать векторное представление оператора $\hat{A}$ кет-вектором

$$|\hat{A}\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_k \\ \dots \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

а супероператор $\mathcal{S}$ будем отождествлять, где это не вызывает недоразумения, с матрицей (S_{nk}). В этих обозначениях имеем для представление результата супероператорного преобразования

$$|\mathcal{S}\hat{A}\rangle = S\,|\hat{A}\rangle, \tag{3.28}$$

где $\mathcal{S}$ слева обозначает супероператор безотносительно к способу его представления, а справа стоит соответствующая матрица S.

Для того, чтобы рассчитать коэффициенты a_k, S_{nk}, можно ввести некоторый базис $\{\hat{h}_k\}$, взаимно ортонормированный по отношению к базису $\{\hat{e}_k\}$:

$$(\hat{h}_k, \hat{e}_n) = \delta_{kn}. \tag{3.29}$$

В отличие от $\{\hat{e}_k\}$, его можно определить как "левый". Тогда, умножая скалярно обе части представления (3.24) слева на $\hat{h}_n$, получаем с учетом соотношения (3.29)

$$a_k = (\hat{h}_k, \hat{A}). \tag{3.30}$$

Аналогично, из соотношения (3.25) получаем

$$S_{nk} = (\hat{h}_n, \mathcal{S}\hat{e}_k). \tag{3.31}$$

С использованием обозначений Дирака для скалярного произведения, определенного соотношением (3.4) последние два правила принимают вид:

$$a_k = \langle\hat{h}_k|\hat{A}\rangle, \quad S_{nk} = \langle\hat{h}_n|\mathcal{S}\hat{e}_k\rangle\,. \tag{3.32}$$

Здесь учтено представление скалярного произведения в форме

$$(\hat{A},\hat{B}) = \langle\hat{A}|\hat{B}\rangle, \tag{3.33}$$

где

$$\langle\hat{A}| = (a_1^*,\ldots,a_n^*,\ldots) \tag{3.34}$$

— вектор-строка ("бра-вектор"), полученная из разложения $\hat{A} = \sum a_k\hat{g}_k$. Она эрмитово сопряжена к вектору $|\hat{A}\rangle$, так что $\langle\hat{A}|\hat{A}\rangle = \sum|a_k|^2$, если базис ортонормирован, т. е. $\hat{h}_k = \hat{e}_k$ и

$$(\hat{e}_k,\hat{e}_n) = \delta_{kn}\,.$$

Полезно выделить класс базисов $\{\hat{e}_k\}$, используемых для представления преобразуемых операторов и супероператоров, в котором представления a_k и матрицы S_{nk} прямым образом воспроизводят структуру комплексного сопряжения комплексных чисел, отображаемую также и алгеброй операторов физических величин[1]. Таким базисом, очевидно, является базис эрмитовых операторов. Для него эрмитовым операторам $\hat{A}$ соответствуют вещественные векторы a_k, что очевидно из самого представления (3.24) с учетом линейной независимости базисных операторов: если в правой части хотя бы один из коэффициентов a_k имеет ненулевую мнимую часть, то описываемый им операторный вклад имеет ненулевую антиэрмитову часть, и оператор $\hat{A}$ не будет эрмитовым. Эрмитово сопряженным операторам соответствуют комплексно сопряженные векторы, а эрмитово сопряженным супероператорам — эрмитово сопряженные матрицы:

$$\hat{A}^+ \longrightarrow (a_k^*), \quad \mathcal{S}^+ \longrightarrow S^+. \tag{3.35}$$

Последнее соответствие следует из выражения (3.31) с учетом представления скалярного произведения (3.4):

$$(S)^+_{nk} = (S)^*_{kn} = \left(\mathrm{Tr}\hat{h}_k^+\mathcal{S}\hat{e}_n\right)^* = \mathrm{Tr}(\mathcal{S}\hat{e}_n)^+\hat{h}_k = (\mathcal{S}\hat{e}_n,\hat{h}_k) = (\hat{e}_n,\mathcal{S}^+\hat{h}_k). \tag{3.36}$$

Последнее соотношение в соответствии с определением эрмитова сопряжения и есть nk-ый матричный элемент эрмитово сопряженного супероператора $\mathcal{S}^+$, который задан в другом линейном пространстве E^* операторов с линейным базисом $\hat{h}_k$. В практических расчетах пространства E^*, E часто совпадают. В частности, в рассматриваемых здесь представлениях используются базисы, у которых правые и левые базисные векторы отличаются только постоянным множителем:

$$\hat{h}_k = \mathrm{const}\times\hat{e}_k. \tag{3.37}$$

---

[1] Комплексному сопряжению соответствует эрмитово сопряжение, вещественным числам соответствуют эрмитовы операторы ($\hat{A} = \hat{A}^+$), мнимым — антиэрмитовы ($\hat{A} = -\hat{A}^+$).

Унитарный супероператор $\mathcal{S}$ вида (3.1) представляется унитарной матрицей $S^{-1} = S^{+}$, антиэрмитов супероператор $\mathcal{L}$ — антиэрмитовой матрицей $L^{+} = -L$.

Центральной задачей теории является расчет зависящих от времени физических величин. Если определен супероператор временной эволюции $\mathcal{S}(t)$, действующий на операторы физических величин $\hat{A}$, и рассчитано его матричное представление $S(t)$ в базисе $\hat{e}_k$, а матрицы плотности представлены в биортогональном базисе $\hat{h}_k$, то в соответствии с развитой техникой правило вычисления средних имеет вид:

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Tr}\, \hat{\rho}\mathcal{S}(t)\hat{A} = \langle \hat{\rho}|S(t)|\hat{A}\rangle\,. \tag{3.38}$$

Для того, чтобы полностью отобразить все операции на алгебре физических переменных, необходимо в дополнение к описанной теории линейных преобразований дать представление операторного умножения $\hat{A}\hat{B}$ в терминах представляющих их векторов $|\hat{A}\rangle, |\hat{B}\rangle$. Однако, такого универсального представления не существует, и оно может быть введено только в конкретном виде,справедливом для соответствующей специальной квантовой системы и заданного операторного базиса. Оно может быть выражено через соответствующее правило представления умножения базисных операторов, которое обязано выражаться в виде линейной комбинации базисных операторов, если линейный базис является полным в рассматриваемой алгебре:

$$\hat{e}_k\hat{e}_l = G_{klm}\hat{e}_m \tag{3.39}$$

(по совпадающим индексам подразумевается суммирование). Тензор G_{klm} есть набор *структурных коэффициентов* рассматриваемой алгебры, которые не зависят от выбора специфического представления базисных операторов $\hat{e}_k$, т. е. сохраняются при преобразованиях $\hat{e}_k \;\rightarrow\; U^{-1}\hat{e}_k\,U$. С помощью этого тензора может быть найдено векторное представление для произведения любой пары операторов из рассматриваемой алгебры.

Глава 4
Важнейшие примеры супероператоров замкнутых квантовых систем

4.1 Двухуровневая система

Гильбертово пространство двухуровневой квантовой системы есть в самом общем случае комплексное[1] двумерное пространство $H \ni \psi$, описываемое комплексными двумерными векторами ψ, из которых физически различным состояниям соответствуют нормированные векторы с отброшенным общим фазовым множителем:

$$\psi = \begin{pmatrix} \sqrt{1-n_2} \\ \sqrt{n_2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $n_2 = |\psi_2|^2$ соответствует средней населенности верхнего уровня. Соответственно, множество физически различных состояний двумерно. Его принято представлять на трехмерной сфере Пуанкаре (рис. 4.1), возникающей после расчета трехмерного вектора

$$\mathbf{s} = \psi^+ \hat{\boldsymbol{\sigma}} \psi, \tag{4.2}$$

где $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ — трехмерный вектор матриц Паули

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Вектор $\frac{1}{2}\mathbf{s}$ естественным образом появляется в квантовой физике в качестве характеристики среднего значения вектора спинового момента ча-

[1] Реализуется ли в какой-либо фундаментальной частице вещественное двумерное пространство как полное пространство ее спиновых состояний? В случае поляризационных состояний световой волны оно описывает класс линейно поляризованных состояний. Его аналогом в случае орбитального движения частицы является пространство состояний с вещественными волновыми функциями, в которых средний импульс частицы всегда равен нулю, т. е. “отсутствует движение”.

стицы со спином 1/2. При этом $s^2 = 1$ для любых ψ, причем переход от одной волновой функции к другой отвечает соответствующему повороту в вещественном трехмерном пространстве, который при квантовомеханическом усреднении может быть перенесен с волновой функции на вектор $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$.

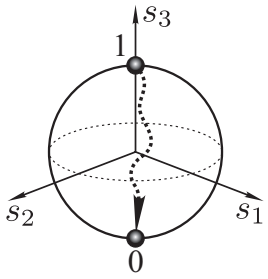

Рис. 4.1 Изображение множества чистых квантовых состояний на трехмерной сфере Пуанкаре. Точки 1 и 0 отвечают состояниям $|2\rangle$ и $|1\rangle$ с соответствующими значениями $n_2 = 1$ и $n_2 = 0$. Стрелкой показан процесс спонтанного распада в ДА.

Алгебра $\mathcal{B}$ физических событий описывается как алгебра подпространств, которые могут иметь вид одного из трех типов:

$$\{\emptyset, \psi, H\},$$

где первый член обозначает пустое множество, второй — одномерное линейное пространство, отождествляемое с ψ, третий — само пространство состояний, имеющее смысл единичного элемента данной алгебры. Квантовая вероятностная мера $\mathcal{P}$, входящая в определение вероятностного пространства $(H, \mathcal{B}, \mathcal{P})$, введенного в *Главе 2*, выражается через 2×2-матрицу плотности [17, 18]

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Она удовлетворяет условиям *эрмитовости* $\mathcal{J}\mathrm{m}\,(\rho_{11}) = \mathcal{J}\mathrm{m}\,(\rho_{22}) = 0$, $\rho_{21} = \rho_{12}^*$, *положительности* $\psi^+ \hat{\rho} \psi \geq 0$ для всех ψ и *нормировки* $\mathrm{Tr}\hat{\rho} = \rho_{11} + \rho_{22} = 1$.

Помимо полного вероятностного пространства, включающего все физические состояния двухуровневой системы, в специальных случаях могут возникать редуцированные пространства. Пример редуцированного квантового вероятностного пространства двухуровневой системы дается алгеброй событий, представленной ортогональными состояниями $|1\rangle$, $|2\rangle$ плюс все H плюс пустое подпространство $\emptyset$. Эта алгебра естественным образом возникает при рассмотрении квантового случайного процесса в ДА в условиях неограниченно быстрой упругой дефазировки (см. п. 10.4), когда квантовый случайный процесс в полном квантовом пространстве сводится к классическому случайному процессу в редуцированном веро-

ятностном пространстве, в котором логика квантовых событий совпадает с классической.

Операторы физических величин описываются матрицами

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

которые, в отличие от матрицы плотности, удовлетворяют лишь требованию эрмитовости (если они описывают вещественные физические величины).

Линейный базис в пространстве 2×2-матриц четырехмерен, так что он должен представляться четырьмя базисными операторами. Существуют два подхода, соответствующие различным уровням общности введения этих операторов. Наиболее общий подход состоит в *алгебраическом* описании базиса безотносительно к способу его конкретного представления матрицами. Он реализуется путем задания набора алгебраических соотношений, определяющих эти операторы однозначно с точностью до унитарного преобразования. Таким способом вводятся так называемые *операторы квазиспина*, определяемые коммутационными соотношениями

$$[\hat{s}_k, \hat{s}_l] = 2i\varepsilon_{klm}\hat{s}_m, \quad k,l,m = 1,2,3, \tag{4.6}$$

где ε_{klm} — тензор Леви-Чевита [15], который равен 1 для сочетания 1,2,3, нулю при наличии двух или более совпадающих индексов и меняет знак при любой перестановке двух индексов; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Соотношение (4.6) есть определение спина электрона, через который его спиновый момент выражается домножением на $\hbar/2$. При замене $(\hbar/2)\hat{s}_k = \hat{M}_k$ оно дает стандартное алгебраическое определение операторов любого вращательного момента [5]–[8]. После дополнения операторов (4.6) единичным оператором для представления физических величин можно ввести следующий базис:

$$\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} = \{\hat{I}, \hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3\}. \tag{4.7}$$

Биортогональный к нему базис операторов $\hat{h}_k$ отличается от него множителем $1/2$, который не отражается на матричных элементах, представления если использовать его вместо $\hat{e}_k$. Он более удобен для представления матриц плотности, поскольку через него она представляется разложением [18]:

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha=0}^{3} w_\alpha \hat{h}_\alpha = \frac{1}{2}\left(w_0\hat{I} + \sum_{k=1}^{3} w_k \hat{s}_k\right), \tag{4.8}$$

где w_0 всегда равно единице в силу нормировки, w_k вещественны в силу эрмитовости $\hat{\rho}$, а $\sum w_k^2 \le 1$ в силу положительной определенности. Операторы квазиспина обычно объединяются в трехмерный вектор $\hat{\mathbf{s}}$. С

использованием этого обозначения матрицы плотности записываются в виде

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left[w_0\hat{I} + (\mathbf{w}\hat{\mathbf{s}})\right], \tag{4.9}$$

где $\mathbf{w}$ обозначает трехмерный вектор (w_1, w_2, w_3), который в теории ДА носит название вектора Блоха. Для чистых состояний, т.е. для матриц плотности, представимых в виде $\hat{\rho} = \psi\psi^+$, он имеет единичную длину:

$$w_1 = 2\sqrt{n_2(1-n_2)}\cos\varphi, \quad 2\sqrt{n_2(1-n_2)}\sin\varphi, \quad w_3 = 2n_2 - 1, \tag{4.10}$$

откуда получаем $\mathbf{w}^2 = 1$, а для полностью неопределенного состояния $\hat{\rho} = \hat{I}/2$, соответствующего в случае ДА термодинамическому равновесию при бесконечной температуре, получаем $\mathbf{w} = 0$. Представив операторы $\hat{A}$ взамен матричного представления (4.5) подобно представлению (4.9) в форме $\hat{A} = a_0\hat{I} + (\mathbf{a}\hat{\mathbf{s}})$ и используя правила алгебры (4.6) (см. также (4.12)), можно рассчитывать средние $\mathrm{Tr}\,\hat{A}\hat{\rho}$, не обращаясь к матричным представлениям, а используя лишь заданные на базисных элементах значения следа $\mathrm{Tr}\,\hat{s}_k = 0$, $\mathrm{Tr}\,\hat{I} = 2$.

Другой подход к реализации представления состоит в выборе такого базиса в гильбертовом пространстве, в котором базисные операторы имеют стандартный — канонический — вид. Такой подход лежит в основе, например, традиционного для квантовой механики шредингеровского представления, в котором для операторов импульса и координаты используются представления x, d/dx. Такой подход может быть определен как *аналитический* — в широком смысле, имея в виду место аналитических представлений в общей теории линейных операторов [19]. В каноническом базисе операторы квазиспина имеют вид матриц Паули, так что для вектора квазиспина имеем просто $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}$. С помощью данного матричного представления с учетом вида матриц Паули (4.3) нетрудно получить соотношение антикоммутативности операторов квазиспина $\hat{s}_k\hat{s}_l = -\hat{s}_l\hat{s}_k$ при $k \neq l$ и идемпотентности $\hat{s}_k^2 = \hat{I}$. В соответствии с определением (4.6) произведения двух различных операторов квазиспина сводятся к третьему:

$$\hat{s}_k\hat{s}_l = i\varepsilon_{klm}\hat{s}_m. \tag{4.11}$$

Это соотношение сводит любые функции операторов квазиспина к их линейным комбинациям даже без явного учета того обстоятельства, что они образуют после добавления единичного оператора полный линейный базис множества операторов в двумерном гильбертовом пространстве. (Оно само и служит выражением этого обстоятельства). Если дополнить операторы квазиспина до полного базиса единичным операторам и рассмотреть дополнительные произведения базисных элементов, содержащие единичный оператор, получаем структурные коэффициенты G_{klm}, определенные соотношением (3.39) *Главы 3*:

$$G_{klm} = i\varepsilon_{klm},\ k,l,m = 1,2,3; \quad G_{0lm} = G_{l0m} = G_{lm0} = \delta_{lm}. \tag{4.12}$$

Найдем теперь матричное представление лиувиллиана $\mathcal{L}$, записанного в виде символически представленного супероператора (3.7) *Главы 3*, в базисе (4.7) операторов квазиспина. Наиболее общий вид гамильтониана двухуровневой системы есть, очевидно,

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hbar}{2}(\mathbf{\Omega}\hat{\mathbf{s}}), \tag{4.13}$$

где $\mathbf{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ в теории резонансного отклика ДА [18] описывает так называемый *вектор вращательного момента*, действующего на двухуровневую систему. Его модуль при этом носит название *полной частоты Раби*. Применяя супероператор (3.7) *Главы 3*, имеющий вид коммутатора с оператором (4.13), к базисным элементам — операторам квазиспина $\hat{s}_k$, получаем линейную комбинацию коммутаторов квазиспина (4.6) в виде $\Omega_j \varepsilon_{jnk} \hat{s}_n$. Отсюда, в соответствии с определением (3.25) *Главы 3* выражаем матричные элементы лиувиллиана $\mathcal{L}$:

$$L_{nk} = 0 \quad \text{для } n = 0 \text{ или } k = 0,$$

$$L_{nk} = \Omega_j \varepsilon_{jnk}, \quad n, k = 1, 2, 3. \tag{4.14}$$

Из последних соотношений убеждаемся, что супероператор $\mathcal{L}$ антиэрмитов: $\mathcal{L} = -\mathcal{L}^+$. Соответствующая 4×4-матрица имеет вид:

$$L = -L^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ 0 & -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ 0 & \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

где нумерация строк и столбцов отличается от индексов базисных векторов на 1, т. е. $n \to n+1, k \to k+1$. Ее ненулевая 3×3-подматрица (L^s), заданная соотношениями (4.14), как это нетрудно проверить (см. определение векторного произведения через тензор Леви-Чевита [15]), описывает преобразование, отвечающее векторному произведению вектора $\mathbf{\Omega}$ на преобразуемый вектор, т.е.

$$(L^s)\mathbf{f} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{f}]. \tag{4.16}$$

Ее собственные значения есть

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \mp i\Omega, \tag{4.17}$$

где

$$\Omega = \sqrt{\mathbf{\Omega}^2} \tag{4.18}$$

— частота прецессии, а соответствующие собственные векторы имеют вид:

$$| \lambda_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, | \lambda_k\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_k \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

где трехмерные собственные векторы $\mathbf{w}_k$ определяются выражениями:

$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} \Omega_1/\Omega \\ \Omega_2/\Omega \\ \Omega_3/\Omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_{1,2} = \frac{1}{\Omega\sqrt{2(\Omega_1^2+\Omega_2^2)}} \begin{pmatrix} \mp i\Omega\Omega_2 - \Omega_3\Omega_1 \\ \pm i\Omega\Omega_1 - \Omega_3\Omega_2 \\ \Omega_1^2+\Omega_2^2 \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Соотношения (4.17)–(4.20) играют важную роль в теории спектральных откликов двухуровневого атома в лазерном поле [18, 20].

Поскольку временная динамика матрицы плотности описывается обратным преобразованием супероператора временной эволюции физических величин, то в представлении Шредингера она описывается эрмитово сопряженным супероператором $\mathcal{L}^+ = -\mathcal{L}$, где использовано правило сопряжения эволюционных супероператоров (3.16) *Главы 3*. Нетрудно проследить, что при применении матрицы $(-L)$ к 4-вектору w, $w^{\mathrm{T}} = (w_0, \mathbf{w})$ (w — вектор-столбец), представляющему матрицу плотности согласно (4.8), преобразуется только трехмерный вектор $\mathbf{w}$ по правилу (4.16). Соответственно, временная динамика гамильтоновой двухуровневой системы в матричном представлении описывается соотношениями:

$$\frac{dw}{dt} = -Lw \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d\mathbf{w}}{dt} = -[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{w}]. \tag{4.21}$$

Представление в базисе квазиспина операторов физических величин 4-векторами $a^{\mathrm{T}} = (a_0, \mathbf{a})$ осуществляется аналогично. Соответствующее (4.21) уравнение временной динамики физических величин в представлении Гейзенберга имеет вид:

$$\frac{da}{dt} = La \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{a}]. \tag{4.22}$$

Решения уравнений (4.21), (4.22) описывается матрицами S^+ и S, где

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^s \end{pmatrix}, \quad S^s = \mathrm{T}\exp\left(\int L^s d\tau\right). \tag{4.23}$$

В символическом представлении этой матрице соответствует

$$\mathcal{S} = \mathrm{T}\exp\left(\frac{i}{2}\int [(\mathbf{\Omega}\hat{\mathbf{s}}), \odot] d\tau\right). \tag{4.24}$$

Для замкнутой стационарной системы в матричном представлении она может быть рассчитана по общей формуле $\sum F(\lambda_k) \mid \lambda_k\rangle\langle\lambda_k \mid$, представляющей функцию матрицы через ее собственные значения и собственные

векторы:

$$\mathcal{S} = \sum_{k=0}^{3} \exp(\lambda_k t) \mid \lambda_k\rangle\langle\lambda_k \mid, \tag{4.25}$$

где в данном случае правые и левые собственные векторы совпадают ($\mid \lambda_k\rangle = \langle\lambda_k \mid^+$) и описываются соотношениями (4.19), (4.20).

Таким образом, динамика замкнутых двухуровневых систем описывается как вращение в трехмерном вещественном пространстве и задается вектором угловой скорости вращения. При этом зависящие от времени средние значения операторов с учетом обозначений и общих соотношений *Главы 3* и формулы (3.38) в самом общем случае представляются в виде

$$\langle\hat{A}\rangle = (w, S(t)a). \tag{4.26}$$

Для замкнутых систем это соотношение сводится к трехмерному:

$$\langle\hat{A}\rangle = a_0 + (\mathbf{w}S^s(t)\mathbf{a}).$$

Для случая супероператоров, заданных в пространстве матриц плотности, в этих соотношениях следует поменять местами векторы w, a. Соответствующие же эволюционные матрицы для этих двух типов представления связаны соотношением $S \to S^+, \quad S^s \to S^{s+} = (S^s)^{-1}$.

Нелинейные функции от операторов могут быть описаны в их векторном представлении, если задано правило представления операторного произведения $\hat{A}\hat{B}$. Для базисных операторов оно задано в форме (4.11), откуда для произвольных операторов получаем:

$$\hat{A}\hat{B} = a_0 b_0 \hat{I} + (a_0 b_m + b_0 a_m + i a_k b_l \varepsilon_{klm})\hat{s}_m. \tag{4.27}$$

Тем самым справедливо правило представления

$$\hat{A}\hat{B} \longrightarrow (a_0 b_0, \overrightarrow{ab}), \qquad \overrightarrow{ab} = a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a} + i[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]. \tag{4.28}$$

Здесь некоммутативность операторов отражается в неколлинеарности "пространственных" компонент $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, представляющих рассматриваемые операторы $\hat{A}\hat{B}$, и описывается в (4.28) мнимой частью, антисимметричной относительно перестановки операторов.

4.2 Представление Вигнера

При рассмотрении орбитального движения квантовых частиц гильбертово пространство состояний H бесконечномерно и в шредингеровском представлении описывается волновыми функциями $\psi(q)$ в пространстве *обобщенных координат* $q, q^{\mathrm{T}} = (q_1, ..., q_n)$, где n — число степеней свобо-

ды. Алгебра операторов физических переменных описывается коммутационными соотношениями между операторами *канонически сопряженных* координат $\hat{q}$ и импульсов $\hat{p}$:

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}\hat{I}. \tag{4.29}$$

Отсюда следуют возможные аналитические представления этих операторов, в частности, шредингеровское представление $\hat{q} \to q, \hat{p} \to -i\hbar\partial/\partial q^{\mathrm{T}}$ и сопряженное ему импульсное представление, для которого $\psi \to \psi(p)$. Для использования записи выражений в векторном виде целесообразно ввести вектор операторов фазовых переменных $\hat{X}^{\mathrm{T}} = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, ..., \hat{q}_n, \hat{p}_n)$ и соответствующая им *коммутационная матрица* C в виде $2n\times 2n$-матрицы

$$\left[\hat{X}_j, \hat{X}_k\right] = C_{jk}\hat{I}. \tag{4.30}$$

При рассмотрении произвольных линейных комбинаций канонических переменных C может иметь вид произвольной антисимметричной эрмитовой матрицы, а для канонического набора в соответствии с (4.29) он имеет вид

$$C = i\hbar E_n, \quad E_n = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & E_1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.31}$$

Для рассмотрения алгебры квантовых физических переменных в терминах классических фазовых переменных $X^{\mathrm{T}} = (q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)$ следует ввести операторный базис представления $\hat{e}(X)$, зависящий от континуального индекса X. Таким базисом является, в частности базис δ-функций [20]:

$$\hat{e}(X) = \mathcal{W}\delta\left(\hat{X} - X\right). \tag{4.32}$$

Здесь символ $\mathcal{W}$ обозначает так называемое *вигнеровское упорядочение* при одновременном использовании некоммутирующих операторов $\hat{X}$. Поскольку расчет функций от операторов сводится в конечном счете к суперпозиции умножений и линейных комбинаций, то для однозначного определения результата достаточно задать некоторый принцип, устраняющий неопределенность, возникающую при квантовом обобщении функций нескольких классических переменных. Вигнеровское упорядочение определяется следующим образом

$$\mathcal{W}f(\hat{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \tilde{f}(\chi) \exp(i\chi^{\mathrm{T}}\hat{X}) d\chi, \tag{4.33}$$

где χ — $2n$-мерный вектор-строка, а $\tilde{f}(\chi)$ обозначает фурье-образ классической функции $f(X)$. Для случая базисных функций (4.32) $\tilde{f}(\chi) \equiv 1$. Выражение (4.33) является очевидным тождеством, если заменить кван-

товый набор $\hat{X}$ на набор классических величин Y, но в квантовом случае оно является способом задания порядка действия операторов: сначала рассчитываются линейные комбинации вида $i\chi^{\mathrm{T}}\hat{X}$, затем вычисляются экспоненты и, после интегрирования, искомая функция. Чтобы определить, как это упорядочение расставляет сомножители в одночленных выражениях, обобщающих классические выражения типа $qp, q^2p, qp^2, \ldots$, достаточно разложить операторную экспоненту в (4.33) и сопоставить ее одночлены с соответствующим классическим разложением. Отсюда легко видеть, что классические одночлены переходят в симметризованные по $\hat{q}$, $\hat{p}$ выражения. В частности,

$$qp \to \mathcal{W}\hat{q}\hat{p} = \frac{1}{2}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}).$$

Впервые идея представления матрицы плотности в так называемом "симметричном" виде, когда в качестве аргументов рассматривались не два координатных индекса q, q', а эквивалентная пара индексов $X = (q, p)$, была предложена Вигнером [21]. Формулировка этого представления в терминах характеристических функций матрицы плотности, развитая в оригинальной работе Мойала [22], изложена в лекциях Глаубера [23], сыгравших существенную роль в развитии идеологии и математического аппарата квантовой радиофизики.

Обобщенный базис (4.32) характеризуется скалярным произведением

$$(\hat{e}(X), \hat{e}(X')) = (2\pi\hbar)^{-n}\,\delta(X - X'). \tag{4.34}$$

Доказательство следует из представления δ-функции в соответствии с представлением (4.33) и соотношения

$$\mathrm{Tr}\exp\left(i\chi^{\mathrm{T}}\hat{X}\right)\exp\left(i\chi'^{\mathrm{T}}\hat{X}\right) = \left(\frac{2\pi}{\hbar}\right)^{n}\delta(\chi - \chi').$$

Последнее может быть доказано с использованием приближенного представления чисто осцилляционных фурье-экспонент гауссовскими операторами с асимптотически малыми квадратичными членами и с применением техники гауссовских операторов [20]. Введенный здесь базис $\hat{e}(X)$ удобно использовать для представления операторов физических величин по формуле

$$\hat{f} = \int f(X)\hat{e}(X)dX. \tag{4.35}$$

При этом функция $f(X)$, представляющая квантовый оператор $\hat{f}$, имеет ту же самую физическую размерность. Биортогональный к $\hat{e}(X)$ базис отличается с учетом соотношения (4.34) лишь нормировочным множителем:

$$\hat{h}(X) = (2\pi\hbar)^n\hat{e}(X). \tag{4.36}$$

Этот базис удобен для представления матрицы плотности $\hat{\rho} \to w(X)$ по формуле

$$\hat{\rho} = \int w(X)\hat{h}(X)dX. \tag{4.37}$$

Функция $w(X)$ называется *вигнеровской плотностью*. Она нормирована и позволяет представить усреднение оператора $\hat{f}$ в виде формулы классического усреднения

$$\langle \hat{f} \rangle = \int w(X)f(X)dX, \tag{4.38}$$

соответствующей общей формуле усреднения (3.6) *Главы 3*, если учесть, что $f(X)$ имеет смысл вектора-столбца $\mid \hat{f}\rangle$, а $w(X)$ — вектора-строки $\langle\hat{\rho} \mid$, а скалярное произведение в биортогональном базисе операторов $\hat{h}(X), \hat{e}(X)$ в соответствии с соотношениями (3.33), (3.34) *Главы 3* имеет вид

$$(\hat{g}, \hat{f}) = \int g(X)f(X)dX. \tag{4.39}$$

Здесь также предполагается, что левый оператор представлен в левом базисе, а правый — в правом.

Для расчета функций, представляющих операторы, из соотношения (3.30) *Главы 3* для данного случая следует рассчитать следующие выражения:

$$f(X) = \mathrm{Tr}\hat{h}(X)\hat{f}, \qquad w(X) = \mathrm{Tr}\hat{e}(X)\hat{\rho}. \tag{4.40}$$

С учетом представления фурье-представления (4.33), примененного к δ-функциям, расчеты по этим формулам сводятся к вычислению следа вида

$$\mathrm{Tr}\exp(i\chi^{\mathrm{T}}\hat{X})\hat{f}.$$

В этих расчетах следует учитывать тот факт, что представленные здесь операторные экспоненты описывают преобразование сдвига операторов канонических переменных:

$$U^{-1}\hat{X}U = \hat{X} + iC\chi, \qquad U(\chi) = \exp(i\chi^{\mathrm{T}}\hat{X}). \tag{4.41}$$

Эти операторы образуют новый базис, который "лучше" базиса δ-функций в том отношении, что описывается ограниченными несингулярными функциями, но он не так прямо связан с классическими переменными X. При это справедливо следующее правило суперпозиции

$$U(\chi)U(\chi') = U(\chi + \chi')\exp\left(-\frac{1}{2}\chi^{\mathrm{T}}C\chi'\right), \tag{4.42}$$

являющееся простым следствием формулы Бейкера-Хаусдорфа для умножения двух экспонент [20]. С использованием этой техники из правого

соотношения в (4.40) можно получить вигнеровскую плотность для матрицы плотности чистого состояния $\hat{\rho} = \psi\psi^{+}$:

$$w(q,p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int \psi\left(q - \frac{\xi}{2}\right) \psi^{*}\left(q + \frac{\xi}{2}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi^{\mathrm{T}} p\right) d\xi. \qquad (4.43)$$

В этом выражении достаточно нагляден механизм отображения классической информации о паре переменных (q,p) в волновой функции, зависящей только от q. Информация об импульсе связана с частотами пространственных осцилляций $\psi(q)$, передаваемых в интеграле формулы (4.43) через аргумент смещения ξ. Отсюда непосредственно видно, что для точечно локализованных функций такой информации нет и, наоборот, для гармонических пространственных осцилляций импульс точно определен.

Расчет лиувиллиана может быть выполнен на основе общей формулы (3.31) *Главы 3* для матричных элементов. Поскольку лиувиллиан представлен через оператор Гамильтона, при этом расчете возникают произведения операторов, необходимо иметь задающее операторную алгебру в представлении Вигнера формулу для произведения двух операторов, аналогичную формуле (4.27). С использованием вигнеровского представления операторов после выполнения преобразования Фурье и с учетом представления (4.42) произведения операторных элементов фурье-базиса можно получить следующий результат:

$$\hat{f}\hat{g} \to \mathcal{N}_{X,\partial/\partial X} f\left(X + \frac{1}{2} C \frac{\partial}{\partial X^{\mathrm{T}}}\right) g(X). \qquad (4.44)$$

Здесь $f(X), g(X)$ — скалярные функции, описывающие операторы $\hat{f}, \hat{g}$ в терминах классического фазового пространства, а символ упорядочения $\mathcal{N}_{X,\partial/\partial X}$ обозначает, что дифференцирование выполняется раньше умножения на X. С использованием (4.44) лиувиллиан представляется в виде

$$\mathcal{L} = \frac{i}{\hbar} \mathcal{N}_{X,\partial/\partial X} \left[\mathcal{H}\left(X + \frac{C}{2}\frac{\partial}{\partial X^{\mathrm{T}}}\right) - \mathcal{H}\left(X - \frac{C}{2}\frac{\partial}{\partial X^{\mathrm{T}}}\right)\right]. \qquad (4.45)$$

Таким образом, динамика орбитального движения частиц может быть представлена в терминах классического пространства. Подчеркнем, что этот результат не является приближенным благодаря тому, что квантовая структура теории в супероператорном описании и векторном представлении операторов точно отображена некоммутативностью "классических" операторов $X, \partial/\partial X$.

Вспоминая, что коммутатор C пропорционален постоянной Планка, в представлении (4.45) можно выполнить предельный переход $\hbar \to 0, C \to 0$ и удержать при необходимости старшие из убывающих членов. В этом пределе лиувиллиан с учетом вида (4.31) матрицы C имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} E_n \frac{\partial}{\partial X^{\mathrm{T}}} \tag{4.46}$$

Это выражение является просто векторной записью выражения для классической скобки Пуассона, т. е. правильно описывает классическую динамику. Старшее асимптотическое квантовое приближение имеет порядок $\hbar^2$ и выражается через операторы третьих производных и третьи производные гамильтониана. В случае квадратичного потенциала квантовое выражение (4.45) точно совпадает с его классическим пределом (4.46). Это означает, что для линейных систем изменение во времени функций, задающих квантовые операторы в представлении Вигнера, сводится к преобразованию аргументов в соответствии с классическими уравнениями движения, и эффекты специфической квантовой диффузии пакетов отсутствуют: имеет место только расплывание пакетов за счет начальной неопределенности по координатам и импульсам.

Если в классической механике распределение $w(X)$ может совпадать с δ-функцией, т. е. неопределенность может отсутствовать как по координатам, так и по импульсам, то в квантовой механике это невозможно. Это следует из соотношения неопределенностей, которое в может быть выражено матричным соотношением

$$K \pm \frac{C}{2} \geq 0, \tag{4.47}$$

где K — симметризованная корреляционная матрица переменных X, а знак $\geq$ обозначает положительную определенность для матриц. Обычное соотношение неопределенностей $\sigma_q^2 \sigma_p^2 \geq \hbar^2/4$ является его простым следствием. Для линейных систем наличие начальной квантовой неопределенности в вигнеровской плотности является единственным их отличием от классических систем. Следует отметить, что вигнеровская плотность не имеет смысла обычного распределения вероятностей, поскольку в силу некоммутативности квантовых переменных их совместное распределение вероятностей в обычном смысле, т. е. как положительная мера на алгебре классических событий, не существует. По этой причине ее положительность для существенно квантовых состояний не гарантирована. Наиболее эффективно использование представления Вигнера для систем, близких к классическим, или для систем с малым ангармонизмом [24].

4.3 Представления, основанные на комплексных амплитудах

В теории электромагнитного поля базисной динамической системой является одномерный гармонический осциллятор с гамильтонианом вида

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p^2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2, \tag{4.48}$$

к набору которых сводится свободное электромагнитное поле [20]. Здесь m описывает обобщенную массу, ω — частота колебаний. Поскольку гармонические колебания удобно описывать с использованием комплексных амплитуд, в квантовой теории используются обобщающие понятие классической комплексной амплитуды безразмерные операторы *уничтожения и порождения квантов*

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{q} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{p}, \qquad \hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{q} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{p}. \tag{4.49}$$

Они не представляют непосредственно никаких квантовых физических величин, так как для них не существует спектрального разложения (2.7) *Главы 2* и, следовательно, в теории нет определения события, что представляемая оператором $\hat{a}$ или $\hat{a}^+$ величина приняла данное значение (напомним, что индикаторами этих событий являются операторы проектирования на соответствующие собственные векторы). Однако, каждая из них содержит информацию одновременно о двух некоммутирующих переменных $\hat{q}$, $\hat{p}$, причем эта информация поделена между $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ так, что первый из них описывает свободные осцилляции с положительной частотой, а второй — с отрицательной:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}\exp(-i\omega t), \quad \hat{a}^+(t) = \hat{a}^+\exp(i\omega t) \tag{4.50}$$

в представлении Гейзенберга в отсутствие внешних воздействий. Благодаря этому разделению для квазирезонансные процессов все линейные по координатам $\hat{q}$, $\hat{p}$, величины могут быть выражены через один из этих операторов, в чем и состоит основной смысл их введения.

С алгебраической точки зрения эти операторы описываются коммутационным соотношением

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1. \tag{4.51}$$

Последнее после дополнения очевидными соотношениями $[\hat{a}^+, \hat{a}] = -1$, $[\hat{a}, \hat{a}] = 0$, $[\hat{a}^+, \hat{a}^+] = 0$ аналогично коммутационному соотношению (4.31) для канонических фазовых переменных при $n = 1$ и получено из него линейным преобразованием (4.49). Важный класс операторных выражений представляют *нормально упорядоченные* выражения, в которых операторы уничтожения стоят правее операторов порождения. Именно такого типа выражениями описываются в наиболее фундаментальных процессах детектирования электромагнитного поля измеряемые физические величины [23] (в частности, энергия поля не содержит нефизичной вакуумной добавки). Для описания такого типа выражений удобно по аналогии с вигнеровским упорядочением ввести нормальное упорядочение. При этом, в отличие от вигнеровского представления, при определении

операторных выражений в качестве независимых аргументов взамен q, p рассматриваются комплексные амплитуды z^*, z, в то время как для индексации базисных операторов достаточно только переменной z. Роль базиса нормального упорядочения играет набор нормально упорядоченных δ-функций

$$\hat{e}(z) = \mathcal{N}\delta\left(\hat{a} - z, \hat{a}^+ - z^*\right). \tag{4.52}$$

Здесь исходная скалярная двумерная δ-функция задана на комплексной плоскости и рассматривается как функция переменных z, z^*. Аналогично определению упорядочения в (4.32) символ упорядочения $\mathcal{N}$ определяется через нормальное упорядочение в формальном разложении по $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ фурье-экспоненты, через которую выражается δ-функция. С использованием данного базиса получаем отображение операторов

$$\hat{f} \longrightarrow f(z^*, z). \tag{4.53}$$

В частности, для оператора энергии имеем представление

$$\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+)/2 \longrightarrow \hbar\omega/2 + \hbar\omega|z|^2.$$

Второе слагаемое представляет нормально упорядоченный оператор энергии $\hbar\omega\hat{a}^+\hat{a}$.

Сопряженный базис представляется набором проекторов

$$\hat{h}(z) = \psi(z)\psi^+(z), \tag{4.54}$$

где $\psi(z)$ — волновые функции смещенного вакуумного состояния, известные под названием *когерентные состояния*, которые соответствуют применению оператора сдвига $\hat{a} \to \hat{a} + z$ к оператору вакуумного состояния, т.е. удовлетворяющие уравнению "смещенного вакуума"

$$(\hat{a} - z)\psi(z) = 0.$$

Базис $\hat{h}(z)$ ортонормирован по отношению к $\hat{e}(z)$:

$$\operatorname{Tr}\hat{h}(z)\hat{e}(z') = \delta(z - z').$$

Представление $\hat{\rho} \longrightarrow w(z)$ осуществляется в соответствии с соотношением

$$\hat{\rho} = \int w(z)\hat{h}(z)dz. \tag{4.55}$$

С учетом биортогональности усреднение физических величин представляется, так же, как и в представлении Вигнера:

$$\langle\hat{f}\rangle = \int f(z)w(z)dz. \tag{4.56}$$

Представление для произведения двух операторов, представленных в нормально упорядоченном виде соответствующими функциями f, g, описывается соотношением

$$\hat{f}\hat{g} \longrightarrow \frac{1}{\pi}\int f(z^*, u)g(u^*, z)\exp\left(-|u|^2\right)\, du. \tag{4.57}$$

С помощью этого соотношения можно рассчитать представления супероператоров в виде матриц с матричными индексами $z, z'; z^*, z^{*\prime}$ или в виде функций от операторов умножения на z, z^* и дифференцирования. Эта техника широко использовалась, в частности, в работах Лэкса [25], посвященных построению теории лазера как квантовой открытой системы.

Глава 5
Открытые системы и квантовые случайные процессы

5.1 Определение открытой системы и квантового случайного процесса

Перечислим некоторые физические примеры ОС в квантовой радиофизике.

$\surd$ Двухуровневый атом в электромагнитном поле вакуума
$\surd$ Двухуровневый спин в системе таких же спинов
$\surd$ Двухуровневый атом в буферном газе
$\surd$ Электрон в электромагнитном поле вакуума
$\surd$ Лазерная мода в активной среде лазера
$\surd$ Электронно-дырочная пара в полупроводнике
$\Big\} \rightarrow$ I

$\surd$ Фонон в кристалле твердого тела
$\surd$ Примесный центр в кристалле твердого тела
$\Big\} \rightarrow$ II

Здесь цифры I и II введены для обозначения качественного различия в описании системы, связанного с тем, что для класса I сама система в процессе ее динамики не может аннигилировать из области рассматриваемых состояний, что соответствует фиксированной нормировке матрицы плотности $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$, в то время как для класса II возможно миграция возбуждения из представляющей интерес области, так что нормировка матрицы плотности не сохраняется. Иногда термин "открытая система" применяется для обозначения только систем последнего типа, однако, здесь рассматриваются фактически только системы с фиксированной нормировкой.

Хотя как с физической точки зрения, так и в отношении математической специфики, эти системы имеют очень большие различия, их статистический анализ связан с рассмотрением одной и той же математической структуры. А именно, полная динамическая система разделяется на

две подсистемы: ОС и *резервуар* (иначе — термостат). Это справедливо в тех случаях, когда представляют интерес только физические переменные ОС, в то время как переменные резервуара рассматриваются лишь в той мере, в какой они воздействуют на переменные ОС. Резервуар рассматривается, в основном, как источник шумов и затухания. Представляют интерес лишь величины, усредненные по шумам резервуара. Поэтому требуется взамен описания динамики составной системы ОС+резервуар дать способ сокращенного описания динамики, с самого начала включающей указанное усреднение.

Математическим определением ОС (см. *Главу 2*, а также [26]) является квантовое вероятностное пространство специального вида:

$$(H_0 \otimes H_{\rm R}, \mathcal{B}, \mathcal{P})\,, \tag{5.1}$$

где H_0 — гильбертово пространство состояний ОС, $H_{\rm R}$ — гильбертово пространство состояний резервуара. В полном пространстве $H_0 \otimes H_{\rm R}$ задано семейство унитарных операторов временной эволюции $U_{\rm OC}(t)$, которому, как было показано в *Главе 3*, соответствует семейство унитарных супероператоров $\mathcal{S}_{\rm OC}(t)$. Данное определение приспособлено непосредственно только к описанию ОС типа I, поскольку представление $H_0 \otimes H_{\rm R}$ предполагает сохранение полной населенности в H_0, описываемой оператором $\hat{1} \otimes \hat{I}$, где $\hat{1}$ обозначает единичный оператор в ОС, а $\hat{I}$ — в гильбертовом пространстве резервуара.

Квантовым случайным процессом в ОС называется квантовая случайная величина, описываемая оператором вида $\hat{f}_{\rm OC} = \hat{f} \otimes \hat{I}$. Фактически, только случайные процессы данного вида имеют характер истинно "случайных" во времени величин. Данное представление соответствует учету того обстоятельства, что рассматриваемая физическая величина хотя и описывает лишь ОС, но при этом может зависеть от переменных резервуара, которые включаются в набор переменных ОС в виде единичного оператора $\hat{I}$. Это означает, что нет никакой зависимости от переменных резервуара в самом определении физической величины, и зависимость устанавливается только в результате взаимодействия ОС с резервуаром. Именно наличие резервуара и взаимодействие с ним, учитываемое в операторе (или супероператоре) временной эволюции, обеспечивает случайный характер изменения во времени переменных $\hat{f}$. В общем случае нет оснований каким-либо образом конкретизировать в данном определении вид квантового распределения вероятностей $\mathcal{P}$ в совокупной системе. Однако, в соответствии с общепринятой в квантовой теории поля идеологией [27], имеет смысл ввести предположение о статистической независимости при $t = 0$ (в квантовой электродинамике обычно $t = -\infty$) состояний ОС и резервуара. Это означает, что соответствующая $\mathcal{P}$ матрица плотности $\hat{\rho}_{\rm OC}$ имеет вид

$$\hat{\rho}_{\rm OC} = \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\rm R}. \tag{5.2}$$

Независимость в выбранный момент времени не сохраняется во времени, поскольку в зависящих от времени операторах $\hat{\rho}_{\mathrm{OC}}$ (или $\hat{f}_{\mathrm{OC}}$) вследствие взаимодействия ОС и резервуара происходит "одевание" [27] ОС, т. е. установление статистической связи между ОС и существенной для динамики ОС части переменных резервуара. При этом супероператоры динамической эволюции порождают на алгебре переменных резервуара набор переменных $\hat{\xi}(t)$, зависящих от времени, которые имеют смысл шумов, непосредственно воздействующих на ОС.

5.2 Переходные супероператоры ОС

Рассмотрим общее квантовомеханическое выражение для вычисления среднего значения квантового случайного процесса в ОС:

$$\langle \hat{f} \rangle = \mathrm{Tr}\,(\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{R}}) \mathcal{S}_{\mathrm{OC}}(t)(\hat{f} \otimes \hat{I}). \tag{5.3}$$

Вычисление следа здесь сводится к последовательному вычислению сначала следа Tr_{R} по переменным резервуара, а затем по переменным ОС. Первый этап усреднения дает сокращенное описание средних в терминах собственно ОС, т. е. операторов в гильбертовом пространстве H_0. При этом возникают, как легко видеть, два эквивалентных представления.

- Представление Гейзенберга:

$$\langle \hat{f} \rangle = \mathrm{Tr}\, \hat{\rho}\, \mathcal{S}(t) \hat{f}, \tag{5.4}$$

$$\mathcal{S}(t) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\, \hat{\rho}_{\mathrm{R}} \mathcal{S}(t). \tag{5.5}$$

  Последнее выражение можно просто записать как усреднение $\langle \mathcal{S}_{\mathrm{OC}}(t) \rangle_{\mathrm{R}}$ оператора временной эволюции по переменным резервуара.
- Представление Шредингера:

$$\langle \hat{f} \rangle = \mathrm{Tr}\, \hat{f} (\mathcal{S}^{+}(t) \hat{\rho}), \tag{5.6}$$

$$\mathcal{S}^{+}(t) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\, \mathcal{S}_{\mathrm{OC}}^{-1}(t)(\odot \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{R}}). \tag{5.7}$$

С учетом этих соотношений, правила обращения супероператора временной эволюции замкнутой системы и векторных обозначений усреднение может быть представлено в одной из эквивалентных форм:

$$\langle \hat{f} \rangle = \left\langle \hat{\rho} \middle| \mathcal{S}(t) \hat{f} \right\rangle = \left\langle \hat{f}^{+} \middle| \mathcal{S}^{+}(t) \hat{\rho} \right\rangle. \tag{5.8}$$

Последнее выражение может быть записано также в эквивалентной форме $\left\langle \mathcal{S}^{+}(t) \hat{\rho} \middle| \hat{f} \right\rangle$. Супероператоры $\mathcal{S}(t), \mathcal{S}^{+}(t)$ задают сокращенное описание временной эволюции в ОС в представлении Гейзенберга и Шредин-

гера, соответственно. Они называются *переходными* супероператорами ОС и описывают переход из начального состояния совокупной системы (5.2), в котором ОС и резервуар статистически независимы, в состояние в момент времени t. Если матрицы плотности представляются в том же эрмитовом базисе $\hat{e}_k$, что и физические величины $\hat{f}$, то с учетом того, что последнее выражение в (5.8) может быть представлено в виде $\left\langle \hat{f} \,|\mathcal{S}^+(t)\hat{\rho} \right\rangle$, убеждаемся, что супероператорам $\mathcal{S}(t), \mathcal{S}^+(t)$ соответствуют эрмитово сопряженные матрицы.

Соответствующий этим супероператорам переход в ОС является *марковским*, поскольку для него состояние ОС выражается с помощью преобразования

$$\hat{\rho}(t) = \mathcal{S}^+(t)\hat{\rho} \tag{5.9}$$

только через начальное состояние $\hat{\rho}$ при $t = 0$ независимо от предшествующей динамики. Марковский процесс, очевидно, соответствует совокупности марковских переходов. Свойство марковости связано со статистической независимостью в момент начала рассматриваемого перехода между состояниями ОС и резервуара, что описывается расцеплением совокупной матрицы плотности (5.2) на произведение соответствующих парциальных матриц. Не следует, однако, отождествлять марковость просто с возможностью представления с помощью соотношения (5.9) состояния в момент времени t через матрицу плотности при $t = 0$. Это возможно для любого перехода, однако в общем случае соответствующий супероператор $\mathcal{S}^+(t)$ будет зависеть от $\hat{\rho}$. Только для марковского перехода этот супероператор один для всех начальных состояний.

Важно отметить, что переходные супероператоры $\mathcal{S}, \mathcal{S}^+$ задают одно и то же преобразование в *редуцированном* квантовом вероятностном пространстве ОС

$$(H_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{P}_0),$$

где $\mathcal{P}_0$ соответствует матрице плотности $\hat{\rho}$. Опишем самые общие свойства этого преобразования, которые вытекают непосредственно из определений (5.5), (5.7).

- *Сохранение нормировки*: преобразование не изменяет единичного оператора и нормировку матрицы плотности.
  Это свойство очевидно из определений переходных супероператоров. В представлении Гейзенберга из определения (5.5) с учетом того, при $\hat{f} = \hat{I}$ имеем $\mathcal{S}(\hat{f}\otimes\hat{I}) = \hat{I}\otimes\hat{I}$ (т. е. единичный оператор в составном пространстве H_{OC}), получаем условие сохранения единичного оператора ОС: $\mathcal{S}\hat{I} = \hat{I}$. Супероператор $\mathcal{S}^+$ сохраняет след преобразуемой матрицы плотности в силу того, что после взятия полного следа в выражении (5.7) преобразование временной эволюции может быть опущено. Супероператор $\mathcal{S}$ в базисе вида $\hat{I}, \{\hat{\varepsilon}_k\}$ представляется матрицей, имеющей в первом столбце только один ненулевой матричный элемент, равный единице, а $\mathcal{S}^+$ — матрицей, имеющей только один ненулевой

матричный элемент, также равный единице, в первой строке:

$$S = \begin{pmatrix} 1 \ldots \ldots \\ 0 \ldots \ldots \\ 0 \ldots \ldots \end{pmatrix}, \qquad S^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Эти соотношения показывают, что, хотя в ОС суперoператоры, описывающие преобразование временной эволюции в представлении Гейзенберга и Шредингера связаны, как и в замкнутых системах, преобразованием эрмитова сопряжения, простая симметрия в их свойствах, выраженных в абстрактном виде, отсутствует. Это связано с разным качественным смыслом операторов физических величин и матриц плотности. Если физическая величина имеет вид единичного оператора, то она заведомо должна быть неизменной, в то время как если единичному оператору пропорциональна матрица плотности (пример — матрица плотности теплового равновесия при бесконечной температуре), то она не обязана сохраняться (в неравновесных условиях).

- *Положительность*: конус положительных операторов $\hat{f}$ (или $\hat{\rho}$) отображается на себя.
  Поясним, что положительным называется оператор с неотрицательно определенной (то-есть неотрицательной при любых ψ) квадратичной формой $\psi^{+}\hat{f}\psi$, а под конусом понимается такое множество $\mathcal{M}$ с элементами x, что для любого $\lambda > 0$ также и $\lambda x \in \mathcal{M}$. Совокупность положительных операторов при их векторном представлении, описанном в *Главе 3*, образует выпуклый конус. Выпуклость следует из ее определения в форме справедливости рассматриваемого свойства для любого элемента вида $\lambda\hat{f} + (1-\lambda)\hat{g}$ при $0 \leq \lambda \leq 1$ при справедливости для элементов $\hat{f}$, $\hat{g}$. Действительно, для положительных операторов это сразу следует из критерия положительности. При представлении операторов векторами в ортогональном эрмитовом операторном базисе $\hat{I}, \{\hat{\varepsilon}_k\}$ базисные операторы $\hat{\varepsilon}_k$ неположительны в силу ортогональности к единичному оператору базиса, и с учетом этого для положительности эрмитова оператора $\hat{f}$ требуется, чтобы представляющие его коэффициенты f_0, f_k были таковы, чтобы при фиксированном f_0 набор f_k лежал внутри некоторого выпуклого множества $\mathcal{M}_0$ на гиперплоскости $f_0 = \text{const}$. (Нетрудно выполнить и обобщение на неэрмитовы операторы $\hat{f}$). Совокупность этих множеств векторов для всех f_0 и есть конус, изображенный на рис. 5.1, который в случае двухуровневой системы и базиса матриц Паули является круговым. Для нормированных матриц плотности в соответствующим образом нормированном базисе $f_0 \to w_0 = 1$, что соответствует основанию конуса с единичной высотой.
- *Вполне положительность*: положительность сохраняется, если расширить действие преобразования на любой набор квадратных $n \times n$-

матриц (n — любое), составленный из $n \times n$ произвольных преобразуемых операторов, к которым преобразование применяется независимо. Другими словами, положительным является также любое преобразование вида

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_{11} & \hat{f}_{12} & \dots \\ \hat{f}_{21} & \hat{f}_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathcal{S}\hat{f}_{11} & \mathcal{S}\hat{f}_{12} & \dots \\ \mathcal{S}\hat{f}_{21} & \mathcal{S}\hat{f}_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Физический смысл этого свойства очень прост. Оно означает, что если в физической ОС есть какие-то переменные, которые никак не отражаются на ее динамике, то ее изменения описываются положительными супероператорами не только без учета этих переменных, но и при их учете. Это свойство следует очевидным образом из определения переходных супероператоров. Интересно, что оно не эквивалентно просто положительности. Пример положительного, но не вполне положительного супероператора дает важное в теории матриц преобразование транспонирования, обозначаемое символом "T". Оно очевидно положительно, когда применяется ко всей матрице: $\hat{f} \to \hat{f}^{\mathrm{T}}$. Однако, при применении к расширенной системе в соответствии с правилом (5.10) блочного применения преобразования $\mathcal{S} = \mathrm{T}$ его положительность утрачивается. Это легко видеть на примере блочного транспонирования положительной блочной матрицы, составленной из 2×2-матриц и переходящей после этого преобразования в неположительную матрицу:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Исходная блочная 4×4-матрица имеет вид прямой суммы нулевой 2×2-матрицы из внутренних матричных элементов и внешней 2×2-матрицы, составленной из единиц; последняя 4×4-матрица имеет вид прямой суммы единичной 2×2-матрицы из внешних угловых элементов и 2×2-матрицы Паули $\hat{\sigma}_1$ из внутренних элементов). Поэтому, несмотря на положительность и сохранение нормировки, преобразование транспонирования "T" матриц 2×2 не может описывать никакой двухуровневой открытой системы.

Существует математическая теорема [28], которую можно интерпретировать как доказательство существования ОС, соответствующей любому супероператору перехода, который удовлетворяет перечисленным свойствам. Математический результат этой теоремы состоит в возможности нахождения по заданному переходному супероператору такой соответствующей ему расширенной системы, в которой ему соответствует

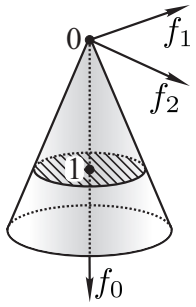

Рис. 5.1 Конус положительных операторов в векторном представлении для трехмерного базиса. Основанию усеченного конуса $f_0 = 1$ соответствуют матрицы плотности, удовлетворяющие условию нормировки.

переход, описываемый унитарным преобразованием. Общий вид матрицы преобразования для n-уровневого атома с учетом критерия вполне положительности был получен Коссаковским [29].

Пример: Приложение критерия положительности к релаксации двухуровневого атома. Простейший пример применения критерия положительности дает ДС, описывающая дипольно-активный электронный переход в атоме (ДА) в оптическом диапазоне частот. Специфичность оптического диапазона состоит в том, что базисные физические переменные ДА разделяются на два класса: дигональные (другими словами, населенности уровней), которые соответствуют состояниям с определенной энергией и в отсутствие релаксации неизменны, и недиагональные (поляризации атомного перехода), которые соответствуют переходам вверх или вниз. Последние осциллируют с боровской частотой перехода ω_{12}, такой, что $\hbar\omega_{12} \gg kT$, и, в отличие от спиновых ДС радиодиапазона, температурные флуктуации не перемешивают населенности и поляризации. Релаксационные свойства ДА описываются двумя скоростями релаксации, продольной γ и поперечной Γ, или соответствующими релаксационными временами $T_1 = 1/\gamma$, $T_2 = 1/\Gamma$. Эти величины могут либо рассчитываться теоретически, либо вводиться как феноменологические константы. В последнем случае особо важно знать предельные ограничения, вытекающие из общих физических соотношений.

Рассмотрим положительную матрицу плотности вида

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и результат ее преобразования $S(t)\hat{\rho}_0$, где $S(t)$ описывает релаксацию в отсутствие поля, заданную указанными параметрами γ, Γ. Матрица $\hat{\rho}_0$ описывает чистое (когерентное) состояние с симметричным возбуждением уровней. Оно выбрано потому, что имеет максимально возможное значение недиагонального элемента $\rho_{12} \leq (\rho_{11}\rho_{22})^{1/2}$. Результат преобразования матрицы плотности очевиден без вычислений: он описывается выражением

$$S(t)\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-\gamma t} & e^{-\Gamma t} \\ e^{-\Gamma t} & 2 - e^{-\gamma t} \end{pmatrix},$$

поскольку населенность возбужденного состояния, описываемая верхним диагональным элементом, распадается со скоростью γ и его населенность переходит на нижний уровень, а поляризация, описываемая недиагональными элементами, распадается со скоростью Γ. Применение условия положительности дает при этом $\exp(-2\Gamma t) \leq \exp(-\gamma t)\,[2 - \exp(-\gamma t)]$, или, иначе, $(\gamma - 2\Gamma)t \leq \ln\,[2 - \exp(-\gamma t)]$. Отсюда в пределе $t \to \infty$ получаем необходимое условие

$$\Gamma \geq \gamma/2, \tag{5.11}$$

которое достаточно и в общем случае при конечных t, что очевидно при замене Γ на его минимально возможное значение $\gamma/2$. Таким образом, скорость поперечной релаксации не может быть меньше половины продольной. Это соотношение имеет простой классический аналог в виде соотношения между скоростью затухания комплексной амплитуды классического гармонического осциллятора и его энергии: если нет дефазирующих возмущений и имеет место только затухание по амплитуде, то затухание по энергии в два раза превосходит затухание по амплитуде, так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды. Эти кинематические соотношения в общем виде сохраняются и в квантовом случае.

5.3 Представление взаимодействия

В общем случае рассматриваемые ОС описываются полным гамильтонианом составной системы, имеющим вид суммы

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{R}} + \hat{\mathcal{H}}_{\xi}, \tag{5.12}$$

где первый член описывает собственную энергию ОС, второй — собственную энергию резервуара и последний — их взаимодействие, в нетривиальных случаях проявляющееся как источник шумовых флуктуаций и необратимости в ОС. Индекс ξ при этом имеет смысл тех переменных резервуара, которые имеют смысл обобщенных случайных сил, действующих на сопряженные им обобщенные координаты ОС. Роль невозмущенного гамильтониана в теории открытых систем играет сумма собственных энергий, включая в нужных случаях взаимодействие с внешним полем, а возмущения — гамильтониан взаимодействия с резервуаром. При этом оператор невозмущенной эволюции распадается на произведение соответствующих операторов, описывающих невозмущенную эволюцию ОС и резервуара, и полный оператор временной эволюции имеет вид

$$U(t) = U_0(t)U_{\mathrm{R}}(t)U_{\xi}(t), \tag{5.13}$$

где

$$U_0(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_0 t\right\}, \qquad U_{\mathrm{R}}(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{R}} t\right\}, \tag{5.14}$$

а оператор $U_\xi(t)$, описывающий взаимодействие ОС и резервуара, имеет вид:

$$U_\xi(t) = \mathrm{T}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau)d\tau\right\}. \tag{5.15}$$

Здесь оператор $\hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau)$ зависит от времени в соответствии с общей формулой (2.17) *Главы 2*:

$$\hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau) = U_{\mathrm{R}}^{-1}(\tau)U_0^{-1}(\tau)\hat{\mathcal{H}}_\xi U_0(\tau)U_{\mathrm{R}}(\tau), \tag{5.16}$$

т. е. в представляющем его операторном выражении переменные ОС и резервуара изменяются по законам невозмущенного движения.

В супероператорном представлении временной эволюции в составной системе имеются две основные возможности распорядиться составляющими преобразования

$$\mathcal{S}^+_{\mathrm{OC}}(t) = U(t) \odot U^{-1}(t) = \mathcal{S}^+_0(t)\mathcal{S}^+_\xi(t), \tag{5.17}$$

где

$$\mathcal{S}^+_0(t) = U_0(t)U_{\mathrm{R}}(t) \odot U_{\mathrm{R}}^{-1}(t)U_0^{-1}(t)\,, \qquad \mathcal{S}^+_\xi(t) = U_\xi(t) \odot U_\xi(t), \tag{5.18}$$

а $\mathcal{S}^+_0(t)$ описывает невозмущенную динамику составной системы. *(а)* Исходить непосредственно из приведенного выражения (5.17) для $\mathcal{S}^+_{\mathrm{OC}}(t)$ и применять, в соответствии с общепринятым в квантовой механике стандартом, супероператор возмущенной динамики $\mathcal{S}^+_\xi(t)$ к матрицам плотности, а супероператор невозмущенной эволюции $\mathcal{S}^+_0(t)$ — к операторам физических величин ОС. *(б)* Исходить из обратного к (5.17) временного преобразования, описывающего изменение операторов физических переменных и применять все составляющие этого преобразования только к физическим переменным. В первом подходе наиболее нетривиальная составляющая динамики, описывающая взаимодействие, применяется к матрице плотности, а невозмущенное движение — к операторам физических переменных. Во втором подходе, наоборот, взаимодействие применяется к операторам физических переменных, которые уже предварительно преобразованы с помощью преобразования невозмущенной эволюции. Таким образом, в теории ОС появляются два варианта использования составных преобразований представления взаимодействия: в форме Шредингера — первый подход, и в форме Гейзенберга — второй подход.

После перехода к сокращенному описанию с помощью теории, описанной в п. 5.2, эволюционные супероператоры в представлении взаимодействия в форме Шредингера и Гейзенберга описываются, соответственно, следующими выражениями.

- Супероператор невозмущенной эволюции — общим выражением

$$\mathcal{S}_0(t) = U_0^{-1}(t) \odot U_0(t). \tag{5.19}$$

- Супероператоры возмущенной эволюции — выражениями вида:

$$\mathcal{S}^+(t) = \mathrm{Tr}_\mathrm{R}\, U_\xi(t)\, (\hat{I} \odot \hat{\rho}_\mathrm{R}) U_\xi^{-1}(t), \qquad \mathcal{S}(t) = \mathrm{Tr}_\mathrm{R}\, \hat{\rho}_\mathrm{R} U_\xi(t)^{-1} \odot U_\xi(t). \tag{5.20}$$

Эти соотношения следуют из определений (5.5), (5.7) с учетом выражений (5.17), (5.18). Соответствующие представления формул усреднения имеют следующий вид.

- В форме Шредингера:

$$\langle \hat{f} \rangle = \left\langle \mathcal{S}_0(t)\hat{f} \,\middle|\, \mathcal{S}^+(t)\hat{\rho} \right\rangle. \tag{5.21}$$

- В форме Гейзенберга:

$$\langle \hat{f} \rangle = \left\langle \hat{\rho} \,\middle|\, \mathcal{S}(t)\mathcal{S}_0(t)\hat{f} \right\rangle. \tag{5.22}$$

Поскольку в последнем выражении матрица плотности используется в качестве сомножителя, сопряженного к операторам физических переменных (по которому, в силу определения (3.4) *Главы 3* скалярного произведения операторов, оно антилинейно по левому аргументу[1]), то преобразующие ее супероператоры в выражении (5.21) появляются как сопряженные по отношению к исходным, определенными выражением (5.22) на пространстве операторов физических величин. При использовании в этих альтернативных формах динамики одного и того же эрмитова базиса $\hat{e}_k$ эти сопряженные операторы описываются просто сопряженными матрицами.

[1] Умножение левого аргумента на i соответствует умножению выражения на $-i$.

Глава 6
Марковские квантовые случайные процессы

6.1 Формальное определение квантового марковского случайного процесса

Определение и математическое описание квантового марковского случайного процесса могут быть построены безотносительно к ОС, в которых реализуются случайные процессы данного типа [26, 30]. Это связано с особой простотой временной динамики марковских ОС, которая может быть представлена в виде цепочки последовательных преобразований вида (5.9) *Главы 5*.

Марковским называется квантовый случайный процесс, для которого в любые два момента времени $t_1, t_2 > t_1$ одномоментные матрицы плотности связаны соотношением (5.9) *Главы 5*. При этом супероператор $\mathcal{S}^+$ должен зависеть в общем случае как минимум от двух временных аргументов t_1, t_2. Повторное применение этого соотношения приводит к определению марковского процесса в терминах переходных супероператоров в форме Шредингера:

$$\mathcal{S}^+(t_3, t_1) = \mathcal{S}^+(t_3, t_2)\,\mathcal{S}^+(t_2, t_1), \tag{6.1}$$

или

$$\mathcal{S}(t_1, t_3) = \mathcal{S}(t_1, t_2)\,\mathcal{S}(t_2, t_3) \tag{6.2}$$

в форме Гейзенберга. В соответствии с различным направлением упорядочения по отношению к матрицам плотности и операторам физических величин для шредингеровских супероператоров принято такое расположение временных аргументов, что правее стоит более ранний момент времени, а для гейзенберговских — наоборот. Соотношение (6.1) в классической теории марковских процессов известно как уравнение Смолуховского или Колмогорова–Смолуховского–Чепмена [15].

Преобразуем соотношение (6.2) к дифференциальному виду, рассматривая в соотношениях (6.1), (6.2) последовательность моментов времени $t_1 = 0, t_2 = t, t_3 = t + \Delta$ при $\Delta \to 0$ и представив супероператор перехода $\mathcal{S}(t, t+\Delta)$ за малое время Δ через супероператор $\mathcal{L}$ "скорости перехода". Используя разложения

$$\mathcal{S}(0, t+\Delta) = \mathcal{S}(0,t) + \frac{d}{dt}\mathcal{S}(0,t)\,\Delta,$$

$$\mathcal{S}(t, t+\Delta) = 1 + \Delta \lim \frac{1}{\Delta}\left[\mathcal{S}(t, t+\Delta) - 1\right],$$

и вводя обозначения

$$\mathcal{L}(t) = \lim \frac{1}{\Delta}\left[\mathcal{S}(t, t+\Delta) - 1\right] \tag{6.3}$$

и $\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}(0,t)$, представляем соотношения (6.1), (6.2) в форме следующих дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{S}^+(t) = \mathcal{L}^+(t)\,\mathcal{S}^+(t) \tag{6.4}$$

в форме Шредингера и

$$\frac{d}{dt}\mathcal{S}(t) = \mathcal{S}(t)\,\mathcal{L}(t) \tag{6.5}$$

в форме Гейзенберга. Эти уравнения есть наиболее общая форма представления обобщенного уравнения Фоккера–Планка [25] и сопряженного к нему, причем сопряжение эквивалентно обращению времени. Оно описывает как непрерывные, так и скачкообразные марковские процессы. В классической теории случайных процессов соответствующие им для процессов диффузионного типа уравнения называются уравнениями Колмогорова 1-го и 2-го рода.

Таким образом, марковский квантовый случайный процесс может быть задан абстрактно с помощью *кинетического супероператора*, или *обобщенного лиувиллиана* $\mathcal{L}(t)$. В отличие от лиувиллиана замкнутых систем он порождает не унитарный супероператор временной эволюции, рассмотренный в *Главах 3, 4*, а переходной супероператор общего вида, описанный в п. 2 *Главы 3*. Через него супероператор перехода выражается в форме хронологически упорядоченной экспоненты:

$$\mathcal{S}(t) = \mathrm{T}\exp\left\{\int_0^t \mathcal{L}(\tau)d\tau\right\}, \tag{6.6}$$

$$\mathcal{S}^+(t) = \mathrm{T}\exp\left\{\int_0^t \mathcal{L}^+(\tau)d\tau\right\}, \tag{6.7}$$

где хронологическое упорядочение в этих формулах определено по отношению к матрицам плотности (т. е. в соответствующих разложениях экспонент в (6.6) и (6.7) расположение супероператоров противоположно.

6.2 Многомоментные матрицы плотности

6.2.1 Немарковский случай

В общем случае представляющие интерес характеристики описываются функциями n переменных $\hat{A}_1(t_1), ..., \hat{A}_n(t_n)$. Здесь $\hat{A}_k(t_k)$ обозначают в самом общем случае k-ый набор операторов, соответствующих моменту времени t_k (наиболее важным является случай одного зависящего от времени оператора $\hat{A}_k(t_k) = \hat{A}(t_k)$). Для расчета средних для таких квантовых функций формулы одномоментного усреднения (5.8) *Главы 5* должны быть обобщены на случай n моментов времени.

Для квантового случайного процесса усредняемая функция задается в дополнение к скалярной функции $F(A_1, ..., A_n)$ классических переменных еще и *принципом* (способом) упорядочения $\mathcal{O}$, так что квантовая функция в общем случае записывается в форме $\hat{f}^{(n)} = \mathcal{O}F(\hat{A}_1(t_1), ..., \hat{A}_n(t_n))$. Здесь по сравнению с принципами упорядочения, описанными в *Главе 4*, где фигурирует упорядочение по отношению к каноническим операторам, не зависящим от времени, подразумевается также и произвольное упорядочение по временным индексам. Очевидно, в данном случае также достаточно задать упорядочение $\mathcal{O}$ на базисе δ-функций:

$$\delta\left[A_1(t_1) - A_1, ..., A_n(t_n) - A_n\right] \to \mathcal{O}\,\delta\left[\hat{A}_1(t_1) - A_1, ..., \hat{A}_n(t_n) - A_n\right].$$

Соответственно, упорядоченные операторные функции описываются выражениями вида[1]

$$\mathcal{O}F(\hat{A}_1(t_1), ..., \hat{A}_n(t_n)) = \int F\left(A_1, ..., A_n\right) \times$$

$$\times \mathcal{O}\,\delta\left[\hat{A}_1(t_1) - A_1, ..., \hat{A}_n(t_n) - A_n\right] dA_1 ... dA_n. \tag{6.8}$$

Усреднение квантовых n-моментных функций, представленных в форме (6.8), можно представить в виде

---

[1] С точки зрения математической корректности удобнее исходить из представления выражения $\delta(...)dA_1...dA_n$ в форме индикаторной функции $\chi\left(\hat{E}(dA_1, t_1), ..., \hat{E}(dA_n, t_n)\right)$ ортопроекторов $\hat{E}(dA_k, t_k)$, отвечающих операторам $\hat{A}_k(t_k)$. Используемая δ-функция есть соответствующая обобщенная плотность.

$$\left\langle \mathcal{O}F(\hat{A}_1(t_1),...,\hat{A}_n(t_n))\right\rangle = \int dA_1...dA_n \times$$

$$\times w^{(n)}\left(A_1,...,A_n;t_1,...,t_n\right) F\left(A_1,...,A_n\right), \tag{6.9}$$

где

$$w^{(n)}\left(A_1,...,A_n;t_1,...,t_n\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}\,\mathcal{O}\,\delta\left[\hat{A}_1(t_1)-A_1,...,\hat{A}_n(t_n)-A_n\right] - \tag{6.10}$$

n-моментная плотность распределения вероятностей квантового случайного процесса $\hat{A}(t)$, соответствующая заданному принципу упорядочения. Это определение описывает процессы в самой общей форме, не используя специфический вид операторов в ОС:

$$\hat{A}(t_k) = U^{-1}(t_k)(\hat{A}_0 \otimes \hat{I})\,U(t_k).$$

6.2.2 Марковский случай

Для марковского квантового процесса все его характеристики могут быть выражены через его обобщенный лиувиллиан. Наиболее простую форму математический аппарат для выполнения их расчета имеет для случая хронологически упорядоченных (в смысле стандартного определения *Главы 3*) функций, для которых хронологическое упорядочение выполняется независимо от упорядочения одномоментных операторов: $\mathcal{O} = \mathrm{T}\mathcal{O}_1$, где $\mathcal{O}_1$ обозначает принцип одномоментного упорядочения. Такого типа функции естественно возникают при выполнении расчетов по теории возмущений, когда все члены разложения оператора временной эволюции упорядочены хронологически. Такие функции могут быть представлены в следующей форме

$$\mathcal{O}F(\hat{A}_1(t_1),...,\hat{A}_n(t_n)) = \int F\left(A_1,...,A_n\right) \times$$

$$\times \mathcal{O}_1\delta\left[\hat{A}_1(t_1)-A_1\right]\cdots\mathcal{O}_1\delta\left[\hat{A}_n(t_n)-A_n\right]dA, \tag{6.11}$$

$$\left(dA = dA_1...dA_n\right).$$

Для того, чтобы представить хронологически упорядоченную δ-функцию в (6.11) в компактном виде, удобно ввести определение *полупрямого* произведения супероператоров

$$\mathcal{S}_1 \circledcirc \mathcal{S}_2\,(\hat{f}_2 \otimes \hat{f}_1) = \mathcal{S}_1[\hat{f}_1[\mathcal{S}_2\hat{f}_2]]\,,$$

$$\mathcal{S}_1 \circledcirc \cdots \circledcirc \mathcal{S}_n\,(\hat{f}_n \otimes \cdots \otimes \hat{f}_1) =$$

$$= \mathcal{S}_1[\hat{f}_1 \cdots \hat{f}_{n-2}[\mathcal{S}_{n-1}[\hat{f}_{n-1}[\mathcal{S}_n \hat{f}_n]]] \cdots]. \tag{6.12}$$

В этих выражениях супероператоры $\mathcal{S}_k$ применяются к произведению уже преобразованных операторов $\hat{f}_j$ с индексами $j \geq k$, результат умножается на $\hat{f}_{k-1}$, к результату применяется супероператор $\mathcal{S}_{k-1}$ и так далее. Это определение соответствует структуре реального неусредненного эволюционного супероператора квантового случайного процесса, для которого $\mathcal{S}_k \to \mathcal{S}_k^\xi = U^{-1}(t_k, t_{k+1}) \odot U(t_k, t_{k+1})$ описывают временную эволюцию между моментами времени $t_k, t_{k+1}\, (k = 0, ..., n-1;\, t_0 = 0)$, причем он заведомо обладает свойством марковости (вследствие унитарности, отражающей замкнутость рассматриваемой системы):

$$U^{-1}(t_{k-1}, t_{k+1}) \odot U(t_{k-1}, t_{k+1}) =$$

$$= U^{-1}(t_{k-1}, t_k) U^{-1}(t_k, t_{k+1}) \odot \mathcal{U}(t_k, t_{k+1}) U(t_{k-1}, t_k) = \mathcal{S}_{k-1}^\xi \mathcal{S}_k^\xi.$$

Для такого семейства супероператоров соотношение (6.11) с учетом определения (6.12) и тождества $\mathcal{S}_k^\xi(\hat{f}\hat{g}) = (\mathcal{S}_k^\xi \hat{f})(\mathcal{S}_k^\xi \hat{g})$ представляется в виде

$$\mathcal{O}F(\hat{A}_1(t_1), ..., \hat{A}_n(t_n)) = \int dA\, F(A_1, ..., A_n)\, \mathcal{S}_1^\xi \circledcirc \cdots \circledcirc \mathcal{S}_n^\xi \times$$

$$\times \left[\mathcal{O}_1 \delta\left(\hat{A}_1 - A_1\right) \otimes ... \otimes \mathcal{O}_1 \delta\left(\hat{A}_n - A_n\right)\right]. \tag{6.13}$$

При вычислении среднего значения для выражения (6.13) необходимо выполнить усреднение как по квантовым флуктуациям резервуара, представленным супероператорами $\mathcal{S}_k^\xi$, так и по собственным флуктуациям в ОС, отвечающим операторам $\hat{A}_k$ и описываемым начальной матрицей плотности. Если рассматриваемый процесс является марковским, то, по определению, это усреднение выполняется в супероператорах $\mathcal{S}_k^\xi$ независимо на всех временных интервалах (t_k, t_{k+1}), и эти супероператоры после данного усреднения сводятся к переходным супероператорам марковского процесса. Соответственно, правая часть выражения (6.13) описывает в этом случае случайную n-моментную функцию, частично усредненную по шумовым флуктуациям $\hat{\xi}$, которые неявно учитываются в переходных супероператорах:

$$\left\langle \mathcal{O}F(\hat{A}_1(t_1), ..., \hat{A}_n(t_n)) \right\rangle_\xi = \int dA\, F(A_1, ..., A_n)\, \mathcal{S}_1 \circledcirc \cdots \circledcirc \mathcal{S}_n \times$$

$$\times \left[\mathcal{O}_1 \delta\left(\hat{A}_1 - A_1\right) \otimes ... \otimes \mathcal{O}_1 \delta\left(\hat{A}_n - A_n\right)\right].$$

Интегрируя по A, представляем это выражение в компактной форме:

$$\left\langle \mathcal{O}F(\hat{A}_1(t_1), ..., \hat{A}_n(t_n)) \right\rangle_\xi = \mathcal{S}_1 \circledcirc \cdots \circledcirc \mathcal{S}_n\, \mathcal{O}_1 F\left(\hat{A}_1 \otimes, ..., \hat{A}_n \otimes\right). \tag{6.14}$$

Здесь $\hat{A}_k\otimes$ обозначает независимую копию операторов $\hat{A}_k$, которая переводится в соответствующий набор операторов (в частности — в один оператор) в исходном пространстве ОС в результате применения совокупности преобразований $\mathcal{S}_k$ в соответствии с определением полупрямого произведения (6.12). Результат (6.14) дает право назвать полупрямое произведение $\mathcal{S}_1 \circledlessthan \cdots \circledlessthan \mathcal{S}_n$ квантовым *условным n-моментным* распределением вероятностей при фиксированном начальном состояний процесса. Это название дано в соответствии со смыслом этого выражение в классическом пределе. Если подставить вместо всех операторов $\hat{A}_k$ операторы вида $a_k\hat{I}$, что соответствует неслучайной n-моментной функции нефлуктуирующих переменных $F(a_1, ...a_n)$, то после представления F степенным рядом и последующего суммирования результата преобразования с учетом определения полупрямого произведения (6.12) и инвариантности единичного оператора (см. п. 5.2 *Главы 5*) из (6.14) получаем просто $F(a_1, ...a_n)$. Тем самым преобразование любой неоператорной функции сводится к тождеству $F \equiv F$, т. е. полупрямое произведение (6.12) в этом случае тождественно равно единице, что соответствует результату интегрирования классического n-моментного условного распределения по всем n аргументам.

Если переходные супероператоры представлены в выбранном базисе матричными элементами $S_k(A_k, A'_k)$, то их полупрямое произведение также может быть представлено в матричном виде матрицей $S^{(n)}(A_0, A)$. Для этого следует в выражении (6.12) представить операторы в правой части через базисные δ-функции, супероператоры представить через их матричные элементы, а результат снова разложить по δ-функциям. В результирующее выражение войдут структурные коэффициенты базиса, определенные соотношением (3.39) *Главы 3* и коэффициенты, выражающие рассматриваемые базисные δ-функции через операторы полного базиса. Структурные коэффициенты G возникают при представлении произведения базисных операторных δ-функций через их линейную комбинацию в соответствии с определением (3.39). Очевидно, что результирующее выражение отображает тензорные произведения n операторов в независимых копиях гильбертова пространства в операторы в одном из этих гильбертовых пространств. Соответственно, описывающие это преобразование матрицы являются неквадратными и имеют вид $S^{(n)}(A_0, A)$, где A_0 служат для представления только операторов $\hat{A}_0$ для момента времени $t = 0$, описываемого начальной матрицей плотности $\hat{\rho}$, а A — для представления тензорных произведений всех рассматриваемых операторов и функций от них. Предполагая для простоты, что рассматриваемый базис δ-функций является полным, получаем:

$$S^{(n)}(A_0, A) = \int dA'_2 ... dA'_n dA''_1 ... dA''_{n-1} S_1(A_1, A''_1) ...$$

$$...G(A'_{n-1}, A_{n-2}, A''_{n-2})S_{n-1}(A'_{n-1}, A''_{n-1})G(A'_n, A_{n-1}, A''_{n-1})S_n(A'_n, A_n). \tag{6.15}$$

Структурные коэффициенты описываются здесь обобщенными матричными элементами $G(A'_{n-k}, A_{n-k-1}, A'_{n-k-1})$. Будучи примененной к функции $F(A)$, матрица (6.15) (после интегрирования по A', A'') описывает оператор этой функции, усредненный только по шумам. Это неявное усреднение для марковских процессов учитывает в абстрактном виде разделение случайного процесса на процесс, представляющий непосредственный интерес, и шумы, учитываемые только в усредненном виде. В теории ОС такое разделение вводится априори в структуре составной системы (см. п. 1 *Главы 5*).

Дополняя соотношение (6.15) усреднением по начальному состоянию и представляя F через δ-функции, получаем определение для соответствующей *безусловной* n-моментной матрицы плотности в терминах классических переменных $A_1, ..., A_n$:

$$w^{(n)}(A) = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_0\,\mathcal{S}_1 \circledcirc \cdots \circledcirc \mathcal{S}_n\,\left[\mathcal{O}_1\delta\left(\hat{A}_1 - A_1\right) \otimes ... \otimes \mathcal{O}_1\delta\left(\hat{A}_n - A_n\right)\right].$$

Она представляется через матричное представление полупрямого произведения $S^{(n)}$ в виде усреднения по начальному моменту времени:

$$w^{(n)}(A) = \int dA_0 w_0(A_0) S^{(n)}(A_0, A), \tag{6.16}$$

где $w_0(A_0)$ описывает матрицу плотности $\hat{\rho}_0$ в момент времени $t = 0$, по отношению к которому определен супероператор перехода $\mathcal{S}_1$. В супероператорной записи можно записать этот результат в виде:

$$\hat{\rho}^{(n)} = \langle\hat{\rho}_0|\,\mathcal{S}_1 \circledcirc \cdots \circledcirc \mathcal{S}_n. \tag{6.17}$$

Это определение *функционала усреднения* на тензорном произведении n операторов и включает осреднение по начальному распределению $\hat{\rho}_0$ при $t = 0$. Результатом этого усреднения является искомое среднее значение $\left\langle \hat{f}^{(n)} \right\rangle$ рассматриваемых функций вида

$$\mathcal{O}_1 F\left(\hat{A}_1 \otimes, ..., \hat{A}_n \otimes\right).$$

С учетом того, что в выражении (6.17) все переходные супероператоры $\mathcal{S}_n$ представляются в соответствии с формулой (6.6) через обобщенный лиувиллиан, любая n-моментная матрица плотности также определяется только обобщенным лиувиллианом $\mathcal{L}(t)$ и начальной матрицей плотности.

При переходе к классическому случаю в представлении полупрямого произведения (6.15) структурные коэффициенты должны быть заменены δ-функциями:

$$G(A'_k, A_{k-1}, A''_{k-1}) = \delta(A'_k - A_{k-1})\delta(A_{k-1} - A''_{k-1}). \qquad (6.18)$$

С учетом этого соотношение из выражения (6.15) для полупрямого произведения следует

$$S^{(n)}(A_0, A) = S_1(A_0, A_1)...S_{n-1}(A_{n-2}, A_{n-1})S_n(A_{n-1}, A_n). \qquad (6.19)$$

Оно соответствует n-моментному условному распределению при фиксированном состоянии процесса в момент времени $t = 0$ и представляется просто произведением всех переходных распределений вероятностей $S_k(A_{k-1}, A_k)$. Квантовая специфика n-моментного распределения вероятностей отражена в структурных коэффициентах $G(A'_k, A_{k-1}, A''_{k-1})$, учитывающих некоммутативный характер алгебры квантовых переменных их отличием от произведения δ-функций в соотношении (6.18).

В заключение приведем модификацию изложенных определений для случая обратного к (6.13) хронологического расположения операторов

$$\mathcal{O}F(\hat{A}_1(t_1), ..., \hat{A}_n(t_n)) = \int dA\, F(A_1, ..., A_n)\, \mathcal{S}_1^{\xi} \circledcirc \cdots \circledcirc \mathcal{S}_n^{\xi} \times$$

$$\times \left[\mathcal{O}_1\delta\left(\hat{A}_n - A_n\right) \otimes ... \otimes \mathcal{O}_1\delta\left(\hat{A}_1 - A_1\right)\right]. \qquad (6.20)$$

Такой порядок возникает при расчете корреляционной функции $K(t_1, t_2)$ операторов $\hat{A}(t)$ при $t_2 < t_1$. В этом случае взамен n-моментной матрицы плотности (6.17) следует рассматривать модифицированное выражение

$$\hat{\rho}^{(n)} = \langle\hat{\rho}_0|\, \mathcal{S}_1 \circledast \cdots \circledast \mathcal{S}_n, \qquad (6.21)$$

где символ $\circledast$ взамен $\circledcirc$ определен не соотношением (6.12), а соотношением

$$\mathcal{S}_1 \circledast \cdots \circledast \mathcal{S}_n\, (\hat{f}_n \otimes \cdots \otimes \hat{f}_1) =$$

$$= \mathcal{S}_1[...[\mathcal{S}_{n-1}[\mathcal{S}_n\hat{f}_1]\hat{f}_2] \cdots \hat{f}_n]. \qquad (6.22)$$

Здесь усреднение по флуктуациям в более поздний момент времени выполняется для операторов, расположенных левее, а не правее.

Глава 7
Марковские открытые системы

7.1 Физические условия марковости

При рассмотрении конкретных физических моделей ОС в первую очередь представляет интерес выяснить, выполнено ли для них соотношение марковости в виде (6.1) или (6.2), определенном в *Главе 6*. Для выяснения соответствующих условий запишем определение (5.20) *Главы 5* для переходного супероператора для момента $t + \Delta$:

$$\mathcal{S}(t+\Delta) = \left\langle \left[U_\xi(t)^{-1} \odot U_\xi(t)\right] \left[U_\xi(t, t+\Delta)^{-1} \odot U_\xi(t, t+\Delta)\right] \right\rangle_{\mathrm{R}}, \qquad (7.1)$$

где символ $\langle\rangle_{\mathrm{R}}$ обозначает операцию усреднения стохастического (т. е. зависящего от переменных резервуара и потому флуктуирующего во времени) супероператора $\mathcal{S}_\xi = U_\xi^{-1}(t+\Delta) \odot U_\xi(t+\Delta)$ по состоянию резервуара:

$$\langle \mathcal{S}_\xi \rangle_{\mathrm{R}} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}\, \hat{\rho}_{\mathrm{R}} \mathcal{S}_\xi.$$

В представлении (7.1) неусредненный супероператор перехода расщеплен на произведение супероператора перехода от начального момента $t = 0$ к моменту t и супероператора перехода от момента t к $t + \Delta$. Марковость процесса зависит от возможности независимого выполнения усреднения сомножителей, которые согласно выражению (5.15) *Главы 5* определяются свойствами временной зависимости флуктуирующего гамильтониана взаимодействия $\hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau)$. Этот гамильтониан зависит от переменных резервуара только через некоторый набор *шумов резервуара* $\hat{\xi}(t) = \left\{\hat{\xi}_1(t), \hat{\xi}_2(t), ...\right\}$, которые в соответствии с соотношением (15) (5.16) изменяются по закону

$$\hat{\xi}(t) = U_{\mathrm{R}}^{-1}(t) \hat{\xi}_0 U_{\mathrm{R}}(t), \qquad (7.2)$$

где $\hat{\xi}_0$ соответствуют начальным значениям шумовых операторов. Для того, чтобы этот процесс был действительно "случайным", типичный резервуар должен представлять системы с бесконечным числом степеней свободы[1].

Строгое расцепление усреднения в соотношении (7.1) может иметь место только для абстрактной математической модели флуктуаций гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau)$, когда они описываются как *чисто случайный* процесс [15], усреднение по флуктуациям которого выполняется независимо для любой совокупности моментов времени $t_1, ..., t_n$. Это выполняется для таких базовых моделей шума $\hat{\xi}(t)$, которые являются квантовыми обобщениями классического *белого шума* и *импульсного процесса*[2]. Справедлива ли такая модель флуктуаций для рассматриваемой конкретной физической системы, можно выяснить только в результате соответствующего анализа случайного процесса $\hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau)$. В общем виде критерий марковости сводится к возможности пренебрежения статистической зависимостью на временах больших или порядка характерного времени изменений в ОС. Его можно выразить в виде количественного соотношения с использованием физических терминов *время корреляции*[3] τ_{c} и *время релаксации* τ_{r} в некотором более общем смысле, выходящем за рамки их обычных определений для одномерного (скалярного) процесса. Время корреляции характеризует временной интервал, на котором существенна статистическая зависимость, отсутствующая для моментов времени, отличающихся на существенно большую величину. Время релаксации характеризует временной интервал, на котором в ОС становятся существенными изменения, обусловленные взаимодействием с резервуаром. Последнее справедливо, лишь если возможные быстрые изменения, обусловленные собственной динамикой ОС, происходят в масштабе более коротких времен по сравнению с процессами релаксации и, соответственно, в используемом динамическом описании ОС они могут быть исключены (например, путем перехода к соответствующему представлению взаимодействия). В следующих главах будет показано, что в общем случае не существует ни единого времени корреляции, ни единого времени релаксации, и обычно ОС описывается целым набором этих времен, который во многих важных случаях является к тому же бесконечным (и даже может содержать как неограниченно малые, так и бесконечные величины). Тем не менее, процедура отбора из этого спектра времен тех, которые существенны для оценки возможности использования марковской модели, вполне очевид-

---

[1] Другая возможность состоит в том, что в ОС реализуются условия возникновения динамической стохастичности (общие сведения и литературные ссылки по проблеме динамического хаоса можно получить из книги [32]).

[2] (поток δ-импульсов, приводящий при воздействии на ОС к последовательности независимых скачков состояния)

[3] Точнее было бы говорить о *времени памяти*, поскольку корреляция, строго говоря, характеризует лишь степень линейной зависимости, в то время как для марковости нужна полная статистическая независимость.

на: должно быть взято максимальное существенное время корреляции и сопоставлено с минимальным существенным временем релаксации. Эти соображения можно теперь записать в виде простого количественного соотношения

$$\tau_{\mathrm{c}} \ll \tau_{\mathrm{r}}, \tag{7.3}$$

которое является *критерием марковости* ОС. Здесь очевидна относительность понятия марковости случайных процессов в заданной ОС, поскольку оно зависит от того, какой класс ее физических величин представляет интерес в конкретной задаче.

Более конкретно фигурирующие в соотношении (7.3) времена можно пояснить следующим образом. Пусть гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}_\xi(t)$ зависит от единственной переменной резервуара — случайного процесса $\hat{\xi}(t)$. Для него τ_{c} есть характерное время убывания корреляционной функции

$$\mathcal{K}_\xi(\tau) = \mathrm{Tr}\hat{\rho}_{\mathrm{R}}\hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t+\tau) \tag{7.4}$$

(которая в общем случае комплексна вследствие некоммутативности операторов $\hat{\xi}(t), \hat{\xi}(t+\tau)$, поскольку $[\hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t+\tau)]^+ = \hat{\xi}(t+\tau)\hat{\xi}(t) \neq \hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t+\tau)$). На спектральном языке время корреляции выражается соотношением $\tau_{\mathrm{c}} = \delta\omega^{-1}$ через ширину $\delta\omega$ спектральной плотности

$$S(\omega) = \int_0^\infty K_\xi(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau \tag{7.5}$$

случайного процесса $\hat{\xi}(t)$. Время релаксации определяется как характерное время изменения среднего значения некоторой переменной ОС для неравновесного начального состояния — *отклика* $\left\langle \hat{f}(t) \right\rangle$, и выражается по формуле $\tau_{\mathrm{r}} = \gamma^{-1}$ через характерную *скорость релаксации* процесса $\hat{f}(t)$, описываемую на спектральном языке как ширина спектра отклика. На спектральном языке условие марковости записывается в виде соотношения

$$\gamma \ll \delta\omega. \tag{7.6}$$

Эти соотношения проиллюстрированы на рис. 7.1, где изображены спектр флуктуаций радиационного шума $\hat{\xi}_0(t) = \int \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})dV$ и типичный спектр атомного отклика. Шум $\hat{\xi}(t)$ с конечным, но малым временем корреляции, называется *физическим белым* шумом. В противовес ему абстрактный белый шум с нулевым временем корреляции называется *математическим*. Следует иметь в виду, что приведенные соображения являются не изложением каких-либо строгих математических результатов теории ОС, а лишь общим руководством к выполнению конкретных расчетов.

Следует особо отметить в приведенной схеме роль представления взаимодействия. Для переменных резервуара оно переносит статистическую неопределенность, содержащуюся в квантовом состоянии начального на-

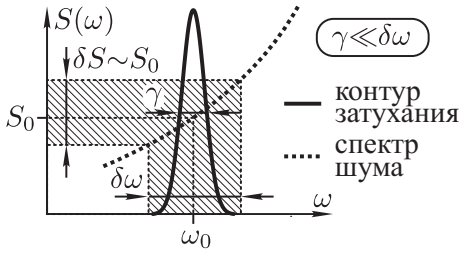

Рис. 7.1 Условие марковости динамики. Динамика является марковской, когда скорость затухания γ существенно меньше эффективной ширины $\delta\omega$ спектра $S(\omega)$ флуктуаций обобщенной силы ξ.

бора его канонических переменных $\hat{X}_{\rm R}$ и описываемую не зависящей от времени матрицей плотности резервуара $\hat{\rho}_{\rm R}$, на шум, который в представлении взаимодействия зависит от времени $\hat{\xi}(t)$, причем статистическая неопределенность проявляется в потере корреляции на интервалах времени $\Delta > \tau_{\rm c}$. Для переменных ОС выделение невозмущенной динамики, описываемой супероператором (5.19) *Главы 5*, позволяет в случае больших времен релаксации $\tau_{\rm R}$ по сравнению с характерным масштабом времен невозмущенного движения ОС рассматривать взаимодействие с шумами резервуара как медленный процесс на фоне быстрого невозмущенного движения. Это позволяет расширить область применимости марковского описания за счет того, что в условии марковости (7.3) фигурирует время релаксации $\tau_{\rm R}$, в то время как без использования представления взаимодействия вместо $\tau_{\rm R}$ фигурировало бы характерное время невозмущенной динамики, которое, по предположению, значительно меньше. Этот факт указывает на зависимость понятия марковости также от способа представления временной динамики и неадекватность прямолинейной попытке его введения через статистическую независимость шума на характерных временах эволюции, безотносительно к классу физических переменных, представляющих интерес. Например, если в ОС имеются очень быстрые динамические осцилляции, на фоне которых описываются лишь относительно медленные изменения, то применение требования малости $\tau_{\rm c}$ по отношению к периоду τ_0 этих осцилляций в качестве условия марковости не оправдано, поскольку эти осцилляции естественным образом исключаются в представлении взаимодействия. В теории преобразования релаксационных процессов в двухуровневом атоме сильным полем, впервые обсуждавшейся в применении к оптике в [35], неучет этого обстоятельства привел к тому, что в подавляющем большинстве работ эффекты такого рода стали связываться с немарковостью динамики атома в сильном поле, в то время как при описании в подходящем представлении взаимодействия они принципиально являются марковскими [36], также как и в свободном атоме.

7.2 Процессы диффузионного и скачкообразного типа

Рассматривая представление переходного супероператора в форме (7.1) в предположении марковости процесса и с учетом определения (6.3) *Главы 6* обобщенного лиувиллиана получаем его представление через стохастический оператор временной эволюции в виде

$$\mathcal{L} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} \left\langle U_\xi^{-1}(t, t+\Delta) \odot \mathcal{U}_\xi(t, t+\Delta) - 1 \right\rangle_{\mathrm{R}}. \tag{7.7}$$

В отличие от абстрактной математической модели марковского процесса, обсуждавшейся в *Главе 6*, в данном выражении при рассмотрении в качестве $\hat{\xi}(t)$ реального физического шума в ОС прямое вычисление предельного перехода $\Delta \to 0$ не оправдано, поскольку реальное значение времени корреляции шума не равно нулю, и при достаточно малых Δ процесс не может рассматриваться как марковский. Этот предел можно рассматривать лишь при одновременном устремлении к нулю времени корреляции для математической модели шума, заменяющего эквивалентным образом реальный процесс $\hat{\xi}(t)$. Такая замена обоснована, если реальное время корреляции является малым параметром (по отношению ко времени релаксации). В реальных вычислениях данный предельный переход осуществляется путем соответствующего огрубления соотношений при алгебраических преобразованиях в выражении (7.7) с точностью до членов, исчезающих при $\tau_{\mathrm{c}} \to 0$. В соответствии с характером зависимости гамильтониана взаимодействия с резервуаром $\hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau)$ от $\tau, t \le \tau \le t+\Delta$, который согласно выражениям (5.20), (5.15), (5.16) *Главы 5* определяет и свойства переходного супероператора $\mathcal{S}$, можно выделить два наиболее важных класса квантовых марковских процессов: процессы *диффузионного* и *скачкообразного* типа.

Для процессов диффузионного типа интеграл в показателе экспоненты в эволюционном операторе

$$U_\xi(t, t+\Delta) = \mathrm{T}\ \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\int_t^{t+\Delta} \hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau)\, d\tau \right] \right\} \tag{7.8}$$

может превосходить по абсолютной величине сколь угодно малую (при замене реального шума соответствующей математической моделью квантового белого шума) наперед заданную величину $\varepsilon > 0$ лишь с вероятностью, стремящейся к нулю быстрее, чем $\Delta \to 0$. Соответствующее изменение состояния ОС, тем самым, является непрерывным по вероятности, что и оправдывает применение термина “диффузионный”, под которым в классической теории понимается непрерывное случайное изменение координаты частицы. В квантовом случае имеется в виду аналогичное изменение квантового состояния, описываемого матрицей плотности $\hat{\rho}$ или соответствующей ей волновой функцией ψ, если исходное состояние явля-

ется чистым. В квантовом случае вообще может не существовать непрерывно изменяющейся координаты, как, например, в случае двухуровневого атома, для которого аналогом координаты классического диффузионного процесса является непрерывно изменяющаяся волновая функция. Изложенное определение квантового процесса диффузионного типа является переформулировкой в терминах гамильтониана взаимодействия первого условия [12]

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int\limits_{|y-x|>\varepsilon} P(t,x,t+\Delta,dy)=0, \qquad \varepsilon>0$$

теоремы Колмогорова, дающей доказательство справедливости уравнения Фоккера-Планка для классического диффузионного марковского процесса. Здесь $P(t,x,t+\Delta,dy)$ — вероятность перехода процесса из состояния, соответствующего в момент времени t значению координаты x, в состояние, соответствующее в момент времени $t+\Delta$ области ее значений $x\in dy$.

Для процесса диффузионного типа экспоненциал в (7.8) описывается двумя старшими членами разложения по показателю, с учетом чего для лиувиллиана (7.7), сохраняя только квадратичные по гамильтониану взаимодействия члены, получаем

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_{\rm r}\,,$$

где первое слагаемое описывает обусловленную взаимодействием с резервуаром добавку к лиувиллиану невозмущенного движения ОС

$$\mathcal{L}_1=\frac{i}{\hbar}\left[\left\langle\hat{\mathcal{H}}_\xi(t)\right\rangle_{\rm R},\odot\right]\,,$$

а второе слагаемое описывает так называемый *релаксационный* супероператор

$$\mathcal{L}_{\rm r}=-\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\hbar^2\Delta}\int_t^{t+\Delta}d\tau_2\int_t^{\tau_2}d\tau_1\left\langle\left[\hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau_1),\left[\hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau_2),\odot\right]\right]\right\rangle_{\rm R}\,. \qquad (7.9)$$

Супероператор $\mathcal{L}_1$, имеющий вид квантовой скобки Пуассона, описывает тот же тип обратимого движения, который характерен для замкнутых систем, то есть соответствует движению с эффективным гамильтонианом $\left\langle\hat{\mathcal{H}}_\xi(t)\right\rangle_{\rm R}$ и приводит к унитарному преобразованию начального состояния. Супероператор же $\mathcal{L}_{\rm r}$, выражающийся через усредненный второй коммутатор стохастического гамильтониана взаимодействия, обладает качественно новыми свойствами вследствие того, что для него, в отличие от $\mathcal{L}_1$, не существует эквивалентного гамильтониана, через который он мог бы быть представлен как квантовая скобка Пуассона, т. е. как лиувиллиан гамильтоновой системы. Поскольку, в отличие от $\mathcal{L}_1$,

$\mathcal{L}_{\rm r} \neq -\mathcal{L}_{\rm r}^{+}$, соответствующее ему преобразование состояния неунитарно и в общем случае включает необратимые изменения, которые называются процессами релаксации — в широком понимании этого термина, включающем процессы необратимого нарастания (инкремент).

В случае процессов скачкообразного типа интеграл $\int \hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau)\, d\tau$ изменяется скачкообразно, т. е. вероятность того, что в интервале времени Δ он изменится на конечную величину, пропорциональна Δ. Это означает, что изменение самого гамильтониана имеет характер δ-образных статистически независимых выбросов. В типичных физических случаях эти выбросы разделены во времени, и соответствующий квантовый процесс можно определить более точно соответствующим классическим термином как *ступенчатый* [12]. В последнем случае учесть характер шума можно с помощью представления гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_\xi(t)$ через импульсные функции времени $\hat{\mathcal{H}}_{\xi,k}(t-t_k)$ в виде

$$\hat{\mathcal{H}}_\xi(t) = \sum_k \hat{\mathcal{H}}_{\xi,k}(t-t_k), \tag{7.10}$$

где t_k — случайные моменты времени возникновения выбросов — пуассоновский поток с плотностью вероятности выброса β, $\hat{\mathcal{H}}_{\xi,k}$ — гамильтониан взаимодействия, описывающий соответствующий выброс. Неперекрываемость гарантируется, лишь если длительность импульсов характеризуется величиной $\tau_{\rm c}$, для которой вероятность появления импульса мала: $\beta\tau_{\rm c} << 1$. Длительность импульса имеет смысл введенного в п. 7.1 абстрактного времени корреляции, в то время как время релаксации есть в данном случае $\tau_{\rm r} = 1/\beta$. При этом для марковского процесса выбросы статистически независимы, т. е. их совместное квантовое распределение при заданном наборе времен появления импульсов $..., d\tau_{k-1}, d\tau_k, d\tau_{k+1}, ...$ описывается матрицей плотности вида

$$\hat{\rho}_\xi = ... \otimes \hat{\rho}_{\xi,k-1} \otimes \hat{\rho}_{\xi,k} \otimes \hat{\rho}_{\xi,k+1} \otimes ..... \tag{7.11}$$

При этом усреднение по состоянию резервуара $\hat{\rho}_{\rm R}$ включает два типа усреднения: по распределению вероятностей времен появления импульсов $\mathcal{P}(...d\tau_{k-1}, d\tau_k, d\tau_{k+1}, ...)$ и по квантовому распределению (7.11). Последнее имеет смысл *условного* квантового распределения вероятностей, в то время как $\hat{\rho}_{\rm R}$ фактически задано в виде

$$\hat{\rho}_{\rm R} = \mathcal{P}(...d\tau_{k-1}, d\tau_k, d\tau_{k+1}, ...)\hat{\rho}_\xi,$$

т. е. в данной модели содержит наравне с квантовыми и переменные, описываемые классически. Структура такого импульсного процесса проиллюстрирована на рис. 7.2. Отметим, что для ступенчатого характера марковского процесса важен не только сам факт представимости шума в виде разделенных импульсов, но и существенны соответствующие количественные соотношения между его параметрами: амплитуды должны

быть достаточными, чтобы результат воздействия одиночного импульса описывался как конечное изменения состояния. В противоположном случае такой шум является просто другой эквивалентной моделью белого шума.

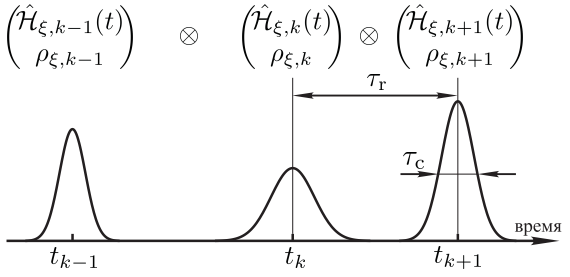

Рис. 7.2 Импульсный характер гамильтониана взаимодействия, порождающего в ОС ступенчатый марковский процесс.

Выполним усреднение по матрице плотности (7.11) в соответствующем гамильтониану взаимодействия (7.10) представлении выражения (7.7) при $\Delta << \tau_{\mathrm{r}}$. С учетом того, что вероятность появления импульса за время Δ равна $\beta\Delta$ и в отсутствие импульса переходной супероператор равен единичному супероператору с вероятностью $1-\beta\Delta$, получаем релаксационный супероператор ступенчатого квантового процесса:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{r}} = \beta\left[\mathrm{Tr}_{\xi,k}\,\hat{\rho}_k \mathrm{T}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\mathcal{H}_{\xi,k}(\tau)\odot]\;d\tau\right)-1\right]. \qquad (7.12)$$

Здесь интегрирование по времени распространено на бесконечные пределы, поскольку $\mathcal{H}_{\xi,k}(\tau)$ описывает ограниченный во времени импульс длительностью τ_{c}. След вычисляется по шумовым переменным, описываемым соответствующей матрицей плотности $\hat{\rho}_k$. Нетрудно видеть, что после разложения в этом выражении экспоненциала по показателю экспоненты с точностью до членов второго порядка, отсюда также может быть получен результат (7.9). Это обусловлено вышеуказанным соотношением между моделями импульсного и белого шума. В общем же случае, когда шум является существенно импульсным процессом, за каждый импульс взаимодействия происходит изменения состояния на конечную величину. Этому условию соответствует ненулевая и не малая величина супероператорного сомножителя в выражении (7.12). Отсюда непосредственно видно, что характерный масштаб времени релаксации есть $\tau_{\mathrm{R}} \sim \beta^{-1}$. В случае же шума, для которого за один импульс происходит лишь малое изменение состояния ОС, выражение (7.12) дает время релаксации в другом масштабе времени, превосходящем характерный интервал между импульсами. В этом случае, поскольку конечное изменение происходит только после действия многих импульсов, процесс описывается диффузионной моделью. Именно таким процессом являет-

ся классическое броуновское движение макрочастицы в жидкости [38]. Столкновение частицы с одной молекулой, учитываемое в самой точной микроскопической модели процесса, является коротким импульсом. Однако, этот импульс столь слаб, что конечное изменения состояния происходит в результате интегрирования многих силовых импульсов. Шум же, усредненный по большому интервалу, описывается математической моделью белого шума.

7.3 Физический смысл квантового описания

Конкретизируем приведенные результаты для наиболее важной модели ОС, для которой гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_\xi(t) = \hat{\xi}^{\mathrm{T}}\hat{F}, \tag{7.13}$$

где $\hat{\xi}$, $\hat{F}$ описывают два вектора столбца, отвечающих набору шумов резервуара и соответствующих обобщенных координат ОС, взаимодействующих с резервуаром. Будем считать, что шумы имеют нулевое среднее значение и описываются математической моделью квантового белого шума, т. е. марковский процесс является диффузионным. Тогда из формулы (7.9) получаем релаксационный оператор в виде

$$\mathcal{L}_{\mathrm{r}} = -\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\hbar^2\Delta}\int_t^{t+\Delta} d\tau_2 \int_t^{\tau_2} d\tau_1 \left\{ K_{\mu\nu}(\tau_1,\tau_2)\left[\hat{F}_\mu(\tau_1),\left[\hat{F}_\nu(\tau_2),\odot\right]\right] + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}C_{\mu\nu}(\tau_1,\tau_2)\left[\hat{F}_\mu(\tau_1),\left[\hat{F}_\nu(\tau_2),\odot\right]\right]_+ \right\}, \tag{7.14}$$

где $\hat{F}(\tau) = U_0^{-1}(\tau)\hat{F}(0)\mathcal{U}_0(\tau)$; символ $[\cdot,\cdot]_+$ обозначает операцию антикоммутации: $[\hat{f},\hat{g}]_+ = \hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f}$; K, C — симметризованную корреляционную матрица и коммутатор шумов $\hat{\xi}_\mu(\tau_1)$, $\hat{\xi}_\nu(\tau_2)$:

$$K_{\mu\nu}(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{2}\left\langle \hat{\xi}_\mu(\tau_1)\hat{\xi}_\nu(\tau_2) + \hat{\xi}_\nu(\tau_2)\hat{\xi}_\mu(\tau_1)\right\rangle_{\mathrm{R}}, \tag{7.15}$$

$$C_{\mu\nu}(\tau_1,\tau_2) = \left\langle \hat{\xi}_\mu(\tau_1)\hat{\xi}_\nu(\tau_2) - \hat{\xi}_\nu(\tau_2)\hat{\xi}_\mu(\tau_1)\right\rangle_{\mathrm{R}}, \tag{7.16}$$

которые являются, соответственно, вещественной и удвоенной мнимой частями комплексной корреляционной матрицы

$$\mathcal{K}_{\mu\nu}(\tau_1,\tau_2) = \left\langle \hat{\xi}_\mu(\tau_1)\hat{\xi}_\nu(\tau_2)\right\rangle_{\mathrm{R}}. \tag{7.17}$$

Матрицы K и C имеют качественно различный смысл. Матрица K отлична от нуля и при классическом рассмотрении шума. Соответствующее

ей слагаемое в (7.14), пропорциональное второму коммутатору переменных ОС, при переходе к описанию переменных $\hat{F}$ в представлении Вигнера в квазиклассическом приближении переходит в классический оператор чистой диффузии, выражаемый только через вторые производные по каноническим переменным, в то время как члены с производными первого порядка отсутствуют. Матрица же C отлична от нуля только при квантовом рассмотрении, и соответствующий ей член отсутствует при классическом описании шума. Поэтому представляет особый интерес выяснить качественный смысл этого члена, чтобы понять, какие эффекты теряются при замене квантового описания шума классическим. После деления C на $\hbar^2$ в (7.14) с учетом того, что $C \sim \hbar$, получаем коэффициенты порядка $\hbar^{-1}$, которые в сочетании с внутренним коммутатором во втором члене дают квантовую скобку Пуассона. Соответственно, в квазиклассическом пределе этот член дает классическую скобку Пуассона, что отвечает систематическому сносу. Сам же коммутатор C в терминах переменных резервуара отвечает квантовой скобке Пуассона для шума, причем величина соответствующего этой скобке систематического сноса для резервуара пропорциональна обобщенным координатам. Таким образом, основной квазиклассический смысл этого члена состоит в учете возмущения резервуара под действием ОС и обратного воздействия этого возмущения на ОС. Пренебрежение квантовым характером шума означает пренебрежение возможностью динамического изменения шумовой переменной и учет только его флуктуаций, обусловленных внешними по отношению к ОС причинами. Еще один важный момент состоит в асимметрии второго члена в (7.14) по отношению к моментам времени τ_1, , τ_2, которые неравноправны вследствие хронологического упорядочения: переменная с аргументом τ_2 расположена ближе к символу подстановки. Как будет видно из анализа релаксации двухуровневого атома в вакуумном электромагнитном поле эта асимметрия приводит к тому, что соответствующее изменение в состоянии атома связано только с испусканием квантов на частоте осцилляций атома, а акты поглощения описываются — наряду с испусканием — первым слагаемым в (7.14).

7.4 Качественные особенности немарковской релаксации

Марковский характер случайного процесса в ОС означает “максимально возможную стохастичность”, которая порождается в каждый момент новой независимой случайной величиной $\xi(t)$. Немарковость означает наличие статистической связи между этими величинами, рассматриваемыми в разные моменты времени. В задачах оптической спектроскопии немарковские процессы чаще всего возникают в системах с очень быстрыми релаксационными процессами, для которых характерное время релакса-

ции сравнивается с временем корреляции соответствующих шумов. Скорость релаксации определяется константой взаимодействия физической ОС, формирующей оптический отклик, с другими степенями свободы исследуемого физического объекта. Типичным примером является взаимодействие электронно-дырочной пары, рассматриваемой как ОС, с фононной подсистемой полупроводника [33]. соответствующая постоянная этого взаимодействия столь велика, что она сравнима с периодом световых колебаний, который в результате и определяет характерное время корреляции процессов электрон-фононного взаимодействия. Представим в порядке мысленного эксперимента дальнейшее возрастание константы взаимодействия до таких величин, когда вычисленное в соответствии с марковской теорией значение времени релаксации было бы значительно меньше времени корреляции, и зададимся вопросом, может ли в действительности релаксации происходить с такой скоростью? Интуитивный отрицательный ответ почти очевиден: это невозможно, потому что на временах меньших времени корреляции динамика не может быть стохастической, и с соответствующее движение будет обратимым, сводясь к сверхбыстрым осцилляциям. Этот эффект проще всего понять из рассматриваемого далее примера, в котором анализируется упругая дефазировка двухуровневого атома.

Глава 8
Релаксация в системе квантовых линейных осцилляторов

8.1 Качественные особенности динамики

Анализ системы линейных осцилляторов с шумами и релаксацией связан с исследованием системы линейных дифференциальных уравнений и, как правило, не представляет большой проблемы, кроме естественных трудностей, возникающих при рассмотрении нестационарных или многомерных систем. Соответствующие расчеты выполняются как в физических, так и в других самых разнообразных приложениях теории случайных процессов. В квантовом случае в силу линейности системы, как это было выяснено уже в *Главе 3*, эволюция описывается в точности теми же самыми преобразованиями и все отличие заключается только в характере усреднения, учитывающего специфику квантовых распределений вероятностей. Однако, сама классическая техника, основанная на написании уравнений эволюции в дифференциальной форме, является далеко не самой экономной, поскольку отображает очень простой тип движения в непропорционально удлиненной форме записи и не обращается непосредственно к основному для данной системы математическому содержанию динамической проблемы — расчету собственных значений характеристической матрицы и представлению решения в форме соответствующей матричной экспоненты $\exp(Lt)$, примененной к вектору, описывающего начальные условия. В применении к квантовым системам упрощение описания динамики за счет использования стандартной техники *Главы 3* особенно целесообразно, поскольку позволяет разделить квантовые и классические объекты теории в наиболее явном виде.

Рассмотрим минимальный базис квантовой системы линейных гармонических осцилляторов и соответствующее ему линейное пространство в виде

$$\begin{array}{l} \{\hat{e}_k\} \to \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \,, \\ \mathcal{C}_0 \to \hat{I} \,, \\ \mathcal{C}_1 \to \{\hat{X}_l, \quad l = 1, ..., N\} \,, \\ \mathcal{C}_2 \to \{(\hat{X}_l \hat{X}_m + \hat{X}_m \hat{X}_l)/4, \quad l, m = 1, ..., N\} \,. \end{array} \tag{8.1}$$

где $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ — линейные подпространства, соответствующие единичному элементу базиса, линейным и квадратичным комбинациям фазовых переменных; $N = 2n$ — размерность фазового пространства системы, n — число степеней свободы. Базис (8.1) состоит из единичного оператора и подбазисов динамических переменных $\hat{X}_l$ и их билинейных комбинаций. Последние выбраны в виде вигнеровски упорядоченных произведений некоммутирующих операторов $\hat{X}_l$, $\hat{X}_m$, однако это достаточно для представления произвольных квадратичных форм. Что касается левого базиса $\hat{h}_k$, то его роль заключается в расчете матричных элементов и в выполнении усреднения базисных элементов $\hat{e}_k$ по начальному распределению вероятностей. Первое для линейных систем может быть выполнено и непосредственно путем прямого сопоставления результатов рассматриваемых преобразований с базисом. Что же касается осреднения, то оно представимо в форме $\hat{A} = \langle \hat{\rho} | \, \hat{A} \rangle$, где

$$\langle \hat{\rho}| = (\mathrm{Tr}\hat{\rho}\,\hat{e}_1, ..., \mathrm{Tr}\hat{\rho}\,\hat{e}_N) \,, \tag{8.2}$$

т.е. для вычисления бра-вектора, представляющего матрицу плотности, не обязательно знать сам левый базис, а непосредственно требуется лишь знание средних $\mathrm{Tr}\hat{\rho}\,\hat{e}_k$ на базисных элементах правого базиса $\{\hat{e}_k\}$. Основной интерес обычно представляют собственные состояния динамического оператора $\langle \hat{\rho}| = \langle k|$, описываемые уравнением $\langle k| \, L = \lambda_k \, \langle k|$, которые связаны с базисом $\hat{h}_k$, биортогональным к $\hat{e}_k$ относительно стандартного скалярного произведения $\mathrm{Tr}\hat{A}^+\hat{B}$, введенного соотношением (3.4). На стадии же расчета самих матричных элементов матрицы L могут быть использованы иные более удобные формы скалярного произведения и соответствующего левого базиса. При использовании, в частности, вигнеровского представления базисных векторов $\hat{e}_k$ классическими по форме функциями $e_k(X)$, если в качестве последних рассматривать полиномы фазовых переменных X, простейшим видом скалярного произведения является

$$((f, g)) = \int\limits_{-1}^{+1} ... \int\limits_{-1}^{+1} f(X) g(X) dX \,. \tag{8.3}$$

Соответствующий $e_k(X)$ биортогональный набор $h_l(X)$ задается соотношением $h = M^{-1}e$, где $M_{k,l} = ((e_k, e_l))$ — матрица скалярных произведений правого базиса. С его использованием стандартное соотношение

$$L_{mn} = ((h_m, \mathcal{L}e_n)) \tag{8.4}$$

позволяет рассчитать матричные элементы супероператора $\mathcal{L}$ в базисе e_k. Данная схема расчета наиболее эффективна при использовании современных программных средств выполнения аналитических расчетов на компьютере.

Рассматриваемый здесь полный лиувиллиан $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\rm L} + \mathcal{L}_\delta + \mathcal{L}_{\rm r}$, описываемый выражениями (8.18), (8.19), (8.21) в n-мерном случае и (8.28) в одномерном, является суперoператором глобально понижающего типа, т. е. имеет блочную структуру (3.23) при разложении пространства рассматриваемых переменных в виде $E_1 \oplus E_2$, где E_1 — линейная оболочка одночленов $X_{k_1} \cdots X_{k_\mu}$ степени $\mu \le \nu$, где ν выбрано произвольно, а E_2 — степени $\nu + 1$. Действительно, как легко проверить, все составляющие супероператора $\mathcal{L}$ при применении к полиному любой степени не повышают эту степень.

Для выявления упрощений, связанных с описанной структурой супероператора $\mathcal{L}$, рассмотрим структуру соответствующих собственных векторов. Сопряженные спектральные задачи для матричного представления L лиувиллиана $\mathcal{L}$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ 0 & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \qquad (\varphi_1 \quad \varphi_2) \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ 0 & L_{22} \end{pmatrix} = \lambda (\varphi_1 \quad \varphi_2), \tag{8.5}$$

где $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ описывают собственные динамические переменные, а $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ — соответствующие собственные состояния. Они имеют решения в форме

$$\Psi_I = \begin{pmatrix} \psi_1^I \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_{II} = \begin{pmatrix} -\left(L_{11} - \lambda_{II}\right)^{-1} L_{12} \psi_2^{II} \\ \psi_2^{II} \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$

где ψ_1^I, ψ_2^{II} описывают решения "правых"собственных задач уменьшенных размерностей

$$L_{11}\psi_1^I = \lambda_I \psi_1^I, \qquad L_{22}\psi_2^{II} = \lambda_{II}\psi_2^{II}, \tag{8.7}$$

и, соответственно,

$$\Phi_I = \left(\varphi_1^I \quad -\varphi_1^I L_{12} \left(L_{22} - \lambda_I\right)^{-1}\right), \qquad \Phi_{II} = \left(0 \quad \varphi_2^{II}\right), \tag{8.8}$$

где $\varphi_1^I, \varphi_{II}^2$ описывают решения сопряженных к (8.7) "левых"собственных задач

$$\varphi_1^I L_{11} = \lambda_I \varphi_1^I, \qquad \varphi_2^{II} L_{22} = \lambda_{II}\varphi_2^{II}. \tag{8.9}$$

Таким образом, решение полной спектральной задачи (8.5) расцепляется на решение редуцированных "правых"и "левых"задач (8.7), (8.9) для подматриц L_{11}, L_{22}. При рассмотрении проблемы расчета стационарных характеристик следует учитывать тот факт, что в подпространствах E_ν, образованных линейными оболочками одночленов любой степени $\nu > 0$,

рассматриваемый супероператор $\mathcal{L}$ не имеет нулевых собственных значений. Отсюда следует, что нулевому собственному значению соответствуют согласно выражениям (8.6), (8.8) собственные векторы

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_0 = (1, -L_{0\,\overline{0}} L_{\overline{0}\,\overline{0}}^{-1}),$$

где $L_{0\,\overline{0}}$ описывает строку, отвечающую преобразованию из подпространства переменных, помеченных $\overline{0}$, в $e_0(X) = 1$, в то время как $\overline{0}$ отвечает подпространству переменных, дополнительных к $e_0(X)$, т. е. подпространство полиномов, не содержащих свободных членов. При этом, поскольку $L_{\overline{0}\,\overline{0}}$ в силу глобально понижающего типа рассматриваемого супероператора $\mathcal{L}$ имеет понижающую блочную структуру вида (3.23), обратный оператор имеет вид

$$L_{\overline{0}\,\overline{0}}^{-1} = \begin{pmatrix} L_{11}^{-1} & -L_{11}^{-1} L_{12} L_{22}^{-1} \\ 0 & L_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

В результате нулевой бра-вектор имеет вид

$$\Phi_0 = (1, -L_{01} L_{11}^{-1}, L_{01} L_{11}^{-1} L_{12} L_{22}^{-1} - L_{02} L_{22}^{-1}).$$

Следовательно, расчет средних для переменных из $E_0 \oplus E_1$, выполняемый с использованием только первых двух компонент Φ_0, не связан с рассмотрением подпространства E_2, и может быть выполнен путем нахождения стационарного собственного вектора подматрицы, отвечающей $E_0 \oplus E_1$. Таким образом, для лиувиллианов глобально понижающего типа можно выполнять расчет стационарных средних для полиномов до степени ν включительно, не привлекая к рассмотрению полиномов более высокой степени.

8.2 Расчет лиувиллиана

Гамильтониан взаимодействия с шумами системы линейных гармонических осцилляторов представляется в виде (7.13). Здесь мы ограничимся случаем линейного возмущения

$$\hat{\mathcal{H}}_\xi = \hbar \hat{\xi}^{\mathrm{T}}(t) \hat{X}(t)\,, \tag{8.10}$$

где динамические переменные осцилляторов $\hat{X}(t)$ и стационарных шумов $\hat{\xi}(t)$ рассматриваются в представлении взаимодействия. Невозмущенный гамильтониан собственного движения осцилляторов для системы координат с центром в точке равновесия имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{2}\hat{X}^{\mathrm{T}} Q \hat{X}\,, \tag{8.11}$$

где положительно определенная матрица Q в частном случае системы материальных частиц в гармоническом поле потенциальных сил и декартовой системы координат сводится к прямой сумме диагональной матрицы масс и матрицы силовых констант, описываемых вторыми производными потенциальной энергии $V(q)$.

Рассчитаем матричные элементы невозмущенного лиувиллиана

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{\mathcal{H}}_0, \odot\right]$$

в базисе (8.1). Для линейной части $\hat{A} \in \mathcal{C}_1$ имеем $\left[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{X}\right] = CQX$, где коммутационная матрица C с элементами $C_{mn} = (\hat{X}_m\hat{X}_n - \hat{X}_n\hat{X}_m)$ в случае стандартного набора канонических координат и импульсов имеет вид (4.31). Поскольку, в силу свойства (3.17), для расчета действия унитарного преобразования временной эволюции на любую функцию $f(\hat{X})$ достаточно знать его действие на $\hat{X}$, нет необходимости рассчитывать лиувиллиан в подпространстве квадратичных переменных. В подпространстве же линейных переменных $\mathcal{C}_1$ соответствующие матричные элементы невозмущенного лиувиллиана имеют вид

$$L_0 = \frac{i}{\hbar}CQ\,. \tag{8.12}$$

Эта матрица может быть представлена в канонической форме

$$L_0 = V^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & \dots & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_n \\ 0 & 0 & \dots & -\omega_n & 0 \end{pmatrix} V \tag{8.13}$$

с помощью преобразования подобия V, которое приводит Q к единичной матрице, а C к канонической кососимметрической форме. Оно рассчитывается из соотношения

$$VCQV^{-1} = (V_2^{-1}M^{-1}V_1^{-1}CV_1MV_2)(V_2^{-1}M^{-1}V_1^{-1}QV_1MV_2),$$

определяющего $V^{-1} = V_1MV_2$ через следующую совокупность преобразований: преобразование подобия V_1, диагонализирующее матрицу Q, масштабное преобразование M, приводящее диагонализированную матрицу Q к единичной, и последующее преобразование подобия V_2, приводящее к канонической форме измененную матрицу C и, одновременно,

произведение CQ. Соответствующий оператор невозмущенной временной эволюции представляется в виде

$$S_0(t) = V^{-1} O_n(t) V \,,$$

где

$$O_n(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos\omega_1 t & \sin\omega_1 t & \dots & 0 & 0 \\ -\sin\omega_1 t & \cos\omega_1 t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \cos\omega_n t & \sin\omega_n t \\ 0 & 0 & \dots & -\sin\omega_n t & \cos\omega_n t \end{pmatrix} \tag{8.14}$$

описывает совокупность n двумерных поворотов на углы $\varphi_k = \omega_k t$, где набор $\omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ описывает частоты собственных колебаний. Такие же преобразования поворота описывают и свободную прецессию дипольного момента ДА. Вектор $\hat{X}^0 = V\hat{X}$ описывает набор нормальных координат $\{\hat{q}_1, \hat{p}_1, ..., \hat{q}_n, \hat{p}_n\}$ сопряженных переменных $\hat{q}_k, \hat{p}_k$, приведенных к одинаковой размерности и определенных описанным алгоритмом точностью до произвольного общего для каждой пары масштабного множителя в преобразовании V_2, исчезающего в комбинации $V_2^{-1} \odot V_2$. В квантовой теории выделены два стандартных выбора соответствующего множителя: $[\hat{q}_k, \hat{p}_k] = i\hbar$ и $[\hat{q}_k, \hat{p}_k] = i$, отвечающие разным значениям постоянной Планка — истинному физическому значению и $\hbar = 1$ (при этом последний вариант обычно связан с переходом к комплексному базису на основе операторов порождения-уничтожения квантов $\hat{a}_k^+, \hat{a}_k$).

Рассмотрим теперь околорезонансное возбуждение системы набором гармонических сил с потенциалом

$$\hat{H}_{\rm L} = \mathcal{R}\mathrm{e} \sum_{k=1}^{m} e^{-i\omega_{\rm L}^k t} f_k^{\rm T} \hat{X} \,, \tag{8.15}$$

где $m \le n$ — число гармонических сил с векторами комплексных амплитуд сил f_k с частотами $\omega_{\rm L}^{(m)} = \{\omega_{\rm L}^1, ..., \omega_{\rm L}^m\}$, близкими к соответствующим собственным частотам ω_k. В этом случае в качестве невозмущенной динамики удобнее рассматривать динамику, задаваемую измененным преобразованием (8.14) с его заменой на

$$O_n(\omega^{(m)}t) =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\omega_L^1 t & \sin\omega_L^1 t & . & . & 0 & 0 \\ -\sin\omega_L^1 t & \cos\omega_L^1 t & . & . & 0 & 0 \\ ... & ... & . & . & ... & ... \\ 0 & 0 & \cos\omega_L^m t & \sin\omega_L^m t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\omega_L^m t & \cos\omega_L^m t & 0 & 0 \\ ... & ... & . & . & ... & ... \\ 0 & 0 & . & . & \cos\omega_n t & \sin\omega_n t \\ 0 & 0 & . & . & -\sin\omega_n t & \cos\omega_n t \end{pmatrix}, \tag{8.16}$$

где близкие к возбуждающим собственные частоты заменены на значения возбуждающих частот. Рассчитаем в представлении взаимодействия полную матрицу лиувиллиана временной эволюции $L = L_\delta + L_\mathrm{L} + L_\mathrm{r}$, которая складывается из матрицы L_δ, учитывающей расстройки возбуждающих полей, матрицы L_L, описывающей возбуждение действующими силами, и релаксационной матрицы L_r, определенных в пространстве (8.1) размерности $1 + N + N(N+1)/2$. Конечный результат имеет блочный вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & W_1 & W_2 \\ 0 & L_1 & L_{12} \\ 0 & 0 & L_2 \end{pmatrix}. \tag{8.17}$$

При этом удобно для выполнения расчетов использование представление Вигнера, в котором временная динамика отображается заменой в гамильтониане набора операторов $\hat{X}$ на линейную комбинацию $X + (C/2)\partial/\partial X^\mathrm{T}$.

Лиувиллиан взаимодействия с возбуждающими силами описывается в представлении взаимодействия не зависящим от времени выражением

$$\mathcal{L}_\mathrm{L} = \mathcal{R}\mathrm{e} \sum_{k=1}^{m} \langle f_k \,|\omega_k\rangle \left\langle \omega_k \left| C\frac{\partial}{\partial X^\mathrm{T}} \right.\right\rangle. \tag{8.18}$$

Здесь ω_k — положительные собственные значения матрицы (8.12). Лиувиллиан, описывающий расстройку, имеет вид

$$\mathcal{L}_\delta = \frac{\partial}{\partial X}\sigma\delta Q X\,, \tag{8.19}$$

где $\sigma = iC/\hbar$, а

$$\delta Q = V^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\delta_1 & . & . & 0 & 0 \\ \delta_1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ ... & ... & . & . & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_m & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & . & . & ... & ... \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix} V\,, \tag{8.20}$$

Из формулы (7.14) получаем релаксационный оператор в виде

$$\mathcal{L}_{\rm r} = \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\partial}{\partial X} C\tilde{\mathcal{K}} C \frac{\partial}{\partial X^{\rm T}} - \frac{1}{2} X^{\rm T}\tilde{\mathcal{C}} C \frac{\partial}{\partial X^{\rm T}}\right) \tag{8.21}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}} &= \sum_{k=1}^{2n} \int_0^\infty \langle\omega_k|\, K_\xi(\tau)\, |\omega_k\rangle\, e^{i\omega_k\tau} d\tau\, |\omega_k\rangle\, \langle\omega_k|\,, \\ \tilde{\mathcal{C}} &= \sum_{k=1}^{2n} \int_0^\infty \langle\omega_k|\, C_\xi(\tau)\, |\omega_k\rangle\, e^{i\omega_k\tau} d\tau\, |\omega_k\rangle\, \langle\omega_k| \end{aligned} \tag{8.22}$$

описывают редуцированные матрицы спектральных плотностей, соответствующих симметризованной корреляционной и коммутационной матрицам шумов $\hat{\xi}$. Первое слагаемое в релаксационном супероператоре (8.21) описывает диффузионную составляющую, а второе — затухание. При этом из выражений (8.22) в предположении о тепловом равновесии флуктуаций шумов резервуара следует определенное соотношение между параметрами этих двух вкладов, аналогичное как по форме, так и по содержанию, соотношению между параметрами скорости распада γ и некогерентной накачки w в соотношениях (9.48) в теории релаксации двухуровневого атома. Так, в одномерном случае, матрицы $\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{\mathcal{C}}$ пропорциональны единичным и между ними имеет место соотношение $\tilde{\mathcal{K}}/\tilde{\mathcal{C}} = (1/2)\mathrm{cth}(\hbar\omega/2kT)$. В квазиклассической асимптотике $kT/\hbar\omega \to \infty$ из (8.21) следует, что постоянная Планка выпадает из обоих слагаемых и между коэффициентом диффузии и затуханием имеет место классическое соотношение, для коэффициента диффузии в пространстве скоростей имеющее вид $D = kT\gamma/m$ [13]. В общем случае квантовый характер динамики системы линейных осцилляторов проявляется лишь в указанных соотношениях, которые автоматически учитывают условие сохранения минимального уровня квантовых флуктуаций, соответствующих соотношению неопределенностей Гейзенберга (4.47).

Применяя приведенные выражения для лиувиллианов (8.18), (8.19), (8.21), получаем следующее представление динамики в виде матричных элементов:

$$W_{1k} = \mathcal{R}\mathrm{e} \sum_{k=1}^{m} \langle f_k \,|\omega_k\rangle \, \langle \omega_k \,|C_k\rangle \,, \tag{8.23}$$

где $|C_k\rangle$ — k-ый столбец из элементов коммутационной матрицы.

$$W_2 = \frac{1}{\hbar^2} C\tilde{\mathcal{K}}C \,, \tag{8.24}$$

где правая часть рассматривается как $N(N+1)/2$-элементная вектор-строка, нумерованная матричными элементами представленной матрицы.

$$L_1 = \sigma\delta Q - \frac{1}{2\hbar^2}\tilde{\mathcal{C}}C \,, \tag{8.25}$$

где правая часть рассматривается как квадратная матрица $N \times N$.

$$(L_{12})_{jkl} = \frac{1}{2}\,\mathcal{R}\mathrm{e} \sum_{k=1}^{m} \langle f_k \,|\omega_k\rangle \, \langle \omega_k \,|C_j(\delta_{kj} + \delta_{kl})\rangle \,, \tag{8.26}$$

где правая часть рассматривается как прямоугольная матрица $N \times N(N+1)/2$.

$$(L_2)_{jklm} = \langle \sigma_l \,|\delta Q_j\rangle \, \delta_{km} + \langle \sigma_k \,|\delta Q_m\rangle \, \delta_{jl} - \frac{1}{2\hbar^2}(\left\langle \tilde{\mathcal{C}}_l \,|C_j \right\rangle \delta_{km} + \left\langle \tilde{\mathcal{C}}_k \,|C_m \right\rangle \delta_{jl}) \,, \tag{8.27}$$

где правая часть рассматривается как квадратная матрица $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$. С помощью этих соотношений релаксационный оператор представляется явным аналитическим выражением как квадратная матрица размерности $(\frac{N^2}{2}+\frac{3N}{2}+1)\times(\frac{N^2}{2}+\frac{3N}{2}+1)$. Минимальная размерность, таким образом, соответствующая одномерному случаю $N = 2n = 2$, есть 6×6. Расчеты с использованием матрицы (8.17) существенно упрощаются вследствие ее понижающей структуры вида (3.23), позволяющей рассчитывать переменные в виде полиномов r-ой степени независимо от переменных более высокой степени.

8.3 Одномерный случай

В одномерном случае $n = 1, N = 2$ в случае гамильтониана, не содержащего комбинаций вида $\hat{q}\hat{p}$, приведение к каноническому виду осуществляется матрицей V, сводящейся просто к масштабному преобразованию

$$V = M = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{m\omega_0}} & 0 \\ 0 & \sqrt{m\omega_0} \end{pmatrix},$$

где ω_0 — частота осциллятора. Данное преобразование приводит координату и импульс к одинаковой размерности $[\hbar]^{-1/2}$, а гамильтониан — к виду $\hat{H}_0 = \omega_0(\hat{q}^2+\hat{p}^2)/2$, без изменения объема фазового пространства, т. е. с сохранением коммутатора C, который уже имеет канонический вид.

В терминах преобразованных координат и импульсов $X = (q, p)$ описанные в п. 8.2 в резонансном приближении (т. е. усредненные по осцилляциям на резонансной частоте ω_0) компоненты полного лиувиллиана имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{L}} &= f_L \left(\sin\varphi_L \frac{\partial}{\partial q} + \cos\varphi_L \frac{\partial}{\partial p} \right), \\
\mathcal{L}_{\delta} &= \delta \left(q\frac{\partial}{\partial p} - p\frac{\partial}{\partial q} \right), \\
\mathcal{L}_{\mathrm{r}} &= -\frac{1}{2}\gamma \left(q\frac{\partial}{\partial q} + p\frac{\partial}{\partial p} \right) + D\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right).
\end{aligned} \tag{8.28}$$

В последнем выражении в качестве базовых параметров проблемы использованы скорость затухания γ, имеющая стандартную размерность $[t]^{-1}$, и коэффициент диффузии D, имеющий при данном выборе системы координат размерность энергии $[m][l]^2[t]^{-2}$, где l обозначает размерность непреобразованной координаты. Эти параметры удовлетворяют соотношениям, описанным в п. 8.2. В частности, наличие ненулевого затухания в классической теории в силу флуктуационно-диссипационной теоремы с неизбежностью приводит к наличию пропорционального затуханию и температуре коэффициента диффузии, т. е. влечет появление соответствующих флуктуаций. В квантовой теории в дополнение к этому ненулевые флуктуации имеют место и при нулевой температуре — в силу квантового обобщения описывающей уровень флуктуаций классической формулы Найквиста. Это обусловлено наличием не связанных с шумами термостата собственных квантовых флуктуаций осциллятора, включенных в динамику, описываемую рассматриваемым лиувиллианом.

Базис линейно-квадратичных переменных в представлении Вигнера имеет вид $\{1, q, p, q^2/2, qp/2, p^2/2\}$. В этом базисе матричное представление суммарного лиувиллиана с использованием формулы (8.3) может быть получено в виде

$$L = \begin{pmatrix}
0 & f\sin\varphi_L & f\cos\varphi_L & 2D & 0 & 2D \\
0 & -\gamma & \delta & 2f\sin\varphi_L & f\cos\varphi_L & 0 \\
0 & -\delta & -\gamma & 0 & f\sin\varphi_L & 2f\cos\varphi_L \\
0 & 0 & 0 & -2\gamma & \delta & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2\delta & -2\gamma & 2\delta \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & -2\gamma
\end{pmatrix} \tag{8.29}$$

Стационарное состояние в рассматриваемом базисе характеризуется левым собственным вектором $\langle 0|$, определяемым уравнением $\langle 0| L = 0$ и описывающим первые и вторые моменты стационарного распределения

вероятностей.[1] Адекватная нормировка бра-векторов $\langle\hat{\rho}|$, очевидно, дается соотношением $\langle\hat{\rho}|_1 = 1$, поскольку $\langle 1\rangle = \langle\hat{\rho}\,|e_0\,\rangle = \langle\hat{\rho}|_1$. С учетом этого решение проблемы стационарного состояния для матрицы (8.29) имеет вид

$$\langle 0| = \left(1,\ \langle q\rangle,\ \langle p\rangle,\ \langle q\rangle^2 + \frac{D}{\gamma},\ \langle q\rangle\langle p\rangle,\ \langle p\rangle^2 + \frac{D}{\gamma}\right), \tag{8.30}$$

где

$$\langle q\rangle = f\frac{\gamma\sin\varphi_L - \delta\cos\varphi_L}{\gamma^2+\delta^2},$$
$$\langle p\rangle = f\frac{\gamma\cos\varphi_L + \delta\sin\varphi_L}{\gamma^2+\delta^2}.$$

Изложенный анализ является всего лишь иллюстрацией описанной техники расчетов, примененной для наглядности к хорошо изученной простейшей модели. В действительности, она может быть приложена и к другим, более сложным системам, из которых наиболее очевидным примером являются системы с ненулевым, но малым ангармонизмом, когда представляет интерес расчет ангармонических вкладов.

[1] Стандартный переход к смещенной системе координат с центром в точке математического ожидания $X_0 = \langle 0\,|X\,\rangle$ описывается заменой супероператора $\Delta L = L - L_{D\to 0}$ для приведения решения стационарной задачи $\langle 0|\,L = 0$ к виду $\langle 0| = (1,0,0)$ в подпространстве линейных многочленов. После этого $\Delta L = L - L_{D\to 0}$ описывает лишь высшие моменты искомого распределения.

Глава 9
Теория релаксации двухуровневого атома

9.1 Общие соотношения

Двухуровневая модель атома (ДА) является частным случаем двухуровневых систем (ДС), структура которых описана в абстрактном виде в *Главе 4*. Теория случайных процессов в открытых ДС может быть изложена в абстрактном виде безотносительно к их физической природе. Здесь, однако, мы ограничимся рассмотрением только ДА, поскольку все наиболее важные эффекты ДС проявляются в его динамике. Специфика именно ДА связана с качественно различным физическим смыслом его базисных операторов $\hat{s}_k$. При $k = 1, 2$ они описывают операторы поляризации — недиагональные матричные элементы оператора дипольного момента, а $\hat{s}_3$ есть оператор разности населенностей. Невозмущенная динамика недиагональных операторов содержит быстрые осцилляции с частотой ω_{12} атомного перехода — *свободную прецессию*, в то время как оператор разности населенностей в отсутствие взаимодействия неизменен, а при действии умеренно сильного поля с интенсивностью $I \leq 10^{15}$ Вт/см^2 испытывает осцилляции — оптические нутации — с характерными частотами $\Omega << \omega_{12}$.

Гамильтониан взаимодействия ДА с резервуаром имеет стандартную структуру

$$\hat{\mathcal{H}}_\xi = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}\,. \tag{9.1}$$

Здесь $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ — набор операторов квазиспина, представленных матрицами Паули; $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ — набор переменных резервуара, описывающих результирующие шумы в ДА. При этом мы будем полагать $\left\langle \hat{\boldsymbol{\xi}} \right\rangle_{\mathrm{R}} = 0$, считая среднее значение гамильтониана $\left\langle \hat{\mathcal{H}}_\xi \right\rangle_{\mathrm{R}}$ включенным в собственный гамильтониан ДА. В силу того, что любой оператор двухуровневой системы представляется в виде разложения по матрицам Паули, эта структура является,

фактически, универсальной и, соответственно, для различных конкретных ДА специфика релаксационных процессов обусловлена только следующими двумя факторами. Первый — статистические характеристики случайного процесса

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}(t) = U_{\xi}^{-1}(t)\hat{\boldsymbol{\xi}}(0)U_{\xi}(t)\,,$$

определяемые физической природой резервуара. Второй — динамические свойства быстрых собственных движений ДА, описываемых в представлении взаимодействия преобразованием

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \left[U_0^{-1}(t) \odot U_0(t)\right] \hat{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{9.2}$$

Основными физическими примерами резервуаров являются электромагнитное поле вакуума, другие атомы в газовой фазе и квазичастицы (элементарные возбуждения) в сплошных средах. Основными примерами быстрой динамики является невозмущенная прецессия свободного атома и оптические нутации в случае достаточно сильного лазерного поля.

Действие различных компонент шума $\hat{\xi}_k$ на ДА в силу качественно различного физического смысла сопряженных им операторов $\hat{\sigma}_k$ также качественно различно. Шумы $\hat{\xi}_{1,2}$ приводят к так называемой *неупругой дефазировке* атома, которая сопровождается реальными переходами между атомными уровнями. Шум $\hat{\xi}_3$ приводит к чисто *упругой дефазировке* атома, которая состоит только в дефазировке когерентных колебаний 1↔2-переходов, описываемых недиагональными матрицами $\hat{\sigma}_{1,2}$, без изменения населенностей уровней. При этом, с учетом собственных осцилляций атомных переменных $\hat{\sigma}_{1,2}$ в (9.1), существенно их взаимодействие лишь с шумами $\hat{\xi}_{1,2}$, в относительно узкой полосе частот δ (см. п. 7.1 *Главы 7*) в окрестности атомной частоты ω_{12}. Качественно различная роль различных компонент шума $\hat{\xi}$ проиллюстрирована на рис. 9.1.

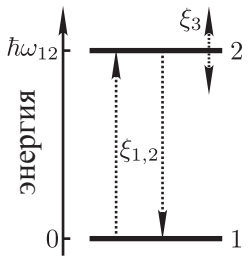

Рис. 9.1 Энергетическая схема ДА и его взаимодействие с различными компонентами шума ξ. Шумы $\hat{\xi}_{1,2}$ приводят к переходам между уровнями; шум $\hat{\xi}_3$ модулирует частоту перехода.

Аналитические результаты при наличии нескольких шумов ξ можно получить только для марковских процессов. Для процессов диффузионного типа из общего соотношения (7.9) *Главы 7* в данном случае после подстановки выражений (9.1), (9.2) с учетом представления супероператорного преобразования (9.2) в виде соответствующего преобразования

$S_\sigma(t)\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ с 3×3-матрицей $S_\sigma(t)$, получаем символическое представление релаксационного супероператора в наиболее общем виде, справедливом при наличии быстрых собственных осцилляций ДА:

$$\mathcal{L}_{\rm r} = \frac{1}{4}{\rm tr}\left[(Q+Q^+)\hat{\boldsymbol{\sigma}}\odot\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rm T} - (Q\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rm T}\odot + Q^+\odot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\rm T})\right]. \qquad (9.3)$$

Здесь символ tr обозначает взятие следа только по индексам 3×3-матриц, составленных из супероператорных выражений; символ T обозначает транспонирование трехмерного вектора-столбца $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$; матрица Q представляется следующим выражением:

$$Q = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} d\tau_2\int_t^{\tau_2} d\tau_1 S_\sigma(\tau_1)\mathcal{K}_\xi(\tau_1,\tau_2)S_\sigma^{\rm T}(\tau_2)\,, \qquad (9.4)$$

где

$$\mathcal{K}_\xi(\tau_1,\tau_2) = \langle\hat{\boldsymbol{\xi}}(\tau_1)\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\rm T}(\tau_2)\rangle_{\rm R} - \qquad (9.5)$$

корреляционная матрица шумов. Матрица Q учитывает влияние быстрых движений на процессы релаксации. Она выделяет из спектра флуктуаций, представленных корреляционной матрицей $\mathcal{K}_\xi(\tau_1,\tau_2)$, частоты, соответствующие быстрым движениям, представленным в матрице $S_\sigma(t)$.

Соответствующий выражению (9.3) для релаксационного супероператора вид матричных элементов может быть получен с использованием формулы (3.39), выражающей произведения базисных операторов $\hat{e}_k$ через их линейные комбинации. Подставляя в (9.3) базисные операторы $\hat{e}_k$ и используя фигурирующие там операторы $\hat{\sigma}_k$ и дополняющий их единичный оператор $\hat{I}$ в качестве базиса, после замены всех произведений линейными комбинациям получаем преобразованные базисные элементы $\mathcal{L}_{\rm r}\hat{e}_k$ в виде линейного разложения по этим же элементам $\hat{e}_k$ с коэффициентами

$$L_{nk} = (Q_{ij}+Q^*_{ji})G_{jkl}G_{lin} - (Q_{ij}+Q^*_{ij})G_{jil}(G_{lkn}+G_{kln}). \qquad (9.6)$$

Здесь использовано соглашение о суммировании дважды встречающихся индексов. С учетом конкретного вида структурных коэффициентов, определенных соотношением (4.12), получаем соответствующую выражению (9.6) релаксационную матрицу в виде:

$$L_{\rm r} = \begin{pmatrix} 0 & 2\,\mathcal{J}{\rm m}\,Q_{12} & 2\,\mathcal{J}{\rm m}\,Q_{31} & 2\,\mathcal{J}{\rm m}\,Q_{32} \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{R}{\rm e}\,Q - ({\rm Tr}\ \mathcal{R}{\rm e}\,Q)I & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \qquad (9.7)$$

где I обозначает единичную 3×3-матрицу.

Рассмотрим структуру матрицы (9.7) для случая матриц Q вида:[1]

$$Q = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \, |\lambda_k\rangle \, \langle\lambda_k|, \tag{9.8}$$

где $|\lambda_k\rangle, \langle\lambda_k|$ эрмитово сопряженные собственные векторы и строки некоторой вещественной антисимметричной матрицы, а собственные значения λ_k матрицы Q в общем случае произвольны. Общий вид собственных векторов описывается выражениями (4.20) при произвольных $\Omega_{1,2,3}$. При этом будем полагать, что $|\lambda_3\rangle$ — вещественный вектор, а $|\lambda_{1,2}\rangle$ комплексно сопряжены друг другу. С учетом этих выражений и представления матрицы Q в виде разложения (9.8) релаксационная матрица (9.7) записывается в виде:

$$L_{\rm r} = \begin{pmatrix} 0 & -w\,\langle\lambda_3| \\ 0 & \\ 0 & L_\sigma \\ 0 & \end{pmatrix}, \tag{9.9}$$

где

$$L_\sigma = -\gamma \, |\lambda_3\rangle \, \langle\lambda_3| - (\Gamma + i\Lambda) \, |\lambda_1\rangle \, \langle\lambda_1| - (\Gamma - i\Lambda) \, |\lambda_2\rangle \, \langle\lambda_2| \, . \tag{9.10}$$

Параметры $w, \gamma, \Gamma, \Lambda$ связаны с λ_k соотношениями

$$w = \mathcal{R}\mathrm{e}\,(\lambda_1 - \lambda_2), \qquad \gamma = \mathcal{R}\mathrm{e}\,(\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$\Gamma = \mathcal{R}\mathrm{e}\left[\lambda_3 + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)\right], \qquad \Lambda = \mathcal{J}\mathrm{m}\,(\lambda_2 - \lambda_1). \tag{9.11}$$

Выражение (9.9) соответствует общей структуре (3.19) супероператорных преобразований в ОС, а с учетом выражений (3.20), (3.21) для собственных векторов супероператора (9.9) получаем:

$$\lambda_0 = 0, \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \langle 0| = \left(1, \, -\frac{w}{\gamma}\,\langle\lambda_3|\right),$$

$$\lambda_3 = -\gamma, \qquad |3\rangle = \begin{pmatrix} w/\gamma \\ |\lambda_3\rangle \end{pmatrix}, \qquad \langle 3| = (1, \, \langle\lambda_3|), \tag{9.12}$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \mp i\Lambda, \qquad |1,2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ |\lambda_{1,2}\rangle \end{pmatrix}, \qquad \langle 1,2| = (0, \, \langle\lambda_{1,2}|) \, .$$

Релаксационный супероператор можно записать в виде спектрального разложения

$$\mathcal{L}_{\rm r} = -w \, |0\rangle \, \langle 3| - \gamma \, |3\rangle \, \langle 3| - (\Gamma + i\Lambda) \, |1\rangle \, \langle 1| - (\Gamma - i\Lambda) \, |2\rangle \, \langle 2| \, . \tag{9.13}$$

[1] Это представление возникает после выполнения усреднения по s в соотношении (9.23).

В базисе вещественных векторов $|0\rangle$, $|3\rangle$, $(|1\rangle \pm |2\rangle)/\sqrt{2}$ он имеет матричный вид

$$L_{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma & \Lambda \\ 0 & 0 & -\Lambda & -\Gamma \end{pmatrix}. \tag{9.14}$$

Это представление релаксационного супероператора универсально для описания марковских двухуровневых систем [36].

9.2 Зависимость релаксационного супероператора от спектральной плотности шумов

Рассмотрим гауссовскую модель шумов $\hat{\xi}(t)$ в ДА, которая адекватно описывает реальный шум в марковской ОС с динамикой диффузионного типа. Самый общий вид таких шумов может быть задан выражением

$$\hat{\xi}_k(t) = \sum_{\nu} \chi_{\nu}^{(k)} \left[\hat{a}_{\nu}^{(k)} \mathrm{e}^{-i\omega_\nu t} + \hat{a}_{\nu}^{+(k)} \mathrm{e}^{i\omega_\nu t} \right], \tag{9.15}$$

где $\chi_{\nu}^{(k)}$ — константы взаимодействия ДА с ν-ой модой k-ой компоненты шумовых переменных резервуара, $\hat{a}_{\nu}^{(k)}, \hat{a}_{\nu}^{+(k)}$ — операторы уничтожения и порождения квантов, описываемые каноническими коммутационными соотношениями

$$\hat{a}_{\nu}^{(k)} \hat{a}_{\mu}^{+(n)} - \hat{a}_{\mu}^{+(n)} \hat{a}_{\nu}^{(k)} = \delta_{kn} \delta_{\mu\nu} \,. \tag{9.16}$$

При достаточно плотных на частотной оси последовательностях ω_ν и плавно изменяющихся $\chi_{\nu}^{(k)}$ данное представление описывает и шумы с непрерывным спектром частот. Пары операторов $\hat{a}_{\nu}^{(k)}, \hat{a}_{\nu}^{+(k)}$ в типичных случаях являются операторами статистически независимых нормальных осцилляторов многомерной линейной системы. Состояние такой системы обычно предполагается термодинамически равновесным. В этом случае состояние каждого из осцилляторов характеризуется гауссовской матрицей плотности. Последняя задается одним параметром — средним числом квантов, рассчитываемым по формуле Планка:

$$n_{\nu}^{(k)} = \left\langle \hat{a}_{\nu}^{+(k)} \hat{a}_{\nu}^{(k)} \right\rangle = [\exp(\hbar\omega_\nu / kT) - 1]^{-1}. \tag{9.17}$$

Рассчитаем для процесса (9.15) корреляционную матрицу (9.5) и соответствующие ей симметризованный коррелятор и коммутатор. Корреляционная матрица в данной модели диагональна и имеет вид

$$\mathcal{K}_k(\tau) = \sum_{\nu} \chi_{\nu}^{(k)2} \left[\left(n_{\nu}^{(k)} + 1 \right) \mathrm{e}^{i\omega_\nu \tau} + n_{\nu}^{(k)} \mathrm{e}^{-i\omega_\nu \tau} \right]. \tag{9.18}$$

Здесь 1 в первом слагаемом описывает коммутатор (9.16).

Удобно представить корреляционную матрицу (9.5) в виде суммы эрмитовой части — коррелятора K, и антиэрмитовой — коммутатора C:

$$\mathcal{K}_\xi = K + \frac{1}{2}C\,,$$

$$K = \frac{1}{2}(\mathcal{K}_\xi + \mathcal{K}_\xi^+),\;\; C = \mathcal{K}_\xi - \mathcal{K}_\xi^+\,. \tag{9.19}$$

При этом в Фурье-представлении K и C имеют следующую структуру:

$$K_k(\tau) = \int_0^\infty d\omega \left(\mathrm{e}^{-i\omega\tau} + \mathrm{e}^{i\omega\tau}\right)\tilde{K}_k(\omega)\,,$$

$$\frac{1}{2}C_k(\tau) = -\int_0^\infty d\omega \left(\mathrm{e}^{-i\omega\tau} - \mathrm{e}^{i\omega\tau}\right)\frac{1}{2}\tilde{C}_k(\omega) \tag{9.20}$$

с положительно определенными плотностями $\tilde{K}_k(\omega), \tilde{C}_k(\omega)/2$. Симметризованные корреляторы $K_k(\tau)$ и коммутаторы $C_k(\tau)$ получаются из (9.18) с помощью представления

$$n_\nu^{(k)} + 1 \longrightarrow \left(n_\nu^{(k)} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,, \qquad n_\nu^{(k)} \longrightarrow \left(n_\nu^{(k)} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\,,$$

которое выделяет в (9.18) симметричную и антисимметричную по τ составляющие. Соответственно, это приводит к представлению $K_k(\tau)$ и $C_k(\tau)$ в виде (9.20) с

$$\tilde{K}_k(\omega) = \frac{dN^{(k)}}{d\omega}\chi^{(k)2}(\omega) \times \left(n^{(k)} + \frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2}\tilde{C}_k(\omega) = \frac{dN^{(k)}}{d\omega}\chi^{(k)2}(\omega) \times \frac{1}{2}\,. \tag{9.21}$$

Здесь $dN^{(k)}/d\omega$ описывает спектральную плотность числа осцилляторов, а $\chi^{(k)2}(\omega)$ — частотную зависимость констант взаимодействия.

Коммутаторы $\tilde{C}_k(\omega)$ не зависят от квантового состояния описываемых им осцилляторов и просто пропорциональны плотности $dN^{(k)}/d\omega$ этих осцилляторов в окрестности частоты ω. В то же время коррелятор определяется квантовым состоянием резервуара и для температурного равновесия содержит соответствующий фактор $\mathrm{cth}(\hbar\omega/2kT)$:

$$\tilde{K}_k(\omega) \sim n^{(k)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{cth}(\hbar\omega/2kT)\;. \tag{9.22}$$

Соотношение $\tilde{K}_k(\omega)/\tilde{C}_k(\omega) = (1/2)\mathrm{cth}(\hbar\omega/2kT)$ отвечает соотношению

$$\langle \hat{a}_k \hat{a}_k^+\rangle / \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k\rangle = \exp(\hbar\omega/kT)\,,$$

которое выражает одновременно и больцмановское соотношение вероятностей для соседних энергетических уровней гармонического осциллятора, отличающихся по величине энергии на величину кванта. Из него непосредственно следует формула Планка для среднего числа квантов $\langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle$.

Приведенные соотношения показывают, что квантовый характер шума, отображаемый ненулевым значением коммутатора, одновременно учитывает, помимо динамического характера взаимодействия, т. е. возможности обратного влияния ДА на себя посредством шума (см. п. 7.3 *Главы 7*), также и ненулевую величину кванта $\hbar\omega$ и, соответственно, асимметрию процессов поглощения и испускания, отображаемых в выражении (9.18), членами $n_k = \langle \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \rangle$, $n_k + 1 = \langle \hat{a}_k \hat{a}_k^+ \rangle$ соответственно.

9.2.1 Случай одночастотной прецессии

Преобразуем теперь выражение (9.4) для матрицы Q, подставив выражение для корреляционной матрицы стационарного шума в форме $\mathcal{K}(\tau_1, \tau_2) = \mathcal{K}(\tau)$, $\tau = \tau_2 - \tau_1$ и выполнив замену переменных: $\tau_1, \tau_2 \to \tau, s$, где $s = (\tau_1 + \tau_2)/2$. При этом соответствующая новая система координат также ортогональна, а для якобиана этого преобразования имеем $\partial(\tau_1, \tau_2)/\partial(\tau, s) = 1$. Область интегрирования представлена на рис. 9.2.

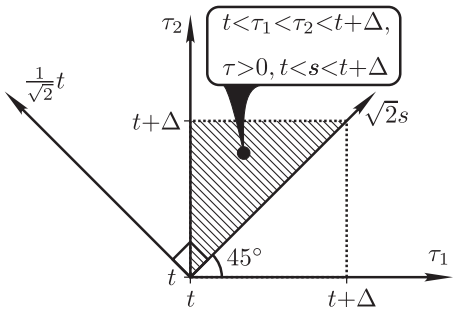

Рис. 9.2 Область интегрирования корреляционной функции в соотношении (9.4) в терминах переменных τ_1, τ_2 и s, τ.

В этих переменных выражение (9.4) с учетом локализованности функции $\mathcal{K}(\tau)$ в узкой по сравнению с областью интегрирования области $\tau \sim \tau_c$ принимает вид

$$Q = \int_0^\infty d\tau \left\langle S_\sigma(s + \tau/2) \mathcal{K}_\xi(\tau) S_\sigma^{\mathrm{T}}(s - \tau/2) \right\rangle_s , \tag{9.23}$$

где $\langle \rangle_s$ обозначает усреднение по s в интервале Δ, предполагающее, что включенные в $S_\sigma(t)$ динамические осцилляции происходят на масштабе

времен $\tau_{\rm o}$, существенно меньших времени релаксации, так что можно выбрать Δ таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\tau_{\rm o} \ll \Delta \ll \tau_{\rm r}\,. \tag{9.24}$$

Предположим, что временная динамика имеет вид осцилляций на одной частоте вида (4.23) с независящей от времени трехмерной матрицей поворотов вида

$$L_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & -\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.25}$$

Соответствующая временная зависимость $S_\sigma(t) = \exp(L_\sigma t)$ задается согласно спектральному представлению (4.25) выражением

$$S_\sigma(t) = \sum_{k=1}^{3} \exp(i\nu_k t)\, |\nu_k\rangle\, \langle\nu_k|, \tag{9.26}$$

где

$$\nu_3 = 0, \quad \nu_{1,2} = \pm\omega_0, \quad \omega_0 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^{1/2}\,.$$

Подставляя это разложение в выражение (9.23) и выполняя усреднение по s, с учетом обнуления комбинаций разночастотных сомножителей получаем выражение вида (9.8) с собственными векторами $|\lambda_k\rangle = |\nu_k\rangle$ и собственными значениями

$$\lambda_k = \langle\nu_k|\, \tilde{S}(\nu_k)\, |\nu_k\rangle, \tag{9.27}$$

где

$$\nu_3 = 0, \quad \nu_{1,2} = \pm\omega_0 \quad - \tag{9.28}$$

собственные частоты осцилляций, а

$$\tilde{S}(\nu) = \int\limits_0^\infty d\tau\, \mathcal{K}_\xi(\tau) \exp(i\nu\tau) - \tag{9.29}$$

матричная односторонняя спектральная плотность шума. Таким образом, релаксационный оператор определяется значениями односторонней спектральной плотности шума на частотах (9.28). При этом спектральные плотности для положительных и отрицательных частот различны, что связано с учетом ненулевой энергии кванта и соответствующей асимметрией процесса поглощения–испускания. В частности, при $T = 0$ реальная часть спектральной плотности (9.29) на положительных частотах равна нулю. Именно это обстоятельство определяет ненулевое значение параметра w, определяемого первым из соотношений (9.11), поскольку с учетом выражений (9.27)

$$\mathcal{R}\mathrm{e}\,(\lambda_1 - \lambda_2) \sim \mathcal{R}\mathrm{e}\,\tilde{S}(-\omega_0) - \mathcal{R}\mathrm{e}\,\tilde{S}(\omega_0) = \pi\tilde{C}(\omega_0)\,.$$

Из теории излучения ДА, рассматриваемой в *Главе 10*, следует, что, с учетом выражения (9.11) для релаксационных параметров, этот факт отражает преобладание испускания над поглощением на температурно независимую величину, описывающую спонтанное испускание кванта $\hbar\omega_0$, которое приводит к установлению температурного равновесия с резервуаром. При классическом описании шумов $w = 0$, и поэтому из формул (9.12) для собственных векторов следует, что равновесным в этом случае будет состояние $\langle 0| = (1,\, 0)$, соответствующее матрице плотности $\hat{\rho} = \hat{I}/2$ с нулевой разностью населенностей, т. е. с бесконечной температурой T. В соответствии с общим выражением

$$\langle 0| = \left(1,\, -\frac{w}{\gamma}\,\langle\lambda_3|\right) \to \frac{1}{2}(\hat{I} - \frac{w}{\gamma}\,\langle\lambda_3|\,\hat{\boldsymbol{\sigma}})$$

безразмерный параметр w/γ определяет распределение населенности между состояниями $(\hat{I} \pm \langle\lambda_3|\,\hat{\boldsymbol{\sigma}})/2$, одно из которых соответствует положительной температуре $T = +0,\, 1/T = +\infty$, а другое — отрицательной температуре $T = -0,\, 1/T = -\infty$. В частном случае значений $\omega_1 = \omega_2 = 0,\, \omega_3 = \omega_{12}$ в выражении (9.25) для матрицы прецессии, которая в этом случае описывает свободную прецессию изолированного атома, указанные состояния соответствуют верхнему уровню $(\pm = +)$ и нижнему $(\pm = -)$ атома. По этой причине параметр w называется *параметром накачки*. Из условия сохранения положительности супероператора следует ограничение области изменения параметра накачки

$$|w| \le \gamma\,.$$

В определенных условиях он может быть отрицателен и, соответственно, определять равновесные состояния с отрицательной температурой, т. е. состояния с *инверсной населенностью*. Параметры γ, Γ называются, соответственно, скоростью *продольного* и *поперечного* затухания. Продольное затухание описывает релаксацию неосциллирующих переменных, соответствующих линейным комбинациям векторов $|0\rangle$, $|3\rangle$, а поперечное — релаксацию осциллирующих переменных с частотами $\pm\omega_0$, описываемых линейными комбинациями векторов $|1, 2\rangle$. Для свободного атома продольное затухание описывает релаксацию населенностей, а поперечное — затухание поляризации. Наконец, последний параметр Λ, входящий в выражение (9.14), описывает *частотное смещение*, которое связано с реакцией резервуара на возмущение атомом.

9.2.2 Случай двухчастотной прецессии

Предположим теперь, что временная динамика имеет вид осцилляций на одновременно на двух частотах и описывается суперпозицией двух временных преобразований вида (4.23)

$$S_\sigma(t) = \exp(L_\Omega t)\exp(L_0 t) \tag{9.30}$$

с независящими от времени трехмерными матрицами поворотов:

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & -\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.31}$$

Применяя для представления этого преобразования дважды разложение (9.26), предполагая, что частоты ω_0 и Ω имеют различный порядок, так что их комбинация $\omega_0 - \Omega$ не мала, после повторения примерно тех же выкладок, из которых следует представление матрицы Q в форме (9.8), нетрудно получить соответствующее обобщение результата (9.27):

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{3} |\,\langle \delta_k\,|\nu_i\rangle\,|^2\,\langle \nu_i|\,\tilde{S}(\delta_k+\nu_i)\,|\nu_i\rangle, \tag{9.32}$$

где δ_k обозначает соответствующие собственные числа оператора прецессии L_Ω: $\delta_3 = 0$, $\delta_{1,2} = \pm\Omega$, где $\Omega = (\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2)^{1/2}$. Частота Ω здесь условно может быть названа частотой нутаций, в то время как ω_0 частотой прецессии. Таким образом, при двухчастотной динамике ДА релаксационный супероператор выражается через односторонние спектральные плотности шумов на всех возможных комбинациях частот прецессии и нутации:

$$\omega = 0,\ 0 \pm \Omega,\ \pm\omega_0,\ \omega_0 \pm \Omega,\ -\omega_0 \pm \Omega. \tag{9.33}$$

9.3 Релаксация свободного двухуровневого атома

Для свободного атома источником шумов является свободное поле электромагнитного вакуума, которое в квантовой теории не равно нулю даже в отсутствие источников вследствие ненулевых коммутаторов поля и, соответственно, наличия вакуумных флуктуаций. Гамильтониан взаимодействия электромагнитного поля и атома имеет вид $-\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{E}}_0$, где $\hat{\mathbf{d}}$ описывает оператор дипольного момента атома, а $\hat{\mathbf{E}}_0$ — оператор вакуумного электромагнитного поля. С учетом нелокальности распределения заряда в атоме это выражение следует записывать в виде пространственного интеграла, который для двухуровневого атома (ДА) имеет вид:

$$\hat{\mathcal{H}}_\xi = \int \mathbf{d}_{12}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}\cdot\hat{\sigma}_1(t)\ . \tag{9.34}$$

Здесь $\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r},t)$ — зависящий от времени оператор напряженности вакуумного электромагнитного поля в точке $\mathbf{r}$; $\hat{\sigma}_1(t)$ – оператор комплексной амплитуды квантового дипольного момента атома; $\mathbf{d}_{12}(\mathbf{r})$ – плотность матричного элемента дипольного момента, определяемая формулой

$$\mathbf{d}_{12}(\mathbf{r}) = \sum e_k(\psi_2, \mathbf{r}\delta(\hat{\mathbf{r}}_k - \mathbf{r})\psi_1)\ , \tag{9.35}$$

где $e_k, \hat{\mathbf{r}}_k$ — заряды и операторы координат атомных частиц, ψ_1, ψ_2 — волновые функции атома.

Сравнивая выражения (9.1) и (9.34) для гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_\xi$, получаем конкретный вид шумов $\hat{\boldsymbol{\xi}} = (\hat{\xi}, 0, 0)$, где

$$\hat{\xi}(t) = -\frac{2}{\hbar}\int \mathbf{d}_{12}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r},t)d\mathbf{r} \tag{9.36}$$

в представлении взаимодействия с учетом невозмущенной динамики переменных резервуара. Это выражение описывает оператор случайной силы, действующей со стороны электрического поля вакуума на обобщенную координату атома, описываемую матрицей $\hat{\sigma}_1(t)$. Для выполнения конкретных расчетов в (9.36) удобно использовать каноническое Фурье-представление операторов электромагнитного поля [20] в виде:

$$\hat{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r},t) = i\int\sqrt{\frac{\hbar\omega}{4\pi^2}}\sum_{\lambda=1,2}\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})\left[\hat{a}_\lambda(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-i\omega t+i\mathbf{kr}} - \hat{a}^+_\lambda(\mathbf{k})\mathrm{e}^{i\omega t-i\mathbf{kr}}\right]d\mathbf{k}\ . \tag{9.37}$$

Здесь $\mathbf{k}$ – волновой вектор полевого осциллятора, $\omega = ck$ — соответствующая частота; $\mathbf{e}_\lambda$ — векторы поляризации волны, ортогональные к $\mathbf{k}$; $\hat{a}_\lambda(\mathbf{k})$ – операторы уничтожения квантов, используемые здесь в континуальном представлении, в котором они размерны[2] в соответствии с коммутационными соотношениями

$$\hat{a}_\lambda(\mathbf{k})\hat{a}^+_\lambda(\mathbf{k}') - \hat{a}^+_\lambda(\mathbf{k}')\hat{a}_\lambda(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\ . \tag{9.38}$$

Соответственно, для расчета корреляционной функции следует исходить из формулы

$$\langle\hat{a}^+_\lambda(\mathbf{k})\hat{a}_\lambda(\mathbf{k}')\rangle = n_\lambda(\omega)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\ , \tag{9.39}$$

где $n_\lambda(\omega)$ есть среднее число квантов для осцилляторов с частотой ω. Для теплового равновесия оно задается формулой Планка

[2] Это означает, что они описывают операторы порождения-уничтожения отдельного осциллятора с множителем, равным квадратному корню из плотности числа осцилляторов в $\mathbf{k}$-пространстве

$$n_\lambda(\omega) = \left(\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT} - 1\right)^{-1} . \tag{9.40}$$

При $T = 0$ из соотношения (9.21) следует равенство $\tilde{K} = |\tilde{C}|/2$. Это означает, что флуктуации являются вакуумными и имеют чисто квантовое происхождение. При рассмотрении релаксации ДА в оптическом диапазоне это приближение справедливо для температур вплоть до $\sim 10^4 K$. Соответствующий формулам (9.36), (9.37) вид спектральной плотности $\tilde{C}(\omega)$ для ДА представлен на рис. 9.3.

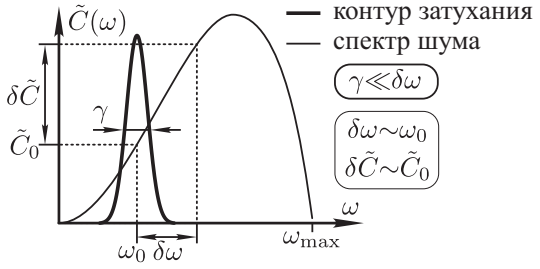

Рис. 9.3 Спектральная плотность вакуумного шума, действующего на ДА.

В области низких частот зависимость имеет вид $\sim \omega^3$ в соответствии с плотностью числа полевых осцилляторов $\sim \omega^2$, определяющей также и частотную зависимость в известной формуле Релея–Джинса. Эта зависимость сохраняется до диапазона высоких частот $\omega_{\max} \sim 10^{18}$ с$^{-1}$, начиная с которых начинается спадание до нуля, обусловленное распределенностью дипольного момента, что приводит к обрезанию высших частот, превосходящих обратное время пробега световой волны через атом. Область частот, существенных для взаимодействия с атомом, лежит в окрестности его резонансной частоты $\omega_0 = \omega_{12}$, показанной на рис. 9.3. В этой области ширина участка постоянства спектральной плотности шума оценивается по порядку величины самой величиной ω_{12}, а ее обратное значение и есть эффективное время корреляции радиационного шума в ДА:

$$\tau_{\mathrm{c}} \sim \omega_{12}^{-1} . \tag{9.41}$$

Очевидно, что эта величина существенно больше обратной ширины всей кривой, которая не имеет значения для процессов релаксации, протекающих на существенно больших масштабах времен $\tau_{\mathrm{r}} = \gamma^{-1}$, где

$$\gamma \ll \omega_{12} . \tag{9.42}$$

Последнее соотношение и есть условие марковости для процессов радиационного затухания свободного ДА [17], проверка которого может быть выполнена после расчета релаксационного оператора.

Супероператор временной динамики свободного ДА определяется собственным гамильтонианом $\hbar\omega_{12}\hat{\sigma}_3$, которому соответствует лиувиллиан

(9.25) и спектральное представление супероператора собственной динамики в форме (4.25) с частотами $\omega_{1,2} = 0$, $\omega_3 = \omega_{12}$, $\omega_0 = \omega_{12}$ и собственными векторами

$$|\nu_3\rangle = |\hat{\sigma}_3\rangle, \quad |\nu_{1,2}\rangle = (|\hat{\sigma}_1\rangle \pm i\,|\hat{\sigma}_2\rangle)/\sqrt{2}. \tag{9.43}$$

В соответствии с видом гамильтониана взаимодействия (9.34) вакуумный шум имеет всего одну составляющую $\hat{\xi}_1$, а соответствующая корреляционная матрица (7.4) имеет вид

$$\mathcal{K}_\xi(\tau) = \mathcal{K}_1(\tau)\,|\hat{\sigma}_1\rangle\,\langle\hat{\sigma}_1|\,. \tag{9.44}$$

Из выражения (9.27) получаются следующие значения для параметров λ_k, определяющих, в свою очередь, в соотношении (9.11) параметры релаксационного оператора (9.13), (9.14):

$$\lambda_k = \langle\nu_k|\,|\hat{\sigma}_1\rangle\,\langle\hat{\sigma}_1|\,|\nu_k\rangle\,\tilde{S}(\nu_k)\,,$$

где в соответствии с определением односторонней спектральной плотности (9.29) в данном случае

$$\tilde{S}(\nu) = \int\limits_0^\infty d\tau\,\mathcal{K}_1(\tau)\exp(i\nu\tau)\,. \tag{9.45}$$

После учета конкретного вида (9.43) собственных векторов оператора прецессии получаем

$$\lambda_3 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\tilde{S}(\pm\omega_{12}). \tag{9.46}$$

Параметры результирующей релаксационной матрицы (9.14), принимающей в данном случае форму

$$L_{\text{r}} = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma/2 & \Lambda \\ 0 & 0 & -\Lambda & -\gamma/2 \end{pmatrix}, \tag{9.47}$$

с учетом представления корреляционной матрицы соотношениями (9.19), (9.20) имеют вид:

$$w = \frac{\tilde{C}(\omega_{12})}{2},\ \gamma = \frac{\tilde{C}(\omega_{12})}{2}\text{cth}\left(\frac{\hbar\omega_{12}}{kT}\right),\ \Lambda = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int\limits_0^\infty \frac{\tilde{C}(\omega)}{2}\frac{d\omega}{\omega - \omega_{12}}\,. \tag{9.48}$$

Здесь символ $\mathcal{P}$ обозначает интегрирование в главном смысле. При этом на основе выражений (9.36) – (9.38) в дипольном приближении, когда

интегрирование по координатной зависимости плотности дипольного момента $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ при расчете его преобразования Фурье дает интегральный дипольный момент перехода $\mathbf{d}_{12}$, получаем

$$\frac{1}{2}\tilde{C}(\omega_{12}) = \frac{4}{3}\frac{d_{12}^2\omega_{12}^3}{\hbar c^3}\,.$$

Это и есть хорошо известное выражение для *скорости радиационного распада* γ двухуровневого атома.

При $T = 0$ из (9.48) получаем $w = \gamma$, что определяет в качестве равновесного состояния нижний энергетический уровень. Параметр Λ в данном случае описывает радиационный *лэмбовский сдвиг* ДА. Он аналогичен хорошо известному в теории колебаний частотному смещению гармонического осциллятора, взаимодействующего с одним или набором осцилляторов. В расчетах конкретных эффектов можно его считать априори включенным в частоту атомного перехода ω_{12}. Параметр $\gamma/2$ есть минимальное значение скорости поперечного затухания свободного ДА, совместимая с его затуханием со скоростью γ к нижнему энергетическому состоянию при учете условия положительности преобразования.

Смысл полученного оператора очевиден после применения матрицы $L_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}$ к матрице плотности $\langle\hat{\rho}| = (1, w_3, w_1, w_2)$. Параметры Λ описывают осцилляции недиагонального элемента матрицы плотности ρ_{12} (и, соответственно, дипольного момента), описываемого векторными элементами w_1, w_2. Они дают просто сдвиг исходной частоты резонанса ω_{12}, обусловленный взаимодействием с вакуумным электромагнитным полем — это основная составляющая так называемого лэмбовского сдвига атомной частоты [6]. Параметры $\gamma/2$ описывают затухание недиагонального элемента (дипольного момента). Верхняя левая угловая 2×2-подматрица

$$L_{\|} = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \tag{9.49}$$

в (9.47) описывает релаксацию диагональных элементов, то-есть населенностей уровней. Применяя $L_{\|}$ к кет-вектору $|\hat{n}(t)\rangle$ с компонентами $n_0(t)$, $n_3(t)$, 0, 0, который описывает оператор разности населенностей уровней $n_2 - n_1$ в момент времени t, получаем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}n_0 = -wn_3, \qquad \frac{d}{dt}n_3 = -\gamma n_0\,.$$

Решая его и возвращаясь к операторам, получаем временную зависимость оператора разности населенностей

$$\hat{n}(t) = \exp(-\gamma t)\hat{\sigma}_3 - \frac{w}{\gamma}\left[1 - \exp(-\gamma t)\right]\hat{I}. \tag{9.50}$$

Его начальное значение, в соответствии с определением, есть $\hat{\sigma}_3$, а конечное описывается единичным оператором с сомножителем $-w/\gamma$, определяющим стационарную разность населенностей.

Стационарная разность населенностей описывается собственным вектором $\langle\hat{\rho}_{\rm st}| = (1, w_3, 0, 0)$ матрицы (9.47), соответствующим нулевому собственному значению. Соответствующие населенности уровней описываются соотношениями

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{w}{\gamma}\right), \qquad \bar{n}_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{w}{\gamma}\right), \tag{9.51}$$

которое, как легко убедиться в соответствии с выражениями (9.48) для параметров, соответствует больцмановскому отношению вероятностей

$$\bar{n}_2/\bar{n}_1 = \exp(-\hbar\omega_{12}/kT),$$

что аналогично случаю гармонического осциллятора. Оно дает нулевую населенность $\bar{n}_2$ при нулевой температуре и $\bar{n}_2 = 1/2$ при температуре, стремящейся к бесконечности, и совпадает с формулой распределения Ферми с химическим потенциалом $\mu = 0$:

$$\bar{n}_1 = \left[\exp\left(\frac{-\hbar\omega_{12}}{kT}\right) + 1\right]^{-1}, \qquad \bar{n}_2 = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_{12}}{kT}\right) + 1\right]^{-1}.$$

Здесь энергия фермиевской частицы считается равной $-\hbar\omega_{12}$ в состоянии 1 и $\hbar\omega_{12}$ в состоянии 2. Это распределение отличается от стандартного распределения Ферми $\{\exp[(\varepsilon_k - \mu)/kT] + 1\}^{-1}$ для электрона, заполняющего атомные состояния 1, 2, у которых разность энергий $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ равна $\hbar\omega_{12}$ и, соответственно, сами значения энергий равны $\pm\hbar\omega_{12}/2$ и $\mu = 0$. Это расхождение означает, что релаксационные процессы, ответственные за установление распределения Ферми для электронных систем, рассматриваемых в статистической физике, качественно отличаются от радиационного затухания в ДА. Для них резонансные процессы с большими частотами перехода не учитываются, что вполне оправдано в представляющем интерес диапазоне значений параметра $\hbar\omega_{12}/kT$. [3]

9.4 Супероператор фазовой релаксации

Наряду с радиационным затуханием для релаксации ДА в оптике во многих случаях существенны механизмы, приводящие к случайной модуляции частоты атомного перехода ω_{12} в соответствии с преобразованием

[3] Аналогия ДА и Ферми-систем может быть прослежена более подробно с учетом алгебраической связи операторов атомных переходов с операторами порождения–уничтожения Ферми-частиц [20].

невозмущенного гамильтониана атома

$$\frac{\hbar}{2}\omega_{12}\hat{\sigma}_3 \to \frac{\hbar}{2}(\omega_{12}+\hat{\xi}_{\rm ph})\hat{\sigma}_3\,,$$

где $\hat{\xi}_{\rm ph}$ обозначает операторную переменную резервуара, описывающую флуктуации частоты ДА и определяемую соответствующим механизмом дефазировки. В шумовом гамильтониане (9.1) дефазировка этого типа представлена компонентой $\hat{\xi}_3 = \hat{\xi}_{\rm ph}$ вектора шумов $\hat{\boldsymbol{\xi}}$. Когда этот шум является единственным, гамильтониан взаимодействия (9.1) имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_\xi = \frac{\hbar}{2}\hat{\xi}_3\hat{\sigma}_3. \tag{9.52}$$

Механизм релаксации такого типа реализуется, например, *(а)* в примесных ДА (или молекулах) в твердых телах за счет взаимодействия с фононными колебаниями; *(б)* в атомах газа, испытывающих столкновения с другими атомами. В первом случае процесс в ДА носит диффузионный характер, в то время как в последнем случае он имеет скачкообразную природу. В зависимости от конкретных параметров реального шума процесс в ДА может быть как марковским, так и немарковским, и описываться моделью диффузионный или ступенчатого процесса.

9.4.1 Марковская упругая дефазировка

Рассчитаем сначала марковский супероператор $\mathcal{L}_{\rm ph}$, исходя из общей формулы (9.3) для процессов диффузионного типа. В случае столкновительного уширения в газах в этом приближении может рассматриваться только вклад, обусловленный дальними столкновениями, приводящими к малому сбою фазы $\Delta\varphi \ll 1$. В диффузионном приближении в (9.5) следует положить

$$\mathcal{K}_\xi(t) = \mathcal{K}_{\rm ph}(t)e_{\rm ph}\,, \tag{9.53}$$

где $\mathcal{K}_{\rm ph}(t) = \langle\hat{\xi}_{\rm ph}(0)\hat{\xi}_{\rm ph}(t)\rangle = \mathcal{K}^*_{\rm ph}(-t)$ — скалярная корреляционная функция; $e_{\rm ph}$ — 3×3-матрица с единственным ненулевым элементом $(e_{\rm ph})_{33} = 1$. При этом в (9.4) в качестве $S_\sigma(t)$ можно подставить просто 1, входящую в качестве матричного элемента в (9.26) и отображающую тот простой факт, что в представлении взаимодействия для невозмущенного движения в виде свободной прецессии матрица $\hat{\sigma}_3$ не зависит от времени. Соответственно, из (9.4) получаем матрицу Q в виде

$$Q = \tilde{S}_{\rm ph}(0)e_{\rm ph}\,,$$

где

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\rm ph}(\omega) = \int_0^\infty K_{\rm ph}(t)\mathrm{e}^{i\omega t}dt \;\; -$$

спектральная плотность фазовых флуктуаций. С использованием приведенного выражения для матрицы Q из (9.3) получаем символическое представление лиувиллиана, описывающего чисто фазовую релаксацию:

$$\mathcal{L}_{\rm ph} = -\Gamma_{\rm ph}\mathcal{J}_3\,, \tag{9.54}$$

где

$$\Gamma_{\rm ph} = \mathcal{R}e\tilde{S}_{\rm ph}(0) \quad - \tag{9.55}$$

скорость упругой дефазировки,

$$\mathcal{J}_3 = \frac{1}{2}(1 - \hat{\sigma}_3 \odot \hat{\sigma}_3) \quad - \tag{9.56}$$

безразмерный супероператор, единичный по недиагональным матрицам Паули $\hat{\sigma}_{1,2}$ и нулевой по $\hat{\sigma}_3$:

$$\mathcal{J}_3\hat{\sigma}_{1,2} = \hat{\sigma}_{1,2}\,, \quad \mathcal{J}_3\hat{\sigma}_3 = 0. \tag{9.57}$$

В матричном представлении

$$\mathcal{L}_{\rm ph} = \begin{pmatrix} 0\,0 & 0 & 0 \\ 0\,0 & 0 & 0 \\ 0\,0 & -\Gamma_{\rm ph} & 0 \\ 0\,0 & 0 & -\Gamma_{\rm ph} \end{pmatrix}. \tag{9.58}$$

При этом супероператору $\mathcal{J}_3$ отвечает единичная матрица в двумерном подпространстве, соответствующем осциллирующим переменным $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$, т. е. $\mathcal{J}_3$ есть идемпотентный супероператор: $\mathcal{J}_3^2 = \mathcal{J}_3$. Супероператор $\mathcal{L}_{\rm ph}$ в обычных условиях аддитивно складывается с рассчитанным ранее супероператором $\mathcal{L}_{\rm r}$ радиационного затухания свободного атома. В последнем просто следует затухание недиагональных элементов описывать вместо параметра $\gamma/2$ параметром фазового ("поперечного") затухания

$$\Gamma = \gamma/2 + \Gamma_{\rm ph}. \tag{9.59}$$

Благодаря относительной простоте гамильтониана, описывающего упругую дефазировку, расчет соответствующего супероператора удается выполнить аналитически не только для процессов диффузионного типа, но и для скачкообразных процессов, когда диффузионное приближение (7.14) неприменимо. В этом случае следует исходить из самой общей марковской формулы (6.3) *Главы 6*, которая для импульсного шума представляется в виде усреднения и предельного перехода (7.12) (см. *Главу 7*). Здесь мы ограничимся случаем классического шума $\hat{\xi}_{\rm ph}(t)$, что соответствует пренебрежению динамическим характером взаимодействия и

исключает возможность учета самодействия ДА через посредство шумовой подсистемы. Для классического шума, подставляя в (7.12) гамильтониан взаимодействия (7.12), получаем

$$\tilde{S}(t,t+\Delta)=\langle\exp\left[\frac{i}{2}\int_t^{t+\Delta}\hat{\xi}_{\rm ph}(\tau)d\tau\mathcal{S}_3\right]\rangle\,, \tag{9.60}$$

где супероператор

$$\mathcal{S}_3=\frac{1}{2}[\hat{\sigma}_3,\odot] \tag{9.61}$$

связан с идемпотентным супероператором (9.56) соотношением $\mathcal{J}_3=\mathcal{S}_3^2$. Использование алгебраических соотношений такого рода для основных динамических супероператоров позволяет выполнять расчеты непосредственно на уровне символического представления, не прибегая к представлению матрицами.

Выделяя в мнимой экспоненте (9.60) четную и нечетную части и учитывая, что функция $\cos(x)-1$ содержит только четные степени разложения по x, начиная со второй, из (9.60) получаем после вычета 1, деления на Δ и перехода к пределу $\Delta\to 0$:

$$\mathcal{L}_{\rm ph}=-\Gamma_{\rm ph}\mathcal{J}_3+i\Lambda_{\rm ph}\mathcal{S}_3\,, \tag{9.62}$$

где

$$\Gamma_{\rm ph}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\langle 1-\cos\left[\int_t^{t+\Delta}\xi_{\rm ph}(\tau)d\tau\right]\rangle\ - \tag{9.63}$$

скорость дефазировки,

$$\Lambda_{\rm ph}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\langle\sin\left[\int_t^{t+\Delta}\xi_{\rm ph}(\tau)d\tau\right]\rangle\ - \tag{9.64}$$

частотное смещение. Для импульсного случайного процесса с плотность потока импульсов β ($\sec^{-1}$) и длительностью импульсов $\tau_{\rm p}\ll 1/\beta$ из этих выражений получаем

$$\Gamma_{\rm ph}=\beta(1-\langle\cos\varphi\rangle)\,,$$
$$\Lambda_{\rm ph}=\beta\langle\sin\varphi\rangle\,.$$

Здесь $\varphi=\int\xi_{\rm ph}(\tau)d\tau$ — случайный набег фазы при взаимодействии с одним импульсом, который в случае столкновительного уширения в газах соответствует одному столкновению. Таким образом, структура релаксационного супероператора для столкновительного уширения совпадает со структурой этого супероператора в диффузионном приближении, и отличие сводится к разным аналитическим выражениям для параметров.

9.4.2 Немарковская упругая дефазировка свободного ДА

Рассчитаем переходной супероператор, определенный соотношениями (5.5) *Главы 5*, без предположения о марковском характере процесса, но предполагая гауссовский характер дефазирующих флуктуаций. С учетом вида гамильтониана взаимодействия (9.52) и того, что для свободного атома оператор $\hat{\sigma}_3$ не зависит от времени, фигурирующий в выражениях (5.5) оператор временной эволюции имеет вид

$$U_\xi(t) = \mathrm{T}\exp\left[-\frac{i}{2}\int\limits_0^t \hat{\xi}_3(\tau)\hat{\sigma}_3 d\tau\right]. \tag{9.65}$$

Расчет данного хронологически упорядоченного выражения может быть выполнен с использованием формулы Бейкера-Хаусдорфа для операторов с числовым коммутатором C:

$$\exp(\hat{f})\exp(\hat{g}) = \exp(\hat{f}+\hat{g}+C/2).$$

С ее помощью, отождествляя операторы $\hat{f},\hat{g}$ с $-(i/2)\hat{\xi}_3(\tau_{1,2})\hat{\sigma}_3$, нетрудно привести хронологически упорядоченную экспоненту к виду экспоненты от интеграла:

$$U_\xi(t) = \exp\left[-\frac{i}{2}\int\limits_0^t \hat{\xi}_3(\tau)\hat{\sigma}_3 d\tau\right]\exp\left[-\frac{1}{8}\int_0^t d\tau_2\int_0^{\tau_2} d\tau_1\, C(\tau_2,\tau_1)\right],$$

где $C(\tau_2,\tau_1) = [\hat{\xi}_3(\tau_2),\hat{\xi}_3(\tau_1)]$ — коммутатор шумовых переменных, являющийся числовым в соответствии с предположением гауссовости шумов. Подставляя это выражение в определение переходного супероператора (5.5), после очевидного сокращения неоператорных сомножителей, получаем

$$\mathcal{S}(t) = \langle\exp\{-i\hat{\varphi}[\hat{\sigma}_3,\odot]\}\rangle_{\mathrm{R}},$$

где $\hat{\varphi} = \int_0^t \hat{\xi}_3(\tau)\,d\tau/2$ — набег флуктуаций фазы колебаний атомного перехода за время t. Присутствие в этом выражении одного не зависящего от времени супероператора не вносит в расчет никаких осложнений, и при выполнении усреднения с ним можно обращаться как с числовым множителем, так же как и с оператором фазы (алгебра функций одного оператора или набора коммутирующих операторов эквивалентна алгебре функций соответствующих числовых переменных). Поэтому, используя известное правило усреднения экспоненты от гауссовской случайной величины с нулевым средним значением $\langle\exp(\varphi)\rangle = \exp(\langle\varphi^2\rangle/2)$ и учитывая соотношение $[\hat{\sigma}_3,\odot]^2 = 4\mathcal{J}_3$, получаем

$$\mathcal{S}(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \int_0^t K(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2\, \mathcal{J}_3\right\}. \tag{9.66}$$

При этом для стационарного шума корреляционная матрица имеет вид функции разности аргументов $K(\tau_1,\tau_2) = K(\tau)$, $\tau = \tau_2 - \tau_1$.

При $t \gg \tau_{\rm c}$ нетрудно убедиться, что двойной интеграл в выражении пропорционален t и равен

$$t \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau)\, d\tau\,,$$

а переходной супероператор (9.66) имеет асимптотический вид

$$\mathcal{S}(t) = \exp\left(-\Gamma_{\rm ph}\mathcal{J}_3 t\right) = \mathcal{J}_{\rm n} \oplus {\rm e}^{-\Gamma_{\rm ph} t}\mathcal{J}_{\rm t}. \tag{9.67}$$

Здесь пара единичных супероператоров $\mathcal{J}_{\rm n,t}$ отвечает единичным преобразованиям в подпространстве диагональных и недиагональных 2×2-матриц. Данный результат совпадает с переходным супероператором $\exp(\mathcal{L}_{\rm r} t)$, соответствующим марковской теории п. 9.4, поскольку на больших временах затухание любого процесса с конечным временем корреляции шума имеет экспоненциальный характер. При этом затухание $\Gamma_{\rm ph}$ может быть представлено через максимум корреляционной функции $K(0)$ и ее эффективную ширину $\hat{\tau}_{\rm c}$ в виде произведения

$$\Gamma_{\rm ph} = K(0)\tau_{\rm c}. \tag{9.68}$$

Экспоненциальный закон для немарковского процесса справедлив лишь для

$$t \gg \tau_{\rm c}. \tag{9.69}$$

На малых временах $t \ll \tau_{\rm c}$ экспоненциальное затухание недиагональных матриц сменяется законом вида

$$\mathcal{S}_{\rm t}(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}K(0)t^2\right]. \tag{9.70}$$

Если среднее значение шума не равно нулю, то, помимо затухания, он порождает еще и детерминированные осцилляции с соответствующим дополнительным частотным сдвигом $\delta\omega$ относительно частоты ω_{12} невозмущенной прецессии. При малых $t \ll 1/\sqrt{K(0)}$ затухание становится пренебрежимым, в то время как осцилляции могут быть существенны, если $\delta\omega \geq \sqrt{K(0)}$. В то же время по марковской теории затухание определяется показателем $K(0)\tau_{\rm c}t$. При $t \ll \tau_{\rm c}$ предсказываемое марковской теорией затухание в $\tau_{\rm c}/t$ больше, чем истинный в формуле (9.70). Описанные закономерности в самом грубом приближении можно охарактеризовать как *(a)* “потеря стохастичности” на малых временах меньших времени

корреляции и *(б)* "насыщение затухания" при увеличении интенсивности шума, приводящем к переходу от марковского процесса к немарковскому. Последний эффект поясняется графиками, приведенными на рис. 9.4.

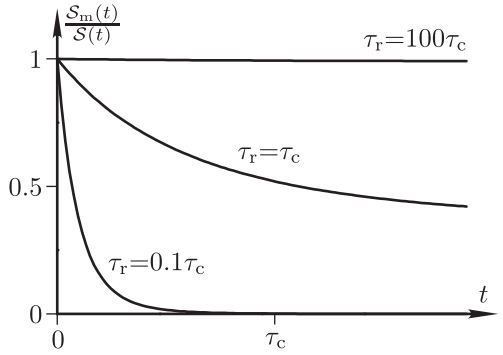

Рис. 9.4 Проявление немарковости в зависимости от времени отношения затухания $\mathcal{S}_{\rm m}(t)$, предсказанного марковским расчетом, к затуханию $\mathcal{S}(t)$, предсказываемому точной формулой, для случая экспоненциальной корреляционной функции шума $K(\tau)$ при различных значениях времени релаксации $\tau_{\rm r}$.

Для процессов с большими по сравнению со временем корреляции временами затухания точное значение затухания и марковское предсказание совпадают для всех времен. Для очень же интенсивной релаксации точное значение затухания на временах порядка времен корреляции существенно меньше марковского. При этом даже в немарковском случае, как это можно видеть из случая $\tau_{\rm r} = \tau_{\rm c}$, при больших временах t затухание, как это и было показано выше, носит экспоненциальный характер: приведенное на рис. 9.4 отношение стремится к константе, что означает совпадение скоростей марковского и немарковского затухания.

9.5 Связь с теорией квантового измерения

Рассмотрим стационарное состояние атома в условиях, когда действует только рассмотренный механизм упругой релаксации. Этот случай вполне физичен и соответствует реальному атому при наличии интенсивной упругой дефазировки, преобладающей по порядку величины над неупругим затуханием, $\Gamma \gg \gamma$. Тогда на временах $\Gamma^{-1} \ll t \ll \gamma^{-1}$ можно рассматривать квазиравновесные состояния, соответствующие $t \to \infty$ в супероператоре временной эволюции (9.67). В этой асимптотике получаем

$$\mathcal{S} = \mathcal{J}_{\rm n} = \frac{1}{2}(\hat{I} + \sigma_3 \odot \sigma_3)\,.$$

Соответственно, стационарное состояние атома отвечает полному затуханию поляризации и строгому сохранению переменных, связанных с населенностями $\hat{n}_1 = (\hat{I} - \hat{\sigma}_3)/2$, $\hat{n}_2 = (\hat{I} + \hat{\sigma}_3)/2$. Это преобразование состояния в точности соответствует тому, которое предполагается в постулате

квантового измерения, обсуждаемом в *Главе 15*, а именно, такому преобразованию, при котором чистые состояния с точно определенными населенностями неизменны, а конечное состояние есть смешанное состояние, составленное из состояний с точно определенными значениями населенностей, которые играют здесь роль измеряемых величин. Это смешанное состояние имеет вид:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_0 \mathcal{S} = \frac{1}{2}(\hat{I} + \sigma_3 \odot \sigma_3)\hat{\rho}_0 \,.$$

Разлагая $\hat{\rho}_0$ по собственным векторам операторов числа квантов, т. е. по собственным уровням свободного атома в виде

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_0 = \langle 1|\hat{\rho}_0|1\rangle \, |1\rangle \langle 1| + \langle 2|\hat{\rho}_0|2\rangle \, |2\rangle \langle 2| - \\ \langle 1|\hat{\rho}_0|2\rangle \, |1\rangle \langle 2| - \langle 2|\hat{\rho}_0|1\rangle \, |2\rangle \langle 1| \,,\end{aligned}$$

в результате получаем:

$$\hat{\rho} = \mathcal{P}(1) \, |1\rangle \langle 1| + \mathcal{P}(2) \, |2\rangle \langle 2| \,, \tag{9.71}$$

где $\mathcal{P}(k) = \langle k|\hat{\rho}_0|k\rangle$. В случае чистого начального состояния $\hat{\rho}_0 = |0\rangle \langle 0|$ имеем $\mathcal{P}(k) = |\langle k|0\rangle|^2$ в соответствии с интерпретацией Борна физического смысла квадрата модуля волновой функции.

Приведенный пример является лишь простейшей иллюстрацией процессов, моделирующих преобразование квантовомеханической редукции. Результаты *Главы 11* позволяют таким же образом рассмотреть и менее тривиальные процессы редукции, возникающие при воздействии сильного лазерного поля, когда роль измеряемой переменной играет не населенность, а переменная, соответствующая оператору вращающего момента лазерного поля $\boldsymbol{\Omega}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$.

Глава 10
Кинетика и флуоресценция двухуровневого атома

10.1 Общие соотношения для двухуровневого атома

Результаты *Главы 9* для релаксационного супероператора ДА в свободном пространстве, описываемые формулами (9.47), (9.48), и формулами (9.55), (9.58) для марковского супероператора упругой дефазировки, позволяют рассчитать временную динамику и спектр флуоресценции как свободного ДА, т. е. в отсутствие внешнего поля, так и ДА в лазерном поле. В данной главе рассматривается такой класс собственной динамики ДА, для которого справедливы указанные формулы для релаксационных параметров. В этих формулах, однако, не учтено то обстоятельство, что в самом общем случае релаксационные параметры, определяющиеся согласно выражениям (9.11), (9.27) и (9.32) спектральной матрицей шумов, могут зависеть от внешнего поля. В данной главе мы ограничимся рассмотрением такого класса собственной динамики ДА, для которого данной зависимостью можно пренебречь, а именно, случаем, когда релаксационный супероператор определяется лишь одночастотной собственной прецессией ДА на частоте перехода ω_{12}.

Выясним, при каких условиях результаты расчетов, приведенных в п. п. (9.3), (9.4.1), могут быть использованы и в условиях действия лазерного поля с напряженностью

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_{\mathrm{L}} \cos(\omega_{\mathrm{L}} t + \varphi). \tag{10.1}$$

В этом случае гамильтониан ДА помимо собственной энергии и взаимодействия с резервуаром содержит и гамильтониан взаимодействия с лазерным полем, которому соответствует лиувиллиан

$$\mathcal{L}_{\Omega} = i\Omega_0 \cos(\omega_{\mathrm{L}} t + \varphi) \left[\hat{\sigma}_1, \odot\right], \tag{10.2}$$

где

$$\Omega_0 = \frac{(\mathbf{E}_{\mathrm{L}}\mathbf{d}_{12})}{\hbar} -$$

частота Раби. В случае точного резонанса она описывает частоту индуцированных полем осцилляций населенностей уровней n_1, n_2. Это взаимодействие при расчете эволюционного супероператора может рассматриваться наряду с взаимодействием с шумами $\hat{\mathcal{H}}_\xi$ как малое на рассматриваемых временах $\Delta \gg \tau_{\mathrm{c}}$, если оно удовлетворяет условию

$$\Omega_0\tau_{\mathrm{c}} \ll 1. \tag{10.3}$$

В этом случае дополнительные изменения динамики, связанные с данным взаимодействием, учитываются в расчетах наблюдаемых эффектов путем добавления супероператора (10.2) к релаксационному. Последний же рассчитывается с учетом только одночастотной динамической прецессии с собственной частотой ДА. При этом поле может быть довольно сильным — *насыщающим*, так что выполнено соотношение

$$\Omega_0\tau_{\mathrm{r}} \geq 1, \tag{10.4}$$

которое является выражением условия наблюдаемости осцилляций населенностей на фоне затухания с характерным временем релаксации τ_{r}. Поле, для которого выполнено обратное соотношение, называется *слабым*. Поскольку на временах релаксации связанные с ним изменения динамики малы, они могут учитываться с использованием теории возмущений по лазерному полю. Этот метод позволяет выполнять расчеты и без использования методов теории ОС [39].

Для расчета излучения атома следует исходить из стандартной формулы классической электродинамики [40] для напряженности поля, излучаемого диполем, с соответствующей заменой классических динамических переменных квантовыми операторами:

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{c^2R}[[\ddot{\hat{\mathbf{d}}} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}], \tag{10.5}$$

где, соответственно, R обозначает расстояние до точки наблюдения, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления распространения поля. Выражая оператор дипольного момента через матричный элемент дипольного момента и матрицы Паули, для перехода с линейной поляризацией получаем $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{F}_{12}\hat{\tilde{\sigma}}_1$, где $\mathbf{F}_{12} = [[\mathbf{d}_{12}\times\mathbf{n}]\times\mathbf{n}]/c^2R$. При этом с учетом узкополосного характера осцилляций оператора $\hat{\sigma}_1$ можно заменить вторую производную на $-\omega_{12}^2$ и исходить из выражения для излучаемого поля в виде

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_{12}\hat{\sigma}_1, \tag{10.6}$$

$$\mathbf{E}_{12} = -\frac{\omega_{12}^2}{c^2R}[[\mathbf{d}_{12} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]. \tag{10.7}$$

Для расчета когерентного отклика системы атомов, когда складываются средние значения полей вида (10.6), достаточно рассчитать среднее значение этого оператора путем его усреднения с помощью одномоментного переходного супероператора $\mathcal{S}(t)$. При этом спонтанное излучение, являющееся случайным процессом, не будет учтено. По аналогии с ролью классических корреляционных функций в расчете спектрального распределения энергии случайных процессов [41], оно, очевидно, содержится в квадратичной корреляционной функции

$$\mathcal{K}(\tau) = \mathbf{E}_{12}\mathbf{E}_{12}^{\mathrm{T}} \langle \hat{\sigma}_1(t)\hat{\sigma}_1(t+\tau)\rangle,$$

где усреднение включает также сглаживание по самым быстрым осцилляциям операторов как функции момента времени t. Здесь, однако, для квантовой системы, для которой вследствие ненулевой величины энергии кванта $\hbar\omega_{12}$ процессы взаимодействия с другими системами характеризуются неравноправием поглощения и испускания, вопрос о том, какая именно информация извлекается прибором из корреляционной функции, требует специального рассмотрения путем анализа процесса поглощения квантов детекторами. Такой анализ был проделан Глаубером [23] и было показано, что в наблюдаемой корреляционной функции операторы порождения и уничтожения[1] квантов двухуровневой системы

$$\hat{\sigma}^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

описывающие, соответственно, переход с нижнего уровня на верхний и наоборот, должны быть *нормально* упорядочены. Это упорядочение отделяет процессы испускания от процессов поглощения. В результате наблюдаемые эффекты выражаются через нормально упорядоченную корреляционную функцию

$$\mathcal{K}(\tau) = \mathbf{E}_{12}\mathbf{E}_{12}^{\mathrm{T}} \left\langle \hat{\sigma}^-(t)\hat{\sigma}^+(t+\tau)\right\rangle. \tag{10.8}$$

Здесь зависимость $\hat{\sigma}^{\pm}(t)$ описывает случайный процесс, т. е. включает как собственную динамику, так и шумовые флуктуации. Это выражение определяет спектральное распределение как когерентной, так и спонтанно излучаемой атомом энергии, поскольку средний квадрат случайной величины есть сумма квадрата среднего значения и среднего квадрата флуктуационного отклонения от среднего. С использованием представления многомоментного усреднения для марковского процесса с помощью многовременной условной матрицы плотности (6.17), (6.21) оно может

[1] Оператор $\hat{\sigma}_1(t)$ выражается в виде осциллирующей во времени линейной комбинации матриц Паули $\hat{\sigma}_{1,2}$, а последние, в свою очередь, выражаются в виде линейной комбинации вводимых здесь матриц $\hat{\sigma}^-, \hat{\sigma}^+$. Здесь индексы $\pm$ соответствуют положительно и отрицательно частотным осцилляциям $\exp(\mp i\omega t)$ этих операторов в случае свободной прецессии и противоположны индексации матриц Паули $\hat{\sigma}_{\pm}$ [42].

быть записано в виде

$$\mathcal{K}(\tau) = \begin{cases} \mathbf{E}_{12}\mathbf{E}_{12}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{tr}\left[\hat{\rho}_0\mathcal{S}(t)\circledcirc\mathcal{S}(t,t+\tau)\{\hat{\sigma}_0^-(t)\otimes\hat{\sigma}_0^+(t+\tau)\}\right], & \tau>0; \\ \mathbf{E}_{12}\mathbf{E}_{12}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{tr}\left[\hat{\rho}_0\mathcal{S}(t+\tau)\circledcirc\mathcal{S}(t+\tau,t)\{\hat{\sigma}_0^-(t)\otimes\hat{\sigma}_0^+(t+\tau)\}\right], & \tau\le 0\,, \end{cases} \tag{10.9}$$

где $\hat{\sigma}_0^{\pm}(t)$ описывают невозмущенное движение, задаваемое соответствующим супероператором $\mathcal{S}_0(t)$. При этом отличие нижнего соотношения от верхнего состоит в том, что если в верхнем переходное распределение $\mathcal{S}(t,t+\tau)$ описывает усреднение по более позднему моменту времени $t+\tau$ второго сомножителя, в нижнем $\mathcal{S}(t+\tau,t)$ описывает усреднение по более позднему аргументу t первого сомножителя. При этом для стационарного процесса усреднение по более раннему моменту t или $t+\tau$ отображается заменой $\hat{\rho}_0 \to \hat{\rho} = \hat{\rho}_0\mathcal{S}(\infty)$ (что эквивалентно замене $\langle\hat{\rho}_0| \to \langle 0| = \langle\hat{\rho}_0|\,\mathcal{S}(\infty)$ в матричной записи) с последующим усреднением по стационарной матрице плотности ρ (или эквивалентному ей бравектору $\langle 0|$).

При рассмотрении задач с внешним монохроматическим резонансным полем представление взаимодействия удобно применять в следующей форме. В качестве невозмущенного оператора временной эволюции удобно рассматривать гамильтониан собственной энергии атома с частотой атома, замененной на частоту лазерного поля ω_{L}, а остаток, выражающийся через частотную расстройку внешнего поля $\delta = \omega_{\mathrm{L}} - \omega_{12}$, отнести к возмущению. Это соответствует записи гамильтониана в виде

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{L}} + \hat{\mathcal{H}}_{\Omega}, \tag{10.10}$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{L}} = \frac{\hbar}{2}\omega_{\mathrm{L}}\hat{\sigma}_3, \tag{10.11}$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\Omega} = -\frac{\hbar}{2}\delta\hat{\sigma}_3 + \hbar\Omega_0\cos(\omega_{\mathrm{L}}t+\varphi)\hat{\sigma}_1.$$

В представлении взаимодействия, описываемом невозмущенным гамильтонианом (10.11), в гамильтониане $\hat{\mathcal{H}}_{\Omega}$ оператор $\hat{\sigma}_1$ зависит от времени по закону

$$\hat{\sigma}_1(t) = \hat{\sigma}_1\cos(\omega_{\mathrm{L}}t) + \hat{\sigma}_2\sin(\omega_{\mathrm{L}}t). \tag{10.12}$$

Поскольку эти осцилляции являются самыми быстрыми, то при расчете динамики, если только не интересоваться откликом на гармониках, все результаты представляются через гамильтониан взаимодействия ДА с лазерным полем, усредненный по времени:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\Omega} = -\frac{\hbar}{2}\delta\hat{\sigma}_3 + \frac{1}{2}\hbar\Omega_0(\cos\varphi\,\hat{\sigma}_1 - \sin\varphi\,\hat{\sigma}_2). \tag{10.13}$$

Ему в базисе $\hat{I}$, $\hat{\sigma}_3$, $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ с учетом правила коммутации операторов квазиспина (4.6) соответствует лиувиллиан вида

$$L_\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega_1 & \Omega_2 \\ 0 & \Omega_1 & 0 & -\delta \\ 0 & -\Omega_2 & \delta & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.14}$$

где компоненты $\Omega_1 = \Omega_0 \sin\varphi$, $\Omega_2 = \Omega_0 \cos\varphi$ учитывают фазу лазерного поля, от которой, очевидно, зависит фаза колебаний наведенного в атоме полем дипольного момента. Описанное приближение в теории резонансных процессов в ДС известно как *приближение вращающихся волн* (ПВВ). Выполненное усреднение гамильтониана взаимодействия по осцилляциям лазерного поля эквивалентно его приближенной замене на гамильтониан взаимодействия

$$\hat{\mathcal{H}}_\Omega = H_0(\hat{\sigma}_1 \cos\varphi + \hat{\sigma}_2 \sin\varphi)$$

электронного спина с вращающимся магнитным полем, помимо которого в рассматриваемом гамильтониане взаимодействия диполь–лазерное поле содержатся еще и составляющие, осциллирующие с удвоенными частотами.

С учетом описанного представления динамики для расчета стационарного отклика представление корреляционной функции (10.9) можно преобразовать следующим образом. Во-первых, обобщенный лиувиллиан $L_\mathrm{I} = L_\mathrm{r} + L_\Omega$ имеет одно нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, описывающее сохранение стационарного состояния, и три ненулевых λ_k с отрицательной вещественной частью, описывающих затухание к стационарному состоянию. При $t \to \infty$ поэтому имеем $\mathcal{S}(t) \to |0\rangle\langle 0|$, где $|0\rangle$, $\langle 0|$ описывают k-ый правые и левый собственные векторы при $k = 0$. Собственная динамика ДА задается соотношениями $\hat{\sigma}_0^{\pm}(t) = \hat{\sigma}^{\pm} \exp(\mp\omega_\mathrm{L} t)$. С учетом этих соотношений и определений (6.12), (6.22) полупрямого произведения супероператоров получаем:

$$\mathcal{K}(\tau) = \mathbf{E}_{12}\mathbf{E}_{12}^\mathrm{T} e^{-i\omega_\mathrm{L}\tau} \sum_{k=0}^{3} \begin{cases} e^{\lambda_k \tau} \operatorname{tr}\left[(\hat{\rho} \circledcirc \mathcal{P}_k)(\hat{\sigma}^- \otimes \hat{\sigma}^+)\right], & \tau > 0; \\ e^{-\lambda_k \tau} \operatorname{tr}\left[(\hat{\rho} \circledcirc \mathcal{P}_k)(\hat{\sigma}^- \otimes \hat{\sigma}^+)\right], & \tau \le 0\,. \end{cases} \tag{10.15}$$

Здесь $\mathcal{P}_k$ — собственный проектор переходного супероператора, имеющий в векторном представлении вид $\mathcal{P}_k = |k\rangle\langle k|$, а выражения $\hat{\rho} \circledcirc \mathcal{P}_k$, $\hat{\rho} \circledcirc \mathcal{P}_k$ соответствуют функционалам двухмоментого квантового распределения вероятностей, введенным ранее для произвольного n соотношениями (6.17), (6.21). Учитывая, что стационарной матрице плотности $\hat{\rho}$ в векторном представлении соответствует бра-вектор $\langle 0|$, выражения вида $\operatorname{tr}\left[(\rho \circledcirc \mathcal{P}_k)...\right]$ в векторной записи приобретают наглядный вид: $(\langle 0| \circledcirc |k\rangle\langle k|)...$ При выводе (10.15) учтено также соотношение $\langle \hat{\rho}_0 | 0 \rangle = 1$, очевидное с учетом того, что собственный вектор $|0\rangle$ описывает просто инвариантный единичный оператор $\hat{I}$, а след матрицы плотности нормирован на единицу. Приведенные здесь соотношения задают необходимый

математический аппарат для выполнения расчетов марковской динамики и флуоресценции ДА.

10.2 Равновесное состояние ДА в лазерном поле

В присутствии лазерного поля не более сильного, чем насыщающее, стационарное — равновесное — состояние атома описывается решением задачи

$$\langle 0|\, L_{\rm I} = 0 \tag{10.16}$$

на определение левого нулевого собственного вектора лиувиллиана преобразования атомных переменных. Здесь динамика атома описывается в представлении взаимодействия с невозмущенным движением в виде свободной прецессии на частоте лазерного поля. В соответствии с п. 10.1 она описывается невозмущенным гамильтонианом (10.11) и в одночастотном представлении взаимодействия отображается преобразованием невозмущенной временной динамики (10.12) и дополняющего его соотношения

$$\hat{\sigma}_2(t) = \hat{\sigma}_2 \cos(\omega_{\rm L} t) - \hat{\sigma}_1 \sin(\omega_{\rm L} t), \tag{10.17}$$

в котором фаза лазерного поля φ положена равной нулю. Супероператор $L_{\rm I}$, описывает возмущение за счет взаимодействия с лазерным полем, представленного частотой Раби и частотной расстройкой лазерного поля, и процессов релаксации. Он складывается из релаксационного супероператора (9.47), дополненного в общем случае супероператором упругой дефазировки (9.58), и супероператора ПВВ (10.14):

$$L_{\rm I} = \begin{pmatrix} 0 & -w & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & \Omega_0 \\ 0 & 0 & -\Gamma & -\delta \\ 0 & -\Omega_0 & \delta & -\Gamma \end{pmatrix}. \tag{10.18}$$

Соответствующее лиувиллиану (10.18) решение уравнения (10.16) $\langle 0| = (1, s_3, s_1, s_2)$ позволяет рассчитать с использованием правила усреднения $\langle \hat{A} \rangle = \langle 0|\hat{A}\rangle$ все представляющие интерес средние. Однако, представляет интерес выразить стационарное состояние также и в терминах обычной квантовой механики, т. е. с помощью соответствующей матрицы плотности. После использования соотношения $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{I} + \mathbf{s}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ получаем следующий результат

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2}\hat{I} - \frac{w}{2\gamma}\frac{|\bar{\delta}|^2}{|\bar{\delta}|^2 + \Omega_0^2\Gamma/\gamma} \begin{pmatrix} 1 & \Omega_0\bar{\delta}^*/|\bar{\delta}|^2 \\ \Omega_0\bar{\delta}/|\bar{\delta}|^2 & -1 \end{pmatrix}, \tag{10.19}$$

где $\bar{\delta} = \delta - i\Gamma$ — эффективная расстройка лазерного поля, учитывающая наряду со средней расстройкой δ в виде мнимой части также и флуктуационную часть расстройки, описываемую скоростью Γ дефазировки осцилляций дипольного момента. С помощью этого выражения нетрудно рассчитать все стационарные средние ДА.

Для средней комплексной амплитуды $\langle\hat{\sigma}^+\rangle = \rho_{21}$ колебаний дипольного момента имеем

$$\langle\hat{\sigma}^\pm\rangle = -\frac{w}{2\gamma}\frac{\Omega_0(\delta \mp i\Gamma)}{|\bar{\delta}|^2 + \Omega_0^2\Gamma/\gamma}\,. \tag{10.20}$$

Введем безразмерную *комплексную восприимчивость* атома в виде

$$\chi = \gamma\,\langle\hat{\sigma}^+\rangle\,/\Omega_0\,, \tag{10.21}$$

реальная часть которой определяет дисперсию, а мнимая часть — поглощение атома [6, 43]. Из выражения (10.20), соответственно, получаем:

$$\chi'(\omega_{\rm L}) = -\frac{1}{2}\,\frac{w\delta}{\delta^2 + \Gamma^2 + \Omega_0^2\Gamma/\gamma}, \quad \chi''(\omega_{\rm L}) = \frac{1}{2}\,\frac{w\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2 + \Omega_0^2\Gamma/\gamma}\,. \tag{10.22}$$

Отличие этой формулы от соответствующей классической состоит в появлении в знаменателе слагаемого $\Omega_0^2\Gamma/\gamma$, описывающего насыщение перехода лазерным полем, и в появлении параметра w некогерентной накачки $\gamma - w \neq 0$, учитывающей насыщение за счет некогерентного (в частности, теплового) возбуждения. Насыщение полем при этом проявляется как *полевое уширение* линии поглощения

$$\Gamma \to \sqrt{\Gamma^2 + \Omega_0^2\Gamma/\gamma}.$$

При этом, однако, следует учитывать, что интерпретация этого уширения как увеличения скорости дефазировки некорректна. Дело в том, что эта дефазировка обязана когерентным осцилляциям Раби, перераспределяющим энергию возбуждения атома с колебаний на лазерной частоте на другие частоты, описываемые частотными сдвигами $\mathcal{J}\mathrm{m}\,\lambda_k$. Из результатов п. 10.5 следует, что в пределе бесконечно сильного поля интенсивность осцилляций на лазерной частоте стремится к нулю. По этой причине в конечном счете в отклике на лазерной частоте начинают преобладать колебания на других частотах, трансформированных на частоту лазерного поля только шумами, связанными с процессами релаксации, что и приводит к растяжению спектра, который, фактически, при каждом фиксированном значении $\omega_{\rm L}$ образуется из хвостов откликов, отвечающих резонансам на частотах, смещенных на частоту Раби $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \delta^2}$. Эту физическую картину можно проследить математически в приближении сильного поля, рассматривая, как это делается в *Главе 11*, в качестве невозмущенного движения ДА суперпозицию прецессий на частоте лазерного поля и прецессию на частоте Раби и рассчитывая релаксацию в

этом базисе. При этом стационарное состояние, осциллирующее на частоте $\omega_{\rm L}$ и определяющее средний отклик атома, зависит от релаксационных параметров, определяемых также и флуктуациями шумов на частотах, смещенных на частоту Раби, что и означает наличие вклада атомных гармоник в отклик на центральной частоте.

Населенность верхнего уровня имеет вид

$$n_2 = \frac{1}{2}\,\frac{(\gamma - w)(\delta^2 + \Gamma^2) + \Omega_0^2\Gamma}{\gamma(\delta^2 + \Gamma^2) + \Omega_0^2\Gamma}\,. \tag{10.23}$$

Для *степени когерентности* возбуждения, определяемой соотношением

$$\mu = \frac{|\rho_{12}|^2}{\rho_{22}\rho_{11}}\,,$$

и *флуктуации комплексной амплитуды*

$$\mathcal{D}\sigma^+ = \left\langle (\hat\sigma^- - \langle\hat\sigma^-\rangle)(\hat\sigma^+ - \langle\hat\sigma^+\rangle)\right\rangle = \rho_{22} - |\rho_{12}|^2$$

получаем

$$\begin{aligned} \mu &= \tfrac{(\delta^2+\Gamma^2)\Omega_0^2 w^2}{[\Gamma\Omega_0^2+(\delta^2+\Gamma^2)(\gamma-w)][\Gamma\Omega_0^2+(\delta^2+\Gamma^2)(\gamma+w)]}\,, \\ \mathcal{D}\sigma^+ &= \tfrac{2\Gamma^2\Omega_0^4+2(\delta^2+\Gamma^2)(\delta^2\gamma+\gamma\Gamma^2+\Gamma\Omega_0^2)(\gamma-w)+(\delta^2+\Gamma^2)\Omega_0^2(2\gamma\Gamma-w^2)}{4(\delta^2\gamma+\gamma\Gamma^2+\Gamma\Omega_0^2)^2}. \end{aligned} \tag{10.24}$$

В пределе бесконечной интенсивности поля из этих соотношений следует, что степень когерентности стремится к нулю, а флуктуация достигает предельного значения $1/2$, совпадающего с населенностью уровней. В специальном случае чисто радиационного затухания атома в оптическом диапазоне с учетом соотношений релаксационных параметров $\Gamma = \gamma/2$, $w = \gamma$ приведенные соотношения упрощаются:

$$\mu = \frac{4\delta^2 + \gamma^2}{4\delta^2 + \gamma^2 + \Omega_0^2}\,, \tag{10.25}$$

$$\mathcal{D}\sigma^+ = \frac{2\Omega_0^4}{(4\delta^2 + \gamma^2 + 2\Omega_0^2)^2}\,. \tag{10.26}$$

В этом случае в слабом поле или при больших расстройках степень когерентности стремится к единице, в то время как дисперсия комплексной амплитуды обращается в ноль. В этом отношении радиационное затухание в оптическом диапазоне качественно отличается от радиационного затухания в радиодиапазоне, поскольку там в силу соотношений (9.48) параметр тепловой накачки верхнего уровня $\gamma - w$ отличен от нуля. При этом условии в асимптотике больших расстроек соотношения (10.24) дают для степени когерентности $\mu = \Omega_0^2 w^2/[\delta^2(\gamma^2 - w^2)]$ и $\mathcal{D}\sigma^+ = (\gamma - w)/2\gamma$

для флуктуации. Что же касается роли чистой (упругой) дефазировки, описываемой величиной $\Gamma_{\rm e} = \Gamma - \gamma/2$, то она обнаруживается для случая отсутствия тепловой накачки в иной скорости спадания флуктуаций с ростом расстройки. Если при $\Gamma_{\rm e} = 0$ дисперсия спадает как $\Omega_0^4/(8\delta^4)$, то при наличии чистой дефазировки получаем $\mathcal{D}\sigma^+ = \Gamma_{\rm e}\Omega_0^2/(2\gamma\delta^2)$. Это означает, что соответствующая флуктуационная составляющая возбуждения ДА возникает за счет резонансов, обязанных случайной модуляции собственной частоты атома дефазирующим возмущением. Соответствующая же зависимость от поля в слабых полях при этом трансформируется от $\sim \Omega_0^4$ к $\sim \Omega_0^2$.

Представляет интерес рассмотреть структуру равновесной матрицы плотности, описываемую спектральным разложением

$$\hat{\rho}_0 = \mathcal{P}_1\psi_1\psi_1^+ + \mathcal{P}_2\psi_2\psi_2^+ \,.$$

Здесь волновые функции $\psi_1\,, \psi_2$ описывают, соответственно, основное и возбужденное *равновесные чистые состояния* ДА в лазерном поле, а $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ — соответствующие вероятности этих состояний. В отсутствие поля, при наличии только тепловой накачки, они совпадают с основным и возбужденным состоянием свободного атома и, соответственно, вероятности $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ совпадают с населенностями основного и возбужденного уровня. Разрешая спектральную задачу для матрицы плотности (10.19), получаем

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{w\sqrt{(\delta^2+\Gamma^2)\ (\delta^2+\Omega_0^2+\Gamma^2)}}{\delta^2\,\gamma + \Omega_0^2\,\Gamma + \gamma\,\Gamma^2}$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{w\sqrt{(\delta^2+\Gamma^2)\ (\delta^2+\Omega_0^2+\Gamma^2)}}{\delta^2\,\gamma + \Omega_0^2\,\Gamma + \gamma\,\Gamma^2}$$

$$\psi_1 = \frac{\{-(\delta - i\Gamma)(Q-1),\quad \Omega_0\}}{\sqrt{2[\Omega_0^2 + (\delta^2+\Gamma^2)(Q-1)]}},$$

$$\psi_2 = \frac{\{(\delta - i\Gamma)(Q+1),\quad \Omega_0\}}{\sqrt{2[\Omega_0^2 + (\delta^2+\Gamma^2)(Q-1)]}},$$

$$Q = \sqrt{\frac{\delta^2+\Gamma^2+\Omega_0^2}{\delta^2+\Gamma^2}}.$$

Специфика упругого уширения в терминах вероятностей $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ качественно проявляется в зависимости вероятности равновесного возбужденного чистого состояния $\mathcal{P}_2$ от напряженности поля в слабом поле при точном резонансе, $\delta = 0$. В этой асимптотике из соотношений (10.19) для вероятности равновесного и населенности невозмущенного основного состояний, соответственно, получаем

$$\mathcal{P}_2 = \frac{\Omega_0^2\Gamma_{\rm e}}{2\gamma\Gamma^2}\,, \quad n_2 = \frac{\Omega_0^2}{2\gamma\Gamma}\,.$$

Эти выражения совпадают в асимптотике большой упругой дефазировки $\Gamma \gg \gamma/2$, в то время как в ее отсутствие в данном приближении $\mathcal{P}_2 = 0$, т. е. равновесное состояние атома в отсутствие упругой дефазировки является чистым.

10.3 Энергетические потоки в системе атом – электромагнитное поле

Обсудим рассматриваемую систему атом + электромагнитное поле вакуума + поле лазерного излучения с точки зрения обмена энергией между ее компонентами. Существенно отметить, что при этом лазерное поле рассматривается лишь как источник заданной силы, действующей на атом, а с полем вакуума взаимодействует только атом посредством своего дипольного момента. По этой причине возможная интерференция мод поля, непосредственно возбуждаемых лазером, с изулучением атома не представляет интереса. В рассматриваемой постановке задачи имеются два потока энергии: от лазерного поля к атому и от атома к полю вакуума, в то время как в общем случае можно включить в рассмотрение и поток от лазерного источника, частично рассеиваемый атомом.

Для временной производной усредненного по всем переменным полного гамильтониана атома и поля получаем

$$\frac{d}{dt}E_\Sigma = \frac{d}{dt}E_\mathrm{a} + \frac{d}{dt}V_\mathrm{L} + \frac{d}{dt}V_\mathrm{f} + \frac{d}{dt}E_\mathrm{r}, \tag{10.27}$$

где E_Σ — полная энергия системы атом–поле, E_a — внутренняя энергия атома, $V_\mathrm{L} = \left\langle -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_\mathrm{L} \right\rangle$ — энергия взаимодействия с лазерным полем, $V_\mathrm{f} = \left\langle -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 \right\rangle$ — энергия взаимодействия с вакуумным полем, E_r — энергия поля вакуума, $\hat{\mathbf{d}}$ — оператор атомного дипольного момента, $\mathbf{E}_\mathrm{L}$ и $\hat{\mathbf{E}}_0$ — напряженность лазерного поля и оператор напряженности вакуумного электромагнитного поля, соответственно. Применив уравнения Гейзенберга $\frac{d}{dt}\hat{\mathcal{H}}_\Sigma = \frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathcal{H}}_\Sigma + \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}_\Sigma, \hat{\mathcal{H}}_\Sigma] = \frac{\partial}{\partial t}\hat{V}_\mathrm{L}$ к полному гамильтониану, для правой части разложения (10.27) получаем:

$$\frac{d}{dt}E_\Sigma = W_\mathrm{L} \equiv -\left\langle \hat{\mathbf{d}} \right\rangle \cdot \frac{d\mathbf{E}_\mathrm{L}}{dt}, \tag{10.28}$$

Выражение (10.28) описывает среднюю мощность, выделяемую лазерным полем на атомном дипольном моменте [53]. Таким образом, это соотношение выражает тот факт, что система атом + поле вакуума получает энергию только вследствие возбуждения атома лазерным полем. Для изменения энергии вакуумного поля из соотношения $\frac{d}{dt}\hat{\mathcal{H}}_\mathrm{r} = \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}_\Sigma, \hat{\mathcal{H}}_\mathrm{r}]$

получаем, аналогично,

$$\frac{d}{dt}E_{\mathrm{r}} = \left\langle \hat{\mathbf{d}} \cdot \frac{\partial_0 \hat{\mathbf{E}}_0}{\partial t} \right\rangle, \tag{10.29}$$

где $\dfrac{\partial_0}{\partial t}$ обозначает производную при изменении поля только за счет его свободной динамики, без учета вклада излучения атома. Для изменения энергии атома подобным же образом получаем

$$\frac{d}{dt}E_{\mathrm{a}} = \left\langle \frac{\partial_0 \hat{\mathbf{d}}}{\partial t} \right\rangle \cdot \mathbf{E}_{\mathrm{L}} + \left\langle \frac{\partial_0 \hat{\mathbf{d}}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{E}}_0 \right\rangle, \tag{10.30}$$

где частная производная соответствует учету только свободной динамики атома в отсутствие электромагнитного поля. Выражение (10.30) описывает баланс между лазерным возбуждением и излучением атома: первый член описывает накачку атома лазерным полем, а второй член описывает энергию, излучаемую атомом и возбуждающую поле вакуума.

Приведенные соотношения представляют наибольший практический интерес в резонансном приближении, в пренебрежении осцилляциями на оптических частотах. С учетом того, что в представлении взаимодействия зависящий от времени оператор дипольного момента имеет вид $\hat{\mathbf{d}}(t) = \hat{\mathbf{d}}^{+}\exp(-i\omega_{\mathrm{L}}t) + \hat{\mathbf{d}}^{-}\exp(i\omega_{\mathrm{L}}t)$, где $\hat{\mathbf{d}}^{\pm}$ — положительно- и отрицательно-частотные составляющие оператора дипольного момента, а $\mathbf{E}_{\mathrm{L}}(t) = [\mathbf{E}_{\mathrm{L}}^{+}\exp(-i\omega_{\mathrm{L}}t) + \mathbf{E}_{\mathrm{L}}^{-}\exp(i\omega_{\mathrm{L}}t)]/2$, в приближении вращающихся волн выражение (10.28) приводится к виду $W_{\mathrm{L}} = \omega_{\mathrm{L}}\,\mathcal{J}\mathrm{m}\left\langle \hat{\mathbf{d}}^{+} \right\rangle \mathbf{E}_{\mathrm{L}}^{-}$. При этом первый член в выражении (10.30) для изменения энергии атома, как это очевидно после аналогичного преобразования, совпадает с W_{L}. Это выражает факт совпадения притока энергии от лазерного поля с мощностью, выделяемой последним на атомном дипольном моменте. Аналогичным образом второй член в выражении (10.30) совпадает с точностью до знака с изменением энергии вакуумного поля (10.29). Выражая оператор поляризации через частоту Раби $g = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_{\mathrm{L}}$ и оператор положительно-частотного перехода $\hat{\sigma}^{+}$, представляем поглощаемую мощность в виде

$$W_{\mathrm{L}} = \hbar\omega_{\mathrm{L}}\,\mathcal{J}\mathrm{m}\, g \left\langle \hat{\sigma}^{+} \right\rangle. \tag{10.31}$$

Рассматривая уравнение стационарного состояния (10.16), для ДА легко получить соотношение

$$\mathcal{J}\mathrm{m}\, g \left\langle \hat{\sigma}^{+} \right\rangle = \gamma \left\langle \hat{n}_2 \right\rangle$$

и показать эквивалентность выражения для мощности в форме (10.31) и его представления через скорость радиационного распада и населенность возбужденного уровня в виде $\hbar\omega_{\mathrm{L}}\gamma \left\langle \hat{n}_2 \right\rangle$.

10.4 Кинетика поляризации и населенностей

Рассмотрим сначала временную динамику поляризации и населенностей ДА в присутствии лазерного поля не более сильного, чем насыщающее. Соответствующий супероператор перехода имеет вид

$$S_{\mathrm{I}} = \exp\left(L_{\mathrm{I}} t\right). \tag{10.32}$$

Его расчет в общем случае может быть выполнен в соответствии со спектральной формулой

$$S_{\mathrm{I}}(t) = |0\rangle\langle 0| + \sum_{k=1}^{3} \exp\left(\lambda_k t\right) |k\rangle\langle k|, \tag{10.33}$$

где λ_k описывают три ненулевых собственных значения матрицы (10.18), из которых одно — λ_3 — вещественно, а два других — $\lambda_{1,2}$ — комплексно сопряжены; $|k\rangle$, $\langle k|$ описывают, соответственно, биортонормированные правые и левые собственные векторы, а $|0\rangle$, $\langle 0|$ соответствуют нулевому собственному значению. При этом

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \langle 0| = (1,\, n_0,\, a_0,\, b_0), \tag{10.34}$$

где в последнем выражении n_0, a_0, b_0 просто некоторые параметры, определяемые наряду с остальными путем решения одного из взаимно связанных уравнений

$$L_{\mathrm{I}} |k\rangle = \lambda_k |k\rangle, \qquad \langle k| L_{\mathrm{I}} = \lambda_k \langle k|. \tag{10.35}$$

Как известно из теории матриц, для получения решения достаточно найти все собственные значения λ_k, через которые могут быть выражены и собственные проекторы $|k\rangle\langle k|$. Поскольку одно собственное значение уже известно, нахождение трех остальных связано с решением кубичного уравнения. Хотя это возможно сделать даже аналитически, это не имеет особого смысла в виду ненагядного характера соответствующих выражений. Во всяком случае, приведенные соотношения дают очень простой алгоритм расчета, легко реализуемый с помощью простейшего компьютера. Для случая нулевой расстройки, однако, это уравнение допускает относительно простое решение, с помощью которого можно аналитически рассчитать, в частности, спектр флуоресценции [3]. Для общего же случая обсудим здесь лишь качественную структуру решения. Указанное нулевое собственное значение обязано своим происхождением общему свойству переходного супероператора — инвариантности единичного оператора и сохранению следа матрицы плотности, которое в выбранной

гейзенберговской форме динамики отвечает нулевому столбцу в матрице (10.18). Наличие на диагоналях только отрицательных величин влечет отрицательность реальной части всех остальных собственных значений. Это позволяет представить λ_k в более наглядной форме:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_3 = -\gamma_{\mathrm{I}}, \quad \lambda_{1,2} = -\Gamma_{\mathrm{I}} \pm i\Omega_{\mathrm{I}}, \tag{10.36}$$

где все введенные константы вещественны и положительны. Они совпадают в асимптотике $\Omega_0 \to 0$ с исходными постоянными $-\gamma$, $-\Gamma \pm i\Omega$, где полная частота Раби

$$\Omega = \left(\Omega_0^2 + \delta^2\right)^{1/2} \tag{10.37}$$

в асимптотике слабого поля близка к частотной расстройке:

$$\Omega \longrightarrow |\delta| + \frac{\Omega_0^2}{2|\delta|}. \tag{10.38}$$

Здесь второе слагаемое описывает квадратичный штарковский сдвиг резонансной частоты $\omega_{\mathrm{L}} \pm \mathcal{J}\mathrm{m}\,\lambda_{1,2}$ относительно невозмущенной частоты атома ω_{12} . В общем же случае релаксационные параметры переномированы полем, однако эта перенормировка не связана с изменением самих исходных параметров релаксационного оператора γ, Γ, что может иметь место в случае еще более сильных полей, чем рассматриваемые здесь насыщающие поля. В теории, излагаемой в данной главе, перенормировка параметров γ_{I}, Γ_{I} не может привести к подавлению релаксации даже при сколь угодно сильных полях.

Смысл параметров выражения (10.34) состоит в том, что они в соответствии со вторым соотношением в (10.35) описывают стационарную матрицу плотности, причем единичное значение первого элемента соответствует согласно п. 4.1 нормировке следа на единицу. Применяя эту матрицу плотности в соответствии с формулой $\left\langle \hat{A} \right\rangle = \left\langle 0 \left| \hat{A} \right. \right\rangle$ последовательно к операторам разности населенностей $\hat{\sigma_3}$, и компонент поляризации $\hat{\sigma_1}$, $\hat{\sigma_2}$, которые являются элементами операторного базиса, описываемого кет-векторами с единственным ненулевым элементом, равным единице, получаем, что параметры имеют следующий смысл:

- n_0 — стационарная разность населенностей;
- a_0 — стационарная косинус-компонента осцилляций безразмерной поляризации на частоте ω_{L};
- b_0 — стационарная синус-компонента осцилляций безразмерной поляризации на частоте ω_{L}.

Несложное аналитическое выражение для матрицы перехода (10.32) можно получить в асимптотике быстрой прецессии Раби, справедливой для больших расстроек, либо для предельно насыщающих полей, удовлетворяющих условию (10.4). Это выражение в более общем виде возникает при исследовании преобразования сильным полем параметров релакса-

ционного оператора, выполняемого в *Главе 11*. В случае же слабого поля для расчета затухания неравновесной матрицы плотности $(1,\, n,\, a,\, b)$ можно рассчитать собственные значения и собственные векторы по теории возмущений первого порядка. Собственные значения совпадают в этом порядке с исходными, т. е.

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_3 = -\gamma, \quad \lambda_{1,2} = -\Gamma \pm i\delta, \tag{10.39}$$

а собственные векторы представляются в виде

$$\begin{aligned} |k\rangle &= |k\rangle_{\mathrm{r}} + (\lambda_{k\mathrm{r}} - L_{\mathrm{r}})^{-1} L_{\Omega 0}\, |k\rangle_{\mathrm{r}}, \\ \langle k| &= \langle k|_{\mathrm{r}} + \langle k|_{\mathrm{r}}\, L_{\Omega 0} (\lambda_{k\mathrm{r}} - L_{\mathrm{r}})^{-1}, \end{aligned} \tag{10.40}$$

где $L_{\Omega 0}$ описывает только прецессию под действием внешнего поля, а индекс r указывает на то, что собственные векторы и собственные значения относятся к релаксационной матрице L_{r}, представленной в этой формуле обобщенной обратной матрицей — резольвентой. При этом L_{r} включает также прецессию с частотой расстройки и представляет прямую сумму двух матриц

$$L_{\mathrm{r}} = L_{\mathrm{r}\|} \oplus L_{\mathrm{r}\perp}, \qquad L_{\mathrm{r}\|} = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \qquad L_{\mathrm{r}\perp} = \begin{pmatrix} -\Gamma & \delta \\ -\delta & -\Gamma \end{pmatrix}. \tag{10.41}$$

Учитывая этот факт, нетрудно получить собственные векторы матрицы L_{r} :

$$\lambda_{0\mathrm{r}} = 0, \quad \lambda_{3\mathrm{r}} = -\gamma, \quad \lambda_{1,2\mathrm{r}} = -\Gamma \pm \delta, \tag{10.42}$$

$$\langle 0|_{\mathrm{r}} = \left(1,\, -\frac{w}{\gamma},\, 0,\, 0\right), \quad \langle 3|_{\mathrm{r}} = (0,\, 1,\, 0,\, 0),$$

$$\langle 1|_{\mathrm{r}} = (0,\, 0,\, 1,\, 0), \quad \langle 2|_{\mathrm{r}} = (0,\, 0,\, 0,\, 1)\,. \tag{10.43}$$

$$|0\rangle_{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle_{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} w/\gamma \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1,2\rangle_{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 \pm i)/\sqrt{2} \\ (1 \mp i)/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{10.44}$$

Соответственно, распад состояния

$$\langle \hat{\rho}| = (1,\, n,\, a,\, b)$$

происходит по экспоненциальному закону. При этом n распадается со скоростью γ, а компоненты a, b скоростью Γ и стремятся к равновесным значениям, определяемым возмущенным собственным вектором $\langle 0|$.

Редукция квантового случайного процесса

Как было показано в п. 9.5, при быстрой упругой дефазировке ДА в оптическом диапазоне в отсутствие лазерного поля реализуется процедура квантового измерения населенностей уровней. Рассмотрим теперь при тех же соотношениях релаксационных параметров квантовый случайный процесс в ДА, возбуждаемом лазерным полем постоянной амплитуды. Из выражения (10.19) для стационарной матрицы плотности для соотношения параметров $w = \gamma$, $\delta \sim \Gamma$, $\gamma/\Gamma \to 0$, $\Omega_0 \sim \sqrt{\gamma\Gamma}$ получаем асимптотическое выражение в виде полностью некогерентного состояния с произвольными в общем случае значениями населенностей уровней

$$n_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\Omega_0^2\Gamma/\gamma + 2(\delta^2+\Gamma^2)}{\Omega_0^2\Gamma/\gamma + \delta^2 + \Gamma^2}, \quad n_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\Omega_0^2\Gamma/\gamma}{\Omega_0^2\Gamma/\gamma + \delta^2 + \Gamma^2}$$

и нулевыми недиагональными матричными элементами $\rho_{12}\,, \rho_{21}$. Следовательно, случайный процесс в ДА в масштабе времен $(\gamma\Gamma)^{-1/2} \ll \tau \ll \gamma^{-1}$ в результате быстрой упругой дефазировки редуцируется к классическому марковскому процессу на два положения, $k = 1, 2$. При этом шум, возбуждающий эти ненулевые в присутствии лазерного поля флуктуации, описывается выражением (9.36) и обусловлен вакуумным электромагнитным полем. Он является существенно квантовым процессом, однако результат его действия, очевидно, может быть адекватно отображен эквивалентным классическим случайным процессом, как гауссовским, так и импульсным белым шумом. Характерная скорость его динамических изменений — частота скачков определяется частотой Раби Ω_0, которая существенно меньше скорости дефазировки: $\Omega_0/\Gamma \sim \sqrt{\gamma/\Gamma}$. Характерным свойством марковского процесса является то, что в масштабе времен τ, на которых происходит процесс марковского затухания, информация о природе возбуждающего шума утрачивается, поскольку она определена на временах меньшего масштаба. Более того, даже любой существенно квантовый марковский процесс может быть в масштабе времен τ описан как результат некоторого эффективного воздействия на квантовую систему классического шума: этот подход широко применяется для компьютерного моделирования квантовых случайных процессов в терминах случайной волновой функции [14] взамен представления в терминах матрицы плотности, что радикально уменьшает число рассматриваемых переменных.

10.5 Спектр флуоресценции

Для расчета спектра флуоресценции следует исходить из формулы (10.15), в которой с учетом определения (6.12) полупрямого произведения для данного случая получаем представление корреляционной функции в виде суммы частотных компонент:

$$\mathcal{K}(\tau) = \mathbf{E}_{12}\mathbf{E}_{12}^{\mathrm{T}} \sum_{k=0}^{3} C_k^{\mathrm{sign}(\tau)} \exp(-i\omega_{\mathrm{L}}\tau - \lambda_k|\tau|), \tag{10.45}$$

где $C_k^{\mathrm{sign}\tau} = C_k^{\pm}$ в зависимости от знака τ, представляется *коэффициентами интенсивности* спектральных линий

$$C_k^{+} = \left\langle 0 \left| \hat{\sigma}^{-} \right| k \right\rangle \left\langle k \left| \hat{\sigma}^{+} \right. \right\rangle, C_k^{-} = \left\langle 0 \left| \hat{\sigma}^{+} \right| k \right\rangle \left\langle k \left| \hat{\sigma}^{-} \right. \right\rangle . \tag{10.46}$$

Здесь в соответствии с определениями (6.12), (6.22) произведения типа $\hat{\sigma}^{-}\left|k\right\rangle$ есть произведения двух квантовых операторов, которым после выполнения операторного умножения ставятся в соответствие кет-векторы типа $\left|\hat{\sigma}^{-}\left|k\right\rangle\right\rangle$, представляющие результат умножения. Смысл коэффициентов C_k^{+}, C_k^{-} выявляется рассмотрением значения $\tau = 0$ в выражениях (10.8), (10.45) для корреляционной функции, что на спектральном языке соответствует интегрированию по всем частотам. В этом случае она пропорциональна среднему значению оператора населенности верхнего уровня, $\hat{n}_2 = \hat{\sigma}^{-}\hat{\sigma}^{+}$, что соответствует суммарной мощности всех частотных компонент. Эта мощность представляется любой из сумм $\sum C_k^{+} = \sum C_k^{-}$, которые согласно (10.46) и с учетом соотношения полноты $\sum \left|k\right\rangle \left\langle k\right| = 1$ сводятся к $\left\langle 0 \left| \hat{\sigma}^{-}\hat{\sigma}^{+} \right. \right\rangle$. Если бы частотные компоненты имели полностью разрешенные — неперекрывающиеся — линии, то эти коэффициенты обязаны были бы быть вещественными, положительными, причем $C_k^{+} = C_k^{-}$, и тогда бы они описывали мощности соответствующих спектральных компонент. C_k^{+} (C_k^{-}) распадаются, в соответствии с их происхождением от билинейной комбинации $\hat{\sigma}^{-}(t)\hat{\sigma}^{+}(t+\tau)$, на произведения сомножителей

$$C_k^{\uparrow} = \left\langle 0 \left| \hat{\sigma}^{-} \right| k \right\rangle, \quad C_k^{\downarrow} = \left\langle k \left| \hat{\sigma}^{+} \right. \right\rangle . \tag{10.47}$$

Первый описывает "матричный элемент" комплексно сопряженной амплитуды $\hat{\sigma}^{-}$ между стационарным состоянием $\left\langle 0\right|$ и k-ым собственным состоянием атома $\left\langle k\right|$, а второй — среднюю комплексную амплитуду $\hat{\sigma}^{+}$ в этом состоянии. Последняя же в соответствии с (10.21) определяет комплексную восприимчивость атома в данном состоянии. Таким образом, спектр флуоресценции описывается произведениями комплексных коэффициентов, описывающих возбуждение различных собственных состояний, и соответствующих этим состояниям комплексных восприимчивостей.

Спектр флуоресценции в силу его исходного определения из физических соображений как квадрата модуля сигнала, наблюдаемого на выходе неограниченно узкополосного фильтра, после представления в форме

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T} \left\langle \int_0^T \hat{\sigma}^-(t_1) e^{-i\omega t_1} dt_1 \int_0^T \hat{\sigma}^+(t_2) e^{i\omega t_2} dt_2 \right\rangle , \qquad (10.48)$$

обобщающей классическое определение [15], должен быть вещественным и положительным. Раскрывая это выражение и усредняя, получаем его представление как Фурье-преобразование корреляционной функции по аргументу τ. Из вещественности спектра, соответствующего корреляционной функции (10.45), следует соотношение между коэффициентами $C_k^{\pm}$:

$$C_k^+ = \left(C_k^-\right)^* \text{ для } \mathcal{J}\mathrm{m}\,\lambda_k = 0, \quad C_k^+ = \left(C_{k^*}^-\right)^* \text{ для } \mathcal{J}\mathrm{m}\,\lambda_k \neq 0\,,$$

где k^* соответствует отвечающему k номеру комплексно сопряженного собственного значения $\lambda_{k^*} = \lambda_k^*$. С учетом автоматического выполнения этих необходимых соотношений спектр, соответствующий (10.45), представляется только через коэффициенты C_k^+ в виде:

$$S(\omega) = -2 \sum_k \frac{\mathcal{R}\mathrm{e}\,\lambda_k\, \mathcal{R}\mathrm{e}\, C_k^+ + (\omega - \omega_\mathrm{L} + \mathcal{J}\mathrm{m}\,\lambda_k)\, \mathcal{J}\mathrm{m}\, C_k^+}{(\mathcal{R}\mathrm{e}\,\lambda_k)^2 + (\omega - \omega_\mathrm{L} + \mathcal{J}\mathrm{m}\,\lambda_k)^2}. \qquad (10.49)$$

Здесь физически размерный матричный коэффициент $\mathbf{E}_{12}\mathbf{E}_{12}^{\mathrm{T}}$, описывающий векторные свойства излучения, опущен, так что спектральная плотность имеет размерность ω^{-1}.

В общем случае выражения (10.45), (10.49) для ДА описывают четырехкомпонентную структуру, соответствующих четырем собственным значениям λ_k лиувиллиана L. В знаменателе выражения (10.49) реальные части $\mathcal{R}\mathrm{e}\,\lambda_k$ и мнимые части $\mathcal{J}\mathrm{m}\,\lambda_k$ описывают, соответственно, ширины и частотные сдвиги лоренцевских контуров, которые отвечают вкладу первого слагаемого в числителе, пропорционального реальной части $\mathcal{R}\mathrm{e}\, C_k^+$ коэффициентов интенсивности. Член, соответствующий $\lambda_k = 0$, должен быть, очевидно, записан в форме соответствующей δ-функции $\delta(\omega - \omega_\mathrm{L})$, определяющей когерентную линию на частоте лазерного поля. Это единственная "чисто классическая" составляющая спектра ДА — если рассматривать в качестве классического аналога линейный гармонический осциллятор, возбуждаемый гармонической силой, в котором при наличии только трения в отсутствие упругой дефазировки никаких других спектральных компонент помимо отклика на частоте действующей силы не возникает. Составляющая же спектра (10.49), пропорциональная $\mathcal{J}\mathrm{m}\, C_k^+$, описывает вклад, специфический только для квантовой системы — *дисперсионную компоненту* спектра, по форме

тождественную с частотной зависимостью дисперсии $\chi'(\omega)$ отклика гармонического осциллятора на внешнюю силу с частотой ω. При этом лоренцевские контуры соответствуют частотной зависимости поглощения $\chi''(\omega)$. Спектр поглощения ДА согласно (10.22) имеет вид лоренцевского контура, центрированного на частоте лазерного поля.

Рассмотрим по отдельности случаи нулевой расстройки и случаи слабого и насыщающего лазерного поля, для которых спектр имеет качественно различную структуру.

10.5.1 Случай точного резонанса

При точном резонансе, т. е. $\delta = 0$ в лиувиллиане (10.18), центральная спектральная задача марковской теории (10.35) существенно упрощается за счет возможности получения простого аналитического решения для соответствующего характеристического уравнения

$$\det(L_{\rm I} - \lambda \cdot 1) = (\lambda + \Gamma)\lambda \det \begin{pmatrix} \gamma + \lambda & \Omega_0 \\ -\Omega_0 & \Gamma + \lambda \end{pmatrix} = 0\,,$$

которое записано с учетом расцепления (10.18) на прямую сумму диагонального элемента $-\Gamma$ и 3×3-матрицы. Здесь в дополнение к универсальному корню $\lambda = 0$, очевидный корень $\lambda = -\Gamma$ описывает затухание одной из компонент поляризации, не спаренной полем с населенностями. Рассчитывая также и корни, соответствующие спаренным переменным, получаем полный набор собственных значений

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_3 = -\Gamma,\ \lambda_1 = -\frac{\gamma + \Gamma}{2} - \frac{i}{2}\Omega_\Gamma\,, \lambda_2 = -\frac{\gamma + \Gamma}{2} + \frac{i}{2}\Omega_\Gamma\,, \qquad (10.50)$$

где

$$\Omega_\Gamma(\Omega_0, \Gamma, \gamma) = \begin{cases} \sqrt{4\Omega_0^2 - (\Gamma - \gamma)^2},\ 4\Omega_0^2 > (\Gamma - \gamma)^2, \\ -i\sqrt{(\Gamma - \gamma)^2 - 4\Omega_0^2},\ 4\Omega_0^2 \le (\Gamma - \gamma)^2. \end{cases}$$

описывает эффективную частоту Раби, модифицированную затуханием. Она вещественна только для достаточной интенсивности поля, когда частота невозмущенных осцилляций Раби превышает пороговое значение:

$$\Omega_0 > \frac{1}{2}|\Gamma - \gamma|$$

и принимает мнимое значение в противоположном случае. Последний соответствует режиму чисто релаксационного движения атома, одетого полем, на фоне прецессии с частотой $\omega_{\rm L}$, и аналогично релаксационному движению классического гармонического осциллятора с затуханием, у которого частота меньше порога осцилляторного режима. Интересно

отметить, что при совпадении затухания поляризации и населенностей, $\Gamma = \gamma$, порог осцилляторного режима в ДА равен нулю. Физический смысл этого становится более ясным в результате сравнения динамики переменных ДА с динамикой системы классических линейных осцилляторов.

Построим систему гармонических осцилляторов с эволюционной матрицей

$$L = \begin{pmatrix} -\gamma & \Omega_0 & 0 \\ -\Omega_0 & -\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \tag{10.51}$$

совпадающей с точностью до одной перестановки с нижней 3×3-подматрицей лиувиллиана (10.18) и описываемой теми же самыми собственными значениями $\lambda_{1,2,3}$. Рассмотрим собственный гамильтониан системы двух связанных осцилляторов

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}_1^2}{2} + \omega_{\mathrm{L}}^2 \frac{\hat{q}_1^2}{2} + \frac{\hat{p}_2^2}{2} + \omega_{\mathrm{L}}^2 \frac{\hat{q}_2^2}{2} + 2\Omega_0^2 \hat{q}_1 \hat{q}_2 \,, \tag{10.52}$$

где $\hat{q}_k$, $\hat{p}_k$ имеют одинаковую размерность $\propto \sqrt{\hbar}$. В представлении взаимодействия гамильтониан взаимодействия осредняется по осцилляциям на частоте ω_{L} и описывается усредненным последним членом, имеющим вид $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{I}} = \Omega_0^2 \hat{q}_1 \hat{q}_2 + \hat{p}_1 \hat{p}_2$. Соответствующая система укороченных уравнений движения имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}_1 &= \Omega_0 \hat{p}_2, \quad \dot{\hat{p}}_2 = -\Omega_0 \hat{q}_1 \,, \\ \dot{\hat{q}}_2 &= \Omega_0 \hat{p}_1, \quad \dot{\hat{p}}_1 = -\Omega_0 \hat{q}_2 \,, \end{aligned} \tag{10.53}$$

Здесь два верхних уравнения описывают в точности те же осцилляции, что и в (10.51). Третья же переменная ДА, очевидно, может быть моделирована только как переменная третьего, линейно независимого осциллятора, поскольку 2-е и 3-е уравнения содержат осцилляции, отсутствующие в (10.51). Добавляя в соответствующие затухания и шумы, получаем стохастические уравнения для моделирующих классических переменных x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\gamma x_1 + \Omega_0 x_2 + \xi_1 \,, \\ \dot{x}_2 &= -\Gamma x_2 - \Omega_0 x_1 + \xi_2 \,, \\ \dot{x}_3 &= -\Gamma x_3 + \xi_3 \,, \end{aligned} \tag{10.54}$$

моделирующих три затухающих осциллятора ДА. Первая пара описывает осцилляторы, моделирующие переменные ДА, спаренные полем, а третье описывает комплексную амплитуду неспаренной части поляризации. Переменные ξ_1, ξ_2, ξ_3 моделируют шумы ДА, не являясь, однако, реально их точным аналогом сразу по нескольким причинам. Во-первых, в классической теории при $T = 0$ (а в оптическом диапазоне частот в квантовой теории — и при обычных температурах) их интенсивность в силу формулы Найквиста равна нулю. Если же мы будем рассматривать

данные линейные осцилляторы как квантовые и сохраним при $T = 0$ в квантовой формуле Найквиста вакуумные флуктуации $\hbar\omega_{\rm L}/2$, предсказываемые квантовой формулой Планка, то все равно они не могут в линейной системе давать вклад в спектр флуоресценции, который для системы линейных осцилляторов, возбуждаемого гармонической силой на частоте $\omega_{\rm L}$, состоит только из когерентной линии на этой частоте. Однако, если правильно подобрать спектральную матрицу шумов ξ_1, ξ_2, ξ_3, то можно надеяться воспроизвести некоторые общие свойства флуоресценции ДА при условии, поскольку динамика осцилляций отображена правильно.

Таким образом, осцилляции Раби физически соответствуют колебаниям, имеющим место в системе двух связанных линейных осцилляторов, включая закономерности перехода от релаксационного движения к осцилляционному, при выборе в качестве коэффициента связи частоты Раби Ω_0. Собственные значения характеристической системы уравнений для классической задачи (10.54) при этом в точности совпадают с ненулевыми собственными значениями эволюционного супероператора ДА (10.50). В пределе $\Omega_0 \to 0$, когда движение носит чисто релаксационный характер, амплитуда одного из связанных осцилляторов соответствует разности населенностей, а сопряженная ей переменная отвечает компоненте поляризации, дополнительной к описываемой переменной x_3. При этом соответствующие $\lambda_{1,2}$ переходят в $-\gamma$, $-\Gamma$, т. е. в затухание населенностей и поляризации. С использованием (10.54) при произвольном выборе в качестве спектральной матрицы шумов диагональной матрицы с единичными интенсивностями рассчитан частотный спектр суммарной интенсивности флуктуаций $|x_1(\omega)|^2 + |x_2(\omega)|^2 + |x_3(\omega)|^2$, показанный на рис. 10.1(а).

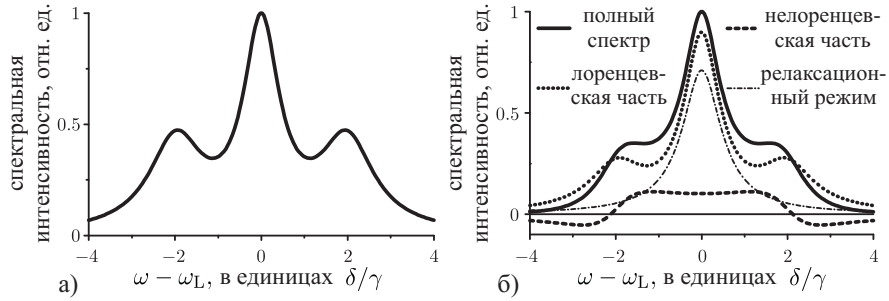

Рис. 10.1 Спектральная интенсивность флуоресценции ДА при нулевой расстройке лазерного поля в модели классических связанных осцилляторов (а) и в квантовой теории (б). Затухание поляризации соответствует чисто радиационному механизму: $\Gamma = \gamma/2$; частота Раби $\Omega_0 = 2\gamma$ соответствует осцилляторному режиму. Для квантового расчета представлены также лоренцевская и нелоренцевская составляющие и спектр для релаксационного режима при $\Omega_0 = \gamma/4$.

В квантовом случае расчет спектральных коэффициентов интенсивности по формуле (10.46) для осцилляторного режима дает следующие результаты:

$$C_0^+ = \frac{\Omega_0^2\gamma^2}{(\Omega_0^2+\Gamma\gamma)^2}, \quad C_3^+ = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_0^2+\Gamma\gamma}, \quad C_2^+ = (C_1^+)^*,$$

$$C_1^+ = \frac{\Omega_0^4(\Gamma-\gamma+i\Omega_\Gamma)}{(\Omega_0^2+\Gamma\gamma)\left[2\Omega_0^2(2\gamma+i\Omega_\Gamma)+\gamma(\Gamma-\gamma)(\gamma-\Gamma+i\Omega_\Gamma)\right]}.$$

С их использованием по формуле (10.49) можно записать и явное выражение для плотности спектра спонтанной флуоресценции. Соответствующее довольно громоздкое выражение для случая чисто радиационного затухания $\Gamma = \gamma/2$ приведено в монографии [3]. Результаты расчета по формуле (10.49) приведены на рис. 10.1(б). Там не показана когерентная линия, мощность которой задается коэффициентом C_0^+.

В асимптотике сильного поля отношение мощностей когерентной и несмещенной спонтанной компонент относятся как $C_0^+/C_3^+ = \gamma^2/\Omega_0^2$, т. е. насыщение атома приводит к подавлению когерентного отклика. В асимптотике слабого поля, наоборот, $C_1^+ + C_2^+ + C_3^+ \approx 2\Omega_0^2\Gamma_\mathrm{e}/\Gamma^2$, т. е. вся мощность излучения в отсутствие упругой дефазировки, $\Gamma_\mathrm{e} = \Gamma - \gamma/2 = 0$, приходится на когерентную линию, как это имеет место для классического гармонического осциллятора с затуханием в виде линейного трения, возбуждаемого гармонической силой. Упругая же дефазировка в классической модели, описываемой уравнением вида $\ddot{x}+\gamma x+\omega_\mathrm{L}^2(1+\xi_\mathrm{e})x = \Omega_0\omega_\mathrm{L}\cos\omega_\mathrm{L}t$, отображается случайной модуляцией ξ_e частоты перехода, которая и дает ненулевой вклад в спектр отклика на возбуждающую силу при $\Gamma_\mathrm{e} \neq 0$. Интересно отметить, что лоренцевские вклады в общем случае могут быть неположительны, если $\mathcal{R}\mathrm{e}\, C_k^+ < 0$, также как и их совокупный вклад. Однако, разумеется, полный спектр, включающий нелоренцевскую составляющую, всегда положителен, хотя последняя знакопеременна. При $\Omega_0 < |\Gamma-\gamma|/2$ все собственные значения, собственные векторы и коэффициенты $C_{1,2}^+$ вещественны, и нелоренцевский вклад в точности равен нулю. Хотя спектр в этой области претерпевает качественное изменение, оно замаскировано в форме линии, и для обнаружения требует соответствующей дополнительной обработки спектра. Физически важная информация содержится в скорости спадания спектра на больших частотах. В асимптотике $\omega \to \infty$ при произвольных интенсивностях поля спектр флуоресценции имеет вид

$$S(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma_\mathrm{e}\Omega_0^2}{(\Omega_0^2+\gamma\Gamma)\omega^2}, & \Gamma_\mathrm{e} > 0; \\ \dfrac{\Gamma\Omega_0^4}{(\Omega_0^2+\gamma\Gamma)\omega^4}, & \Gamma_\mathrm{e} = 0. \end{cases}$$

В присутствие упругой дефазировки спектр спадает как крылья лоренцевской линии, в то время как для чисто радиационного затухания закон спадания ω^{-4}, обусловленный выполнением соотношения $\sum_{k\neq 0} C_k^+ \lambda_k = 0$, отражает чисто квантовую специфику уширения. Математически она описывается в случае осцилляторного режима неположительностью вклада нелоренцевских составляющих, а в случае релаксационного режима — неположительностью коэффициентов интенсивности, которые в этом случае вещественны и дают суперпозицию лоренцевских линий, взаимно компенсирующих друг друга на крыльях спектра с точностью до величины $\sim \omega^{-4}$. Эта специфика чисто радиационного механизма релаксации ДА выходит за рамки квазиклассического приближения, описываемого гармоническим осциллятором. Последнее хотя и адекватно при слабых полях, но только для описания когерентной линии, в то время как некогерентный вклад отображает квантовую специфику ДА как в сильном, так и в слабом поле.

10.5.2 Спектр флуоресценции двухуровневого атома в слабом лазерном поле

Для расчета спектра флуоресценции в монохроматическом слабом поле применение изложенной супероператорной математической техники не является наиболее экономным способом получения результата, поскольку его можно получить непосредственно с использованием первого порядка теории возмущений для оператора временной эволюции по гамильтониану взаимодействия ДА с лазерным полем. Тем не менее, данное рассмотрение полезно для лучшего понимания того, как в супероператорном представлении отображается динамика переменных ДА различного типа — населенностей и поляризации.

Для слабого поля в корреляционной функции (10.45) следует подставить собственные значения (10.39), мнимые части которых определяют частоты, а реальные — ширины компонент спектра. В общем случае таких компонент четыре: две на частоте $\omega_{\rm L}$ — одна когерентная (не имеющая уширения) и одна уширенная, и две уширенных — одна на частоте атома $\omega_{12} = \omega_{\rm L} - \delta$ и одна на частоте двухфотонного рассеяния[2]

$$\omega_{\rm s} = \omega_{\rm L} + \delta = 2\omega_{\rm L} - \omega_{12}.$$

Однако, в случае слабого поля эти компоненты далеко не равноценны по интенсивности, которая определяется соответствующими коэффициентами

$$c_k^- = \left\langle 0 \left| \hat{\sigma}^- \right| k \right\rangle, \quad c_k^+ = \left\langle k \left| \hat{\sigma}^+ \right. \right\rangle \tag{10.55}$$

[2] При $\delta < 0$ это линия стоксова, а при $\delta > 0$ — антистоксова рассеяния.

в (10.45). Поскольку в слабом поле $|k\rangle$, $\langle k|$ примерно совпадают с собственными векторами лиувиллиана с нулевым лазерным полем, т. е. с релаксационным оператором, у которого подматрица $L_{\mathrm{r}\perp}$ дополнена в общем случае не малыми недиагональными элементами $\pm\delta$, описывающими частотную расстройку поля, то

$$|1\rangle \approx |\hat{\sigma}^{+}\rangle,\ |2\rangle \approx |\hat{\sigma}^{-}\rangle, \tag{10.56}$$

т. е. $\hat{\sigma}^{\pm}$ приближенно являются собственными векторами. Подставляя эти два собственных вектора в (10.55), мы видим, что в то время как для $k=1$ имеем $c_k^{+} \approx \langle k\,|\hat{\sigma}^{+}\,\rangle \approx 1$, и интенсивность определяется коэффициентом $c_k^{-} \approx \langle 0\,|\hat{\sigma}^{-}\hat{\sigma}^{+}\,\rangle$, т. е. средней населенностью $\langle \hat{n}_2\rangle$ возбужденного уровня, для $k=2$ оба коэффициента в (10.55) являются малыми. В отличие от $k=1$, для которого эти коэффициенты отвечают квантовым аналогам квадрата модуля комплексной амплитуды, $\hat{\sigma}^{-}\hat{\sigma}^{+}$, $\hat{\sigma}^{+}\hat{\sigma}^{-}$, для $k=2$ коэффициент c_k^{+} соответствует квадрату модуля комплексной амплитуды, $(\hat{\sigma}^{\pm})^2$. Это обстоятельство выделяет отклик на частоте атома, в то время как можно предположить, что отклик на частоте ω_{s} является асимптотически малым в слабом поле, т. е. при частотах Раби $\Omega_0 \ll \delta$. Однако, для точного решения этого вопроса необходимы соответствующие аналитические формулы, которые приводятся в п. 10.5.3. Для качественной оценки компонент отклика на частоте поля ω_{L}, которые соответствуют индексам $k=0,3$, рассмотрим соответствующие векторы $|0\rangle = |\hat{I}\rangle$ и $|3\rangle$. С учетом выражения для вектора $|3\rangle$ в формулах (10.44) и того обстоятельства, что в вакууме до температур $T \sim 10^4 K$ имеем $kT/\hbar\omega_{12} \approx 0$ и, согласно формулам (9.48) $w \approx \gamma$, получаем

$$|3\rangle \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,|\hat{n}_2\rangle, \qquad \hat{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\hat{n}_2$ есть оператор населенности верхнего уровня. При подстановке в (10.55) $k=0$ с учетом (10.43) оба обсуждавшиеся выше произведения не малы, в то время как при $k=3$ они оба являются малыми. Таким образом, в случае слабого поля из четырех компонент отклика не малыми ожидаются только когерентный отклик на частоте поля и уширенный отклик на частоте атома, имеющий спектральную ширину Γ. Соответствующий спектр, рассчитанный численно, показан на рис. 10.2.

С использованием асимптотических соотношений (10.40) можно получить и аналитическое выражение для спектральной плотности, рассчитываемой путем преобразования Фурье корреляционной функции (10.45). Более универсальным подходом, однако, оказывается использование теории возмущений в форме, основанной на рассмотрении в каче-

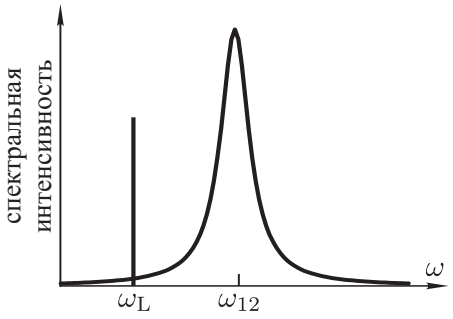

Рис. 10.2 Спектральная интенсивность флуоресценции ДА в присутствии слабого лазерного поля на частоте $\omega_{\rm L}$. Отношение скорости дефазировки к скорости радиационного распада $\Gamma/\gamma = 4$. Спектр имеет две компоненты: когерентную на лазерной частоте $\omega_{\rm L}$ и уширенную на частоте атома ω_{12}.

стве невозмущенного движения прецессии с полной частотой Раби, учитывающей и лазерное возбуждение атома.

10.5.3 Спектральная структура Апанасевича-Моллоу

В случае насыщающего поля все четыре описываемые корреляционной функцией (10.45) компоненты поля имеют один порядок. Относительно простое аналитическое выражение для спектральной плотности излучения в этом случае можно получить для случая хорошо разрешенных компонент, когда в обобщенном лиувиллиане (10.18) компоненты вектора вращающего момента

$$\mathbf{\Omega} = (\Omega_0 \cos\varphi,\ -\Omega_0 \sin\varphi,\ \delta)$$

имеют величину $\Omega = (\Omega_0^2 + \delta^2)^{1/2}$, существенно превосходящую скорость затухания Γ. Тогда, рассматривая переходной супероператор в представлении взаимодействия в форме

$$S_{\rm I}(t) = \exp(L_\Omega t)\mathrm{T}\,\exp\left[\int_0^t \exp(-L_\Omega\tau)L_{\rm r}\exp(L_\Omega\tau)d\tau\right] \qquad (10.57)$$

на временах $t = \Delta, \quad \Omega^{-1} \ll \Delta \ll \Gamma^{-1}$, разлагая вторую из экспонент до первого члена ряда Тейлора, выполняя интегрирование с отбрасыванием осциллирующих членов и представляя это разложение снова экспонентой с усредненным показателем, представляем выражение (10.57) в виде экспоненты с эффективным лиувиллианом

$$L_{\rm e} = -w_{\rm e}\,|\lambda_0\rangle\langle\lambda_3| - \gamma_{\rm e}\,|\lambda_3\rangle\langle\lambda_3| - (\Gamma_{\rm e} + i\Omega)\,|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| - (\Gamma_{\rm e} - i\Lambda_{\rm e})\,|\lambda_2\rangle\langle\lambda_2|\,. \qquad (10.58)$$

Здесь λ_k и $|\lambda_k\rangle$ — собственные значения и собственные векторы матрицы прецессии ДА в лазерном поле, которые заданы соотношениями (4.17), (4.19), (4.20), а параметры имеют вид

$$w_{\rm e} = \langle\lambda_0| L_{\rm r} |\lambda_3\rangle, \qquad \gamma_{\rm e} = \langle\lambda_3| L_{\rm r} |\lambda_3\rangle, \qquad \Gamma_{\rm e} - i\Lambda_{\rm e} = \langle\lambda_1| L_{\rm r} |\lambda_1\rangle\,. \quad (10.59)$$

Это выражение совпадает с общим видом релаксационного оператора, описываемым выражением (9.13). Оно задает усредненный эффект релаксации в собственном базисе оператора прецессии. Выражая параметры (10.59) через их исходные значения, получаем

$$\begin{gathered} w_{\rm e} = w\delta/\Omega, \qquad \Lambda_{\rm e} = \Lambda\delta/\Omega, \\ \gamma_{\rm e} = \gamma\delta^2/\Omega^2 + \Gamma\Omega_0^2/\Omega^2, \\ \Gamma_{\rm e} = \Gamma(\Omega^2+\delta^2)/2\Omega^2 + \gamma\Omega_0^2/(2\Omega^2). \end{gathered} \quad (10.60)$$

Для расчета соответствующего вида спектра остается воспользоваться корреляционной функцией (10.45), подставив туда собственные векторы, после чего она приводится к следующему выражению:

$$\begin{aligned} K(\tau) = \text{const}\ \exp(-i\omega_{\rm L}\tau)\ \Bigg\{ & \frac{\Omega_0^2}{2\Omega^2}\frac{w_{\rm e}^2}{\gamma_{\rm e}^2} + \frac{\Omega_0^2}{2\Omega^2}\left(1 - \frac{w_{\rm e}^2}{\gamma_{\rm e}^2}\right)\exp(-\gamma_{\rm e}\tau) + \\ & + \frac{(\Omega+\delta)^2}{4\Omega^2}\left(1 - \frac{w_{\rm e}}{\gamma_{\rm e}}\right)\exp[-\Gamma_{\rm e}\tau + i(\Omega+\Lambda_{\rm e})\tau)] + \\ & + \frac{(\Omega-\delta)^2}{4\Omega^2}\left(1 + \frac{w_{\rm e}}{\gamma_{\rm e}}\right)\exp[-\Gamma_{\rm e}\tau - i(\Omega+\Lambda_{\rm e})\tau)]\Bigg\}. \end{aligned} \quad (10.61)$$

После этого остается учесть, что скорости экспоненциального затухания в этом выражении на спектральном языке описывают ширину соответствующей лоренцевской линии, а спектр есть совокупность трех лоренцевских кривых на частотах $\omega_{\rm L}$, $\omega_{\rm L} \pm \Omega$ и когерентного отклика на частоте $\omega_{\rm L}$. Соответствующие результаты расчета приведены на рис. 10.3.

При этом в случае точного резонанса амплитуда когерентного отклика асимптотически обращается в ноль при $\Omega_0/\Gamma \to \infty$. Этот факт отражает роль насыщения, которое проявляется в пропорциональности отклика на внешнее воздействие величине разности населенностей уровней: в полностью насыщающем поле эта разность стремится к нулю. Для понимания качественной структуры спектра следует учитывать асимптотические соотношения для полной частоты Раби

$$\Omega \approx |\delta| + \frac{\Omega_0^2}{2\delta^2} \quad (10.62)$$

для случая больших расстроек δ и $\Omega \approx \Omega_0 + \delta^2/(2\Omega_0^2)$ для малых. Основное слагаемое в (10.62) для одной из компонент отклика $\omega_{\rm L} \pm \Omega$ со-

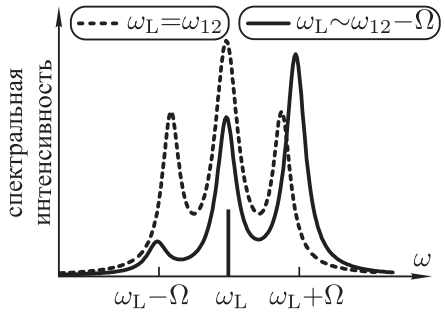

Рис. 10.3 Спектральная интенсивность флуоресценции ДА в сильном лазерном поле для двух различных значений лазерной частоты: для точного резонанса — $\omega_{\rm L}{=}\omega_{12}$, и для ненулевой расстройки — $\omega_{\rm L}{\approx}\omega_{12}-\Omega$. Спектр имеет четыре компоненты: одну когерентную и одну уширенную на частоте $\omega_{\rm L}$ и две уширенные, расположенные для случая относительно слабого затухания на частотах $\omega_{\pm}{\approx}\omega_{\rm L}{\pm}\Omega$.

ответствует невозмущенной атомной частоте $\omega_{12}=\omega_{\rm L}-\delta$, а добавка определяет сдвиг частоты — *квадратичный штарковский сдвиг*.

Интересно обсудить соотношение мощностей этих сателлитов, представленную в общем случае коэффициентами перед второй и третьей экспонентами в выражении (10.61). Подставляя в них выражения для релаксационных параметров (10.59), получаем

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{(\delta+\Omega)^2\left[1-w\Omega\delta/(\delta^2\gamma+g^2\Gamma)\right]}{4\Omega^2}\,,\\ I_4 &= \frac{(\Omega-\delta)^2\left[1+w\delta\Omega/(\delta^2\gamma+g^2\Gamma)\right]}{4\Omega^2}\,,\\ I_3-I_4 &= \frac{\delta[2\delta^2(\gamma-w)+2g^2(\Gamma-w/2)]}{2(\delta^2+g^2)^{1/2}(\delta^2\gamma+g^2\Gamma)}\,. \end{aligned} \tag{10.63}$$

Последнее соотношение показывает, что в случае чисто радиационного затухания в оптическом диапазоне, когда $w=\gamma=\Gamma/2$, интенсивности боковых сателлитов спектра совпадают при любом соотношении частоты Раби Ω_0 и расстройки поля δ. Это означает, что даже очень слабое поле при сколь угодно большой расстройке возбуждает на частоте четырехфотонного рассеяния $2\omega_{\rm L}-\omega_{12}$ в точности такое же излучение как и на частоте атома ω_{12}. Таким образом, в отсутствие упругой дефазировки и при достаточно большой ненулевой расстройке, превосходящей скорость распада, спектр флуоресценции не представляется ни двухкомпонентной структурой рис. 10.2, ни асимметричной структурой рис. 10.3, а имеет вид симметричной структуры рис. 10.3, подобной случаю точного резонанса. Это связано с тем, что нелинейный отклик двухуровневого атома на зеркальных компонентах спектра, как это было показано в п. 10.5.2, отвечает двум квадратичным комбинациям комплексной амплитуды, соответствующим квадрату модуля и квадрату самой амплитуды, из ко-

торых только вторая испытывает упругую дефазировку, не связанную с изменением энергии осцилляций. Более детально динамику этой дефазировки можно проследить, если вернуться от сокращенного марковского описания к стохастическому эволюционному супероператору в базисе прецессии на собственной частоте свободного атома ω_{12}:

$$S_{\xi\Omega_0}(\tau) = U^{-1}_{\xi\Omega_0}(\tau) \odot U_{\xi\Omega_0}(\tau). \tag{10.64}$$

Здесь индексы $\xi\Omega_0$ указывают на зависимость от шумовых переменных и от внешнего поля. В первом порядке теории возмущений по полю получаем

$$U_{\xi\Omega_0}(\tau) = \left[U_\xi(\tau) - i\frac{\Omega_0}{2} \int\limits_0^\tau U_\xi(\tau - s) \left(\hat\sigma^+ e^{-i\delta s} + \hat\sigma^- e^{i\delta s} \right) U_\xi(s) ds \right], \tag{10.65}$$

где

$$U_\xi(t) = \mathrm{T} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int\limits_0^t \left[\hat\xi_e(\tau)\hat\sigma_3 + \hat\xi_f^+(\tau)\hat\sigma^- e^{i\omega_{12}\tau} + \hat\xi_f^-(\tau)\hat\sigma^+ e^{-i\omega_{12}\tau} \right] d\tau \right\} \tag{10.66}$$

описывает только зависимость от неупругих шумов ξ_f и упругих шумов ξ_e. Подставляя выражение (10.65) в (10.64) и рассматривая билинейные комбинации $\sim \Omega_0^2$, нетрудно видеть, что отклик на частоте атома ω_{12} соответствует комбинации $\hat\sigma^+ \odot \hat\sigma^-$, а на четырехфотонной частоте ω_s — комбинации $\hat\sigma^+ \odot \hat\sigma^+$. При этом следует учитывать марковость флуктуаций, означающую, что время корреляции τ_c много меньше существенного масштаба времен s, $\tau \sim \tau_\mathrm{r}$, ответственного за формирование спектральных линий. Вследствие этого усреднение выполняется локально по времени и в рассматриваемых билинейных комбинациях для каждого момента времени существенны только одномоментные произведения шумовых переменных. Роль шумов ξ_f, ξ_e в преобразовании (10.66) в соответствии с анализом *Главы 9* качественно различна. Если ξ_f приводит к затуханию любых переменных атома, то ξ_e лишь дефазирует амплитуды колебаний, не влияя на энергию. Соответственно, только комбинация $\hat\sigma^+ \odot \hat\sigma^+$ чувствительна к шумам упругой дефазировки ξ_e, поскольку в $\hat\sigma^+ \odot \hat\sigma^-$ набеги фаз $\int \hat\xi ds$ взаимно компенсируются.

Глава 11
Эффекты преобразования упругой релаксации ДА сильным лазерным полем

11.1 Общие соотношения для параметров релаксационного супероператора

В случае сильного поля отправной точкой для описания собственной временной динамики ДА с учетом лазерного воздействия является представление его гамильтониана в форме (10.10). Ему соответствует представление собственной эволюции в форме супероператора двухчастотной прецессии (9.30), в котором матрица L_0 описывает свободную прецессию с частотой лазерного поля, т. е. $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \omega_\mathrm{L}$, а матрица L_Ω описывает лазерно индуцированную прецессию с векторами вращающего момента $\Omega_1 = \Omega_0 \cos\varphi$, $\Omega_2 = \Omega_0 \sin\varphi$, $\Omega_3 = \delta$. Двухчастотный супероператор (9.30) описывает собственное движение атома в присутствии поля. Применение его к исходным переменным ДА переводит последние в так называемое представление *одетых состояний*. Для обсуждения качественного смысла эффектов воздействия на ДА сильного поля в терминах гильбертова пространства естественно вернуться к произведению операторов временной эволюции, составляющих супероператор $\mathcal{S}_\Omega \mathcal{S}_\mathrm{L} = U_\Omega^{-1} U_\mathrm{L}^{-1} \odot U_\mathrm{L} U_\Omega$, где U_Ω описывает унитарное преобразование, соответствующее гамильтониану прецессии (10.13), а U_L — свободную прецессию ДА с частотой ω_L. Унитарный оператор двухчастотной прецессии описывается спектральным представлением

$$U_\mathrm{L}(t) U_\Omega(t) = \sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} \exp\left[-\frac{i}{2}(\Omega_k + \omega_l)t\right] |\omega_l\rangle \langle\omega_l\,|\Omega_k\,\rangle \langle\Omega_k|, \qquad (11.1)$$

где $|\omega_l\rangle$, $|\Omega_k\rangle$ и сопряженные им бра-векторы описывают собственные векторы гамильтонианов (10.11), (10.13). Это выражение имеет вид линейной комбинации операторов перехода $|\Omega_k\rangle \to |\omega_l\rangle$, осциллирующих с четырьмя частотами $(\pm\omega_\mathrm{L} \pm \Omega)/2$. При взаимодействии с возмущения-

ми каждое из четырех слагаемых проявляет себя так же, как обычное состояние с той же самой боровской частотой, представленной соответствующим весом $C_{lk} = \langle \omega_l \,|\Omega_k\,\rangle$. Эти состояния называются *квазиэнергетическим*, а соответствующие частоты — их *квазиэнергиями*. Эти состояния изображаются соответствующими энергиями, как это показано на рис. 11.1-*(a)*, обобщающими обычные энергетические уровни ДА.

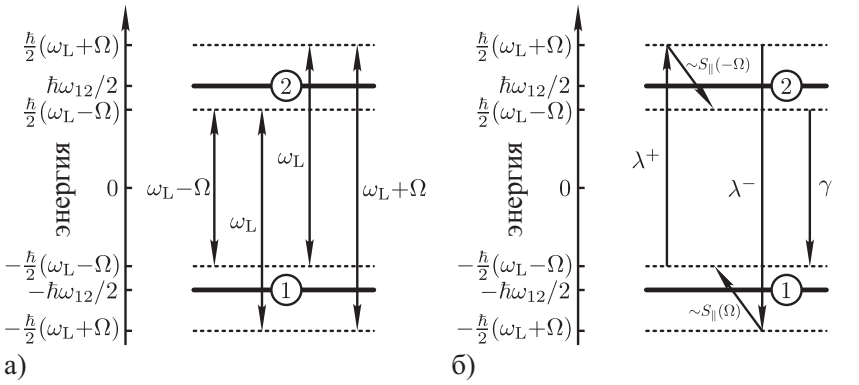

Рис. 11.1 (а) Структура квазиэнергетических уровней ДА, одетого лазерным полем. (б) Наиболее интенсивные каналы релаксации одетого ДА: лазерно индуцированные распад и накачка с участием квантов дефазирующего резервуара и радиационный распад.

При нулевой интенсивности поля векторы $|\omega_k\rangle$, $|\Omega_k\rangle$ совпадают, и возможные частоты имеют только значения $\pm\omega_{12}/2$, поскольку $\Omega_k = \pm\Omega/2 \to \pm\delta/2, \omega_L - \delta = \omega_{12}, -\omega_L + \delta = -\omega_{12}$, а для других комбинаций вида $\pm\omega_L + \delta$ коэффициенты C_{lk} обращаются в ноль. Таким образом, резонансные переходы в ДА, "одетом" полем, описываются как переходы в четырехуровневой системе с энергиями ДА, расщепленными на пары квазиэнергетических состояний, отличающихся на величину *кванта Раби* $\hbar\Omega$.

Выражения (9.33) задают области частот шумов, существенные для взаимодействия с ДА. Они в данном случае соответствуют частотам

$$\omega = 0,\, 0 \pm \Omega,\, \pm\omega_L,\, \omega_L \pm \Omega,\, -\omega_L \pm \Omega.$$

Проявление зависимости результата воздействия шумов от внешнего поля возможно лишь в том случае, если отклонения указанных частот от соответствующих им значений

$$\omega = 0,\, 0 \pm |\delta|,\, \pm\omega_L,\, \omega_L \pm |\delta|,\, -\omega_L \pm |\delta|$$

для нулевого поля с $\Omega_0 = 0$ не малы по сравнению с соответствующими спектральными ширинами шумов. Компоненты $\hat{\xi}_{1,2}$ шума в гамильтони-

ане (9.1), действующие на высоких частотах $\sim \omega_{\rm L}$ для ДА реально описывают неупругие шумы вакуумного электромагнитного поля и приводят к радиационной релаксации свободного атома в вакууме. Это очевидно из вида соответствующих им членов $\hat{\xi}_{1,2}\hat{\sigma}_{1,2}$ гамильтониана (9.1), которые содержат недиагональные матричные элементы в матрицах $\hat{\sigma}_{1,2}$. В спектре шума $\hat{\xi}_{1,2}(t)$ существенны лишь те частоты, на которых происходят собственные осцилляции атомных переменных $\hat{\sigma}_{1,2}(t)$. Соответственно, для этих шумов отличие величины $\omega_{\rm L} \pm \Omega$ от ω_{12} может быть существенным, лишь если частота Ω сравнима с самой частотой атомного перехода ω_{12}, которая согласно п. 9.3 является шириной их спектра. Соответственно, воздействие лазерного поля на соответствующую этим шумам поперечную релаксацию несущественно[1] для полей с напряженность меньше порядка внутриатомной напряженности поля (поскольку именно для таких полей частота Раби имеет порядок частоты атомного перехода). Основной случай, когда существенно преобразование процесса релаксации, связан с низкочастотными шумами упругой дефазировки, описываемой компонентой $\hat{\xi}_3$, которые взаимодействуют с атомной переменной $\hat{\sigma}_3(t)$, содержащей только постоянную во времени компоненту и осцилляции на полной частоте Раби. В то время как для марковской упругой дефазировки свободного атома имеет значение только спектральная плотность этих шумов на нулевой частоте, то в случае сильного поля существенны также и области частот $\pm\Omega$. При этом возможны два типа эффектов: одни связаны с конечной шириной соответствующей спектральной плотности $S_{\rm ph}(\omega)$, а другие — с существенностью величины кванта $\hbar\Omega$ по сравнению с тепловой энергией kT, отображаемой асимметрией спектральной плотности $S_{\rm ph}(-\omega) > S_{\rm ph}(\omega)$. Поскольку в реальных условиях динамика свободного атома является марковской, то соответствующие спектральные ширины существенно больше скоростей затухания свободного атома, и, соответственно, проявление эффектов преобразования релаксации возможно, лишь если частота Раби существенно больше скоростей затухания, т. е. поле заведомо должно удовлетворять условию насыщения (10.4) в его усиленном варианте — условию *сильного поля*

$$\Omega_0 \tau_{\rm r} \gg 1.$$

На спектральном языке это означает, что перестройка релаксации происходит только в том случае, когда спектральные компоненты спектра флуоресценции полностью разрешены. Эффекты преобразования релаксации резонансным полем впервые были рассмотрены в работе Блоха [44], посвященной спиновому магнитному резонансу. В более позднее время эти эффекты широко обсуждались в приложении к оптическим перехо-

[1] Однако, в специальных случаях, например, в случае атомов в резонаторе или в некоторой специфической среде ширина спектра неупругих шумов может иметь существенно меньшую величину, и эффекты преобразования связанных с ними процессов релаксации могут быть также существенны.

дам в атомах и их существенность в оптическом диапазоне была доказана экспериментально [45].

Из общего выражения (9.32) для параметров матрицы Q, введенной выражением (9.8), для рассматриваемого случая двухчастотной прецессии в лазерном поле с учетом естественного предположения о статистической независимости шумовых компонент $\hat{\xi}_k$, получаем следующий набор параметров:

$$\lambda_3 = \frac{\delta^2}{\Omega^2} S_{\parallel}(0) + \frac{\Omega_0^2}{2\Omega^2} \left[S_{\perp}(\omega_{\rm L}) + S_{\perp}(-\omega_{\rm L}) \right],$$

$$\lambda_1 = \frac{\Omega_0^2}{2\Omega^2} S_{\parallel}(\Omega) + \frac{(\Omega-\delta)^2}{4\Omega^2} S_{\perp}(\omega_{\rm L}) + \frac{(\Omega+\delta)^2}{4\Omega^2} S_{\perp}(-\omega_{\rm L}), \tag{11.2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\Omega_0^2}{2\Omega^2} S_{\parallel}(-\Omega) + \frac{(\Omega+\delta)^2}{4\Omega^2} S_{\perp}(\omega_{\rm L}) + \frac{(\Omega-\delta)^2}{4\Omega^2} S_{\perp}(-\omega_{\rm L}).$$

Из соотношений (9.11) для собственных значений релаксационного супероператора (9.13) с учетом того, что они при нулевом поле соответствуют невозмущенным релаксационным параметрам w, γ, $\mathit{\Gamma}$, $\mathit{\Lambda}$, получаем явные выражения

$$w_{\rm e} = w\frac{\delta}{\Omega} + \left(\mathit{\Gamma} - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\,\mu, \qquad \mathit{\Lambda}_{\rm e} \approx \mathit{\Lambda}\frac{\delta}{\Omega},$$

$$\gamma_{\rm e} = \gamma\frac{\Omega^2+\delta^2}{2\Omega^2} + \left(\mathit{\Gamma} - \frac{\gamma}{2}\right) \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2}\,\chi, \tag{11.3}$$

$$\mathit{\Gamma}_{\rm e} = \mathit{\Gamma}\frac{\Omega_0^2\chi + 2\delta^2}{2\Omega^2} + \gamma\frac{\Omega_0^2}{4\Omega^2}(3-\chi),$$

где

$$\chi = \mathcal{R}\mathrm{e}\,\frac{S_{\parallel}(\Omega) + S_{\parallel}(-\Omega)}{2S_{\parallel}(0)}, \tag{11.4}$$

$$\mu = \mathcal{R}\mathrm{e}\,\frac{S_{\parallel}(\Omega) - S_{\parallel}(-\Omega)}{2S_{\parallel}(0)}. \tag{11.5}$$

Эти соотношения обобщают осредненные сильным полем релаксационные параметры (10.60), не учитывающие эффекты зависимости спектральной плотности дефазирующего шума от частоты оптических нутаций. Собственным базисом для релаксационного оператора в обоих является базис, построенный из собственных векторов $|\lambda_{1,2,3}\rangle$ матрицы прецессии в лазерном поле.

11.2 Спектры флуоресценции с учетом эффектов преобразования релаксации

Спектр флуоресценции в условиях преобразования релаксации может быть рассчитан с помощью той же самой формулы (10.61), определяющей корреляционную функцию излучаемого поля и в отсутствие этого эффекта. В том выражении коэффициенты перед экспонентами описывают полную мощность соответствующей лоренцевой спектральной линии. С учетом выражений (11.3) для релаксационных параметров через спектральные плотности шумов оно описывает всю совокупность разнообразных спектральных эффектов, связанных с преобразованием релаксации внешним полем.

Эффекты преобразования релаксации проявляются через значения параметров χ, μ, описывающих эффекты. Эффекты, связанные с уменьшением параметра χ в сильных полях на временном языке описываются как следствие осреднения относительно медленных шумовых флуктуаций быстрыми осцилляциями Раби. Из выражений (11.4), (11.5) при малых частотных расстройках лазерного поля, когда $\Omega_0 \gg \delta$, очевидны следующих два эффекта. Во-первых, когда упругая дефазировка преобладает над неупругой, т. е. $\Gamma - \gamma/2 \gg \gamma$, преобразованные величины γ_e, Γ_e, определяемые в этом случае согласно (11.3), в основном, членами $\Gamma\chi$, $\Gamma\mu$, при достижении частотой Раби значений, сравнимых с шириной спектра шумов, уменьшаются. Соответственно, сужаются ширины спонтанных компонент отклика. Во-вторых, в отсутствие эффектов преобразования релаксации при нулевой расстройке спектр флуоресценции симметричен. Это следует из того, что в данном приближении следует полагать $S_\parallel(-\Omega) = S_\parallel(\Omega) = S_\parallel(0)$, вследствие чего $\mu = 0$ и, соответственно, при резонансе точно равен нулю параметр накачки w_e. Согласно выражению (10.61) спектр в этом случае должен быть симметричен, а интенсивность когерентной компоненты равна нулю, что и отражено в соответствующем спектре на рис. 10.2. Результат (10.61) описывает подавление когерентной составляющей сильным полем, которое следует из того обстоятельства, что когерентный отклик определяется разностью населенностей уровней, которая в сильном поле обращается в ноль. Ненулевая величина кванта $\hbar\Omega$ приводит к ненулевой величине параметра μ. В результате спектр становится асимметричным и появляется ненулевая когерентная составляющая на частоте ω_L. Эти закономерности видны при сопоставлении спектров *(а), (б)* на рис. 11.2.

Наиболее интересно проследить с помощью соотношения (10.61) возможные предельные случаи перестройки спектральной структуры в сильном поле. Выпишем соответствующие ему выражения для мощностей спектральных компонент, которые имеют с точностью до множителя вид

$$I_0 = \frac{w^2}{\gamma^2}\frac{\Omega_0^2}{2\Omega^2},$$

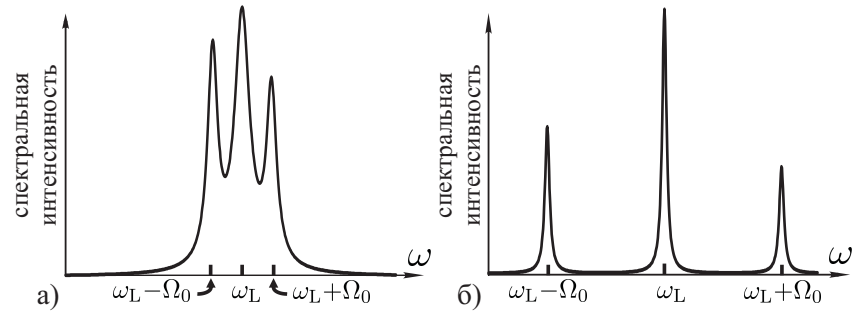

Рис. 11.2 Сужение линии флуоресценции сильным лазерным полем в условиях точного резонанса. Эффекты преобразования релаксации в случае (а) мало существенны, в случае (б) явно выражены: ширины линий меньше и асимметрия более существенна в относительном выражении. Параметры имеют следующие значения: $\Gamma_0 = 10\gamma_0$, $\tau_c = \Gamma_0^{-1}$, $kT/\hbar = 16\Gamma_0$; (a) — $\Omega_0 = \Gamma_0$, (b) — $\Omega_0 = 3\,\Gamma_0$. Масштаб по осям для графиков (а), (б) одинаков.

$$I_3 = \left(1 - \frac{w^2}{\gamma^2}\right) \frac{\Omega_0^2}{2\Omega^2}, \tag{11.6}$$

$$I_{1,2} = \left(1 \mp \frac{w}{\gamma}\right) \frac{(\Omega \pm \delta)^2}{4\Omega^2}.$$

При этом в выражении для w_e в (11.3) в качестве w следует с учетом результатов (9.48) использовать $w = \gamma$. Сумма мощностей когерентной и несмещенной уширенной составляющих равна Ω_0^2/Ω^2, а сумма всех при малых или больших расстройках равна Ω_0^2/Ω^2. Изменения распределения интенсивностей компонент определяются отношением w/γ.

Один из возможных предельных случаев достигается при малых расстройках, когда можно полагать $\delta = 0$. Он достигается, если упругая дефазировка настолько интенсивна, что выполнены одновременно условие *вымораживания* $\hbar\Omega/kT \gg 1$ квантов $\hbar\Omega$ и условие $(\Gamma - \gamma/2) \gg \gamma/4$. Это означает, что шум упругой дефазировки преобладает над неупругими шумами не только в окрестности нулевой частоты, но и на частотах $\sim kT/\hbar$. В этом случае получаем $\mu \approx -\chi$, $w/\gamma = -1$, и две из составляющих имеют нулевую амплитуду:

$$I_0 \approx I_1 \approx \frac{1}{2}, \qquad I_2 \approx I_3 \approx 0. \tag{11.7}$$

Таким образом, излучаемая мощность делится поровну между когерентной компонентой и левым сателлитом. Это случай показан на рис. 11.3-*a*.

Другой предельный случай имеет место также в условиях вымораживания для больших расстроек $|\delta| \gg \Omega_0$, т. е. при возбуждении, далеком от резонанса. Тем не менее, ненулевой отклик возможен, если интенсивность упругой дефазировки настолько велика, что обеспечивает ненуле-

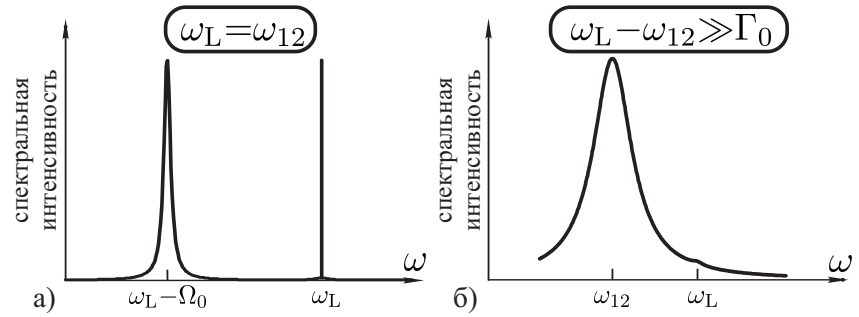

Рис. 11.3 Предельные случаи спектров флуоресценции при преобразовании релаксации сильным лазерным полем. Значения параметров: (а) — резонансный случай — $\Gamma_0 = 50\gamma_0$, $\tau_c = 0.5$, $10^{-2}\Gamma_0^{-1}$, $kT/\hbar = 0.2$, $\Omega_0 = 20\Gamma_0$, $\delta = 0$; (б) — нерезонансный случай — $\Gamma_0 = 150\gamma_0$, $\tau_c = 0.6$, Γ_0^{-1}, $kT/\hbar = 0.3\Gamma_0$, $\Omega_0 = 1.3\Gamma_0$, $\delta = 3.3\Gamma_0$. Масштабы по осям для графиков (а), (б) различны.

вое значение некогерентного отклика на частоте атома. Это выполняется при положительных расстройках $\delta > 0$, если выполнены условия

$$\left(\Gamma - \frac{\gamma}{2}\right)|\mu| \gg \gamma\frac{\delta^2}{\Omega_0^2}, \qquad \mu = -\chi. \tag{11.8}$$

Здесь мощность некогерентной составляющей пропорциональна фактору $\Gamma - \gamma/2$, в то время как когерентной — фактору γ, определяемому, в свою очередь, величиной d_{12}^2. Неравенство в (11.8) может достигаться только за счет не обнуляющейся при больших расстройках спектральной интенсивности на отрицательной частоте. Тогда опять же $w/\gamma = -1$ при $\delta > 0$, т. е. при $\omega_L > \omega_{12}$ получаем $I_1 = 1$, в то время как мощность когерентной компоненты I_0 равна нулю из-за малого при больших расстройках значения коэффициента $\Omega_0^2/2\Omega^2$ в формуле (10.61). Этот случай показан на рис. 11.3-*(а)*. При отрицательных расстройках флуоресценция отсутствует вообще, точнее, является малой в рассматриваемой асимптотике больших расстроек.

Отметим, что в приведенных предельных соотношениях взаимодействие с резервуаром, соответствующим упругой дефазировке, вымороженно, и спектральная плотность описывает только вакуумную компоненту, т. е. просто константу взаимодействия с резервуаром на частоте Ω. Соответственно, все процессы излучения сводятся к излучению либо на частоте атома, имеющего место в резонансном случае *(а)*, либо на комбинированной частоте, связанной с передачей в резервуар кванта на частоте Ω, что возможно также и в отсутствие резонанса в случае *(б)*. В нерезонансном случае когерентный отклик имеет малую величину, в то время как при достаточно интенсивном взаимодействии с упругим резервуаром мощность рассеянного излучения имеет величину, совпадающую

с полной мощностью флуоресценции при резонансе. При отрицательных расстройках такое рассеяние невозможно. Наличие в спектре рассеянного излучения на рис. 11.3-*(б)* ненулевой интенсивности на частотах $\omega > \omega_{\rm L}$ является спецификой марковского приближения, в котором динамика затухания описывается экспоненциальным распадом, предполагаемым справедливым на сколь угодно малых временах. Это приводит к неограниченно широкому хвосту спектра флуоресценции, описываемого лоренцевым контуром. Однако, мощность, попадающая в "запрещенную" область, имеет параметр малости $\Gamma_{\rm t}/\Omega \leq \tau_{\rm c}/\tau_{\rm r}$, который заведомо мал в условиях справедливости марковского приближения.

11.3 Инверсия двухуровневого атома монохроматическим полем

Изложенная в *Главе 9* и п. 11.1 теория, хотя и сформулирована замкнутым образом в терминах релаксации чисто двухуровневой системы, в действительности учитывает и процессы, которые в неусредненном описании существенно выходят за рамки исходного ДА. Это возможно потому, что при расчете релаксационного супероператора учитываются все существенные процессы в многоуровневой составной системе ДА+резервуар. Появление в теории двух параметров w, γ, описывающих релаксацию неосциллирующих переменных ДА, учитывает возможность эффектов "накачки" наряду с обычным затуханием к нижнему энергетическому уровню. При описании же динамики ДА в монохроматическом поле только с учетом затухания возможность создания инверсной населенности отсутствует, поскольку индуцированные полем вероятности перехода вверх и вниз одинаковы, а вероятность спонтанного распада преобладает над вероятностью спонтанного перехода вверх (за счет тепловых флуктуаций поля). В описанной же полной теории дело обстоит принципиально иначе, поскольку в расчетах взаимодействие атомных нутаций с резервуаром учитывается на квантовом уровне. Частным случаем такого взаимодействия являются столкновения ДА с атомами буферного газа. Существенной спецификой буферного газа является то, что он создает только механизм упругой дефазировки и не влияет, в отличие от атомов того же самого газа, на неупругую дефазировку благодаря тому что электронные переходы буферного газа нерезонансны исследуемому переходу ДА. Такие столкновения при действии сильного лазерного поля называются *оптическими*.

Расчет стационарной разности населенностей выполняется с помощью соотношения

$$n_2 - n_1 = \langle \mathrm{Tr}\, \hat{\rho}\mathcal{S}_{\rm r}(t)\mathcal{S}_{\Omega}(t)\mathcal{S}_0(t)\hat{\sigma}_3\rangle_t,$$

включающего усреднение по осцилляциям Раби. Учитывая совпадение собственных векторов для $\mathcal{S}_\text{r}$, $\mathcal{S}_\Omega$ и выделяя только собственные векторы, отвечающие в спектральных разложениях для матриц лиувиллианов L_r, L_Ω нулевым собственным значениям, с учетом соотношений (9.12) получаем

$$n_2 - n_1 = \langle 0\,|3\rangle\,\langle 3\,|\hat{\sigma}_3\,\rangle\,. \tag{11.9}$$

Здесь $\langle 0|$, $|3\rangle$, $\langle 3|$ описывают собственные векторы релаксационного оператора, связанные соотношениями (9.12) с собственными векторами матрицы прецессии. Подставляя их явные выражения с использованием (4.19), получаем

$$n_2 - n_1 = -\frac{\delta}{\Omega}\frac{w}{\gamma}. \tag{11.10}$$

Выражая это соотношение через спектральные плотности дефазирующего шума, для населенности верхнего уровня получаем

$$n_2 = 0.5\,\frac{\gamma + 4[(1+\delta/\Omega)S_\parallel(-\Omega) + (1-\delta/\Omega)S_\parallel(\Omega)]}{(1+2\delta^2/\Omega_0^2)\gamma + 4[S_\parallel(-\Omega) + S_\parallel(\Omega)]}. \tag{11.11}$$

В условиях преобладания упругой дефазировки над радиационным затуханием при малых расстройках отсюда следует оценка

$$n_2 = 0.5 + \frac{\delta}{2\Omega}\tanh\left(\frac{\hbar\Omega}{2kT}\right). \tag{11.12}$$

Ограниченность области справедливости этой формулы связана со спаданием спектральной плотности $S_\parallel(\pm\Omega)$ при возрастании Ω.

Рассмотрим дефазировку за счет столкновений ДА с атомами буферного газа. При этом ограничимся рассмотрением столкновений в приближении диффузионного процесса, что соответствует учету только столкновений с большим прицельным радиусом, которые сбивают фазу на малую величину. Эти расчеты строго неприменимы к ближним столкновениям, которые должны рассматриваться в терминах импульсного марковского процесса. Тем не менее, сам факт инвертирующего воздействия сильного поля качественно сохраняется и для этой компоненты столкновительного уширения, поэтому данный анализ вполне приемлем для приближенных оценок новых эффектов. Для спектра дефазирующего шума можно использовать аппроксимацию, следующую из ударной теории [46]

$$S_\parallel(|\omega|) = S_\text{F}(1 + 0.0064x^4)\exp(-x), \qquad x = |\omega|/\delta_\text{F}$$

с параметрами S_F, δ_F, которые стандартным образом выражаются через концентрацию атомов буферного газа, их тепловые скорости и радиус Вайскопфа, получаемые из экспериментальных данных. Радиус Вайскопфа определяется как значение прицельного радиуса траектории буфер-

ного атома, для которой сбой фазы за соударение равен π. Соударения с прицельными радиусами такого порядка и меньше должны описываться как импульсный процесс, возбуждающий в ДА ступенчатый марковский процесс. Дальние столкновения с малым сбоем фазы приводят к диффузионному процессу.

Соответствующие расчетные кривые зависимости населенности верхнего уровня от частотной расстройки для перехода $5^2S_{1/2}$–$5^2P_{1/2}$ в рубидии представлены на рис. 11.4 для температуры $T = 500$K для нескольких интенсивностей лазерного поля и значений давления p буферного газа — ксенона.

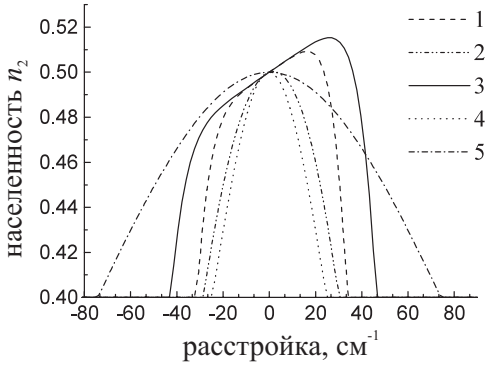

Рис. 11.4 Расчетные кривые населенности верхнего уровня для рубидия при различных давлениях p буферного газа и интенсивностях I лазерного поля:
p=1 атм, I=0.1 МВт/см^2 (1);
p=1 атм, I=10 МВт/см^2 (2);
p=10 атм, I=0.1 МВт/см^2 (3);
p=10 атм, I=10 МВт/см^2 (4);
p=10 атм, I=100 МВт/см^2 (5).

Приведенные расчеты показывают, что для ДА в газовой фазе ожидаемые величины инверсии незначительны. Значительно большие инверсии возможны для примесных атомов или молекул в низкотемпературных матрицах [47]. Тем не менее, этот эффект проявляется в индуцированном излучении, возбуждаемом сильным лазерным полем на частоте атомного перехода как следствие инверсии, приводящей к замене поглощения спонтанного излучения на усиление. Этот факт был подтвержден экспериментами в смеси паров рубидия и аргона [48].

Для наглядного объяснения физического смысла описанных процессов следует обратиться к формуле (11.11) для стационарной населенности верхнего уровня. Величины $S_{\parallel}(\pm\Omega)$ описывают скорости переходов между соседними квазиуровнями за счет оптических столкновений, в которых атомом поглощается или испускается квант энергии поступательного движения, которое есть резервуар, обусловливающий "упругую дефазировку". Эта дефазировка, однако, является действительно упругой только в случае малых значений кванта $\hbar\Omega$, когда вероятности его поглощения и испускания одинаковы, т. е. в отсутствие квантового вымораживания резервуара: $\hbar\Omega \ll kT$. Второе слагаемое в числителе формулы (11.11) описывает скорость λ^+ индуцированной оптическими столкновениями накачки на верхнюю пару квазиуровней. Сомножители перед величинами S описывают степень вовлеченности соответствующего

квазиуровня. Больше вовлечен тот, который лежит на квазиэнергетической схеме рис. 11.1-*(б)* ближе к реальному уровню. Второе же слагаемое в знаменателе, как легко видеть, может быть представлено как сумма выражения в квадратных скобках в числителе и такого же выражения с заменой $\delta \to -\delta$. Последнее описывает индуцированный оптическими столкновениями распад на нижнюю пару уровней со скоростью λ^-. При положительных расстройках δ согласно формуле (11.11) в накачке преобладает составляющая с $S_\parallel(-\Omega)$, которая и показана на схеме рис. 11.1-*(б)*. Ей соответствует процесс с испусканием кванта в резервуар, т. е. при оптическом столкновении передача энергии осцилляций Раби в поступательное движение сталкивающихся атомов. В то же время наиболее вовлеченный в оптически индуцированное затухание квазиуровень, как это видно из рис. 11.1-*(б)*, распадается через процесс с поглощением кванта из резервуара. Таким образом, очевидно, что при положительных расстройках при оптических столкновениях лазерно индуцированная скорость накачки несколько превосходит скорость лазерно индуцированного распада. Изложенная теория дает метод определения необходимых условий для преобладания соответствующей скорости создания инверсии $\lambda^+ - \lambda^-$ над скоростью спонтанного распада.

Глава 12
Некоторые приложения к N-уровневому атому

Использование компьютерных методов выполнения аналитических расчетов позволяет получить аналитические формулы для описания существенно более сложных резонансных откликов атомов, чем рассмотренные в *Главах 9–11* резонансы в двухуровневых системах. В этом случае использование супероператорной техники расчетов особенно эффективно, поскольку в силу большой размерности задач даже простое выписывание матриц, описывающих эволюционные супероператоры, становится технически сложной задачей. Супероператорная техника позволяет избежать этих громоздких выкладок, предоставляя метод для проведения необходимых алгебраических операций в абстрактной символической форме. После этого нужные супероператорные матричные элементы могут быть аналитически рассчитаны на компьютере с последующим использованием для решения рассматриваемых прикладных задач.

12.1 Расчет лиувиллиана N-уровневого атома с использованием символического представления

Лиувиллиан N-уровневого атома в лазерном поле в приближении вращающегося поля, так же как и в двухуровневом случае (см. п. 10.1), имеет общее представление в виде суммы вкладов

$$\mathcal{L}_{\mathrm{t}} = \mathcal{L}_{\mathrm{r}} + \mathcal{L}_{\mathrm{e}} + \mathcal{L}_{\delta} + \mathcal{L}_{\mathrm{I}}. \tag{12.1}$$

Здесь $\mathcal{L}_{\mathrm{r}}$ — супероператор радиационного затухания, $\mathcal{L}_{\mathrm{e}}$ — супероператор упругой дефазировки, $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ — супероператор взаимодействия с лазерным полем и $-\mathcal{L}_{\delta}$ — супероператор лазерной расстройки, дополняющий выбранный супероператор невозмущенной эволюции до супероператора свободной динамики атома в нулевом лазерном поле. Последний вклю-

чает соответствующие расстройки всех действующих лазерных полей с учетом того, что свободная прецессия с частотами этих полей включена в супероператор невозмущенной динамики.

Радиационное затухание представляется стандартным лиувиллианом, скомбинированным из супероператора перехода населенностей, представленного проектором $\hat{P}_{lk} \odot \hat{P}_{kl}$, и супероператора затухания поляризации, представленного антикоммутатором $\left[\hat{P}_{kk}, \odot\right]_+$:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{r}} = \sum_{kl} \gamma_{kl} \left(\hat{P}_{lk} \odot \hat{P}_{kl} - \frac{1}{2} \left[\hat{P}_{kk}, \odot\right]_+ \right), \tag{12.2}$$

где двумерный массив γ_{kl} для $k > l$ описывает скорости спонтанного распада и скорости накачки для $k < l$. Упругая дефазировка представлена супероператором $\mathcal{L}_{\mathrm{e}}$, выраженным в терминах квадратов коммутаторов и определяемым конкретной моделью дефазировки. Целесообразно выделить два различных типа дефазировки. В первом случае рассматривается только внутренняя дефазировка в системе двух электронных состояний k и $l > k$ и, в соответствии с микроскопической природой упругой дефазировки, обусловленной слабыми столкновениями [49] как случайной модуляции частоты перехода, описывается соответствующим случайным супероператором частотного сдвига $-(i/2)\xi(t)[\hat{P}_{kk} - \hat{P}_{ll}, \odot]$, где $\xi(t)$ — флуктуационное смещения частоты перехода. Результирующий усредненный релаксационный супероператор имеет вид

$$\mathcal{L} = -(\Gamma_{\mathrm{in}}^{kl}/4) \left[\hat{n}_{kl}, \odot\right]^2,$$

где $\hat{n}_{kl} = \hat{P}_{ll} - \hat{P}_{kk}$ — оператор инверсии населенностей kl-подсистемы и $\Gamma_{\mathrm{in}}^{kl}$ — соответствующая скорость дефазировки. Этот тип чистой дефазировки связан не только с дефазировкой самого kl-перехода, но и вносит вклад в дефазировку всех переходов, смежных с рассматриваемым. Тем не менее, удобно выделить дефазировку только выделенного kl-перехода, используя разложение

$$[\hat{n}_{kl}, \odot]^2 = 4(\hat{P}_{kk} \odot \hat{P}_{ll} + \hat{P}_{ll} \odot \hat{P}_{kk}) + [\hat{I}_{kl}, \odot]^2,$$

где $\hat{I}_{kl} = \hat{P}_{ll} + \hat{P}_{kk}$ — оператор суммарной населенности kl-подсистемы. Соответствующий вклад первого члена

$$\mathcal{L}_{\mathrm{in}}^{kl} = -\Gamma_{\mathrm{in}}^{kl}(\hat{P}_{kk} \odot \hat{P}_{ll} + \hat{P}_{ll} \odot \hat{P}_{kk}) \tag{12.3}$$

описывает чисто внутреннюю дефазировку без влияния на смежные переходы. Если использовать все независимые параметры $\Gamma_{\mathrm{in}}^{kl}$, то возможно представить дефазировку всех переходов, используя только соотношение (12.3). Однако, в целях простоты отображения физической природы дефазировки, удобно ввести другой вклад, связанный с одинаковой дефа-

зировкой через оба k-й и l-й уровень любого другого уровня в отсутствие воздействия на сам kl-переход, то-есть "внешнюю" дефазировку:

$$\mathcal{L}_{\rm ex}^{kl} = -\Gamma_{\rm ex}^{kl}\left[\hat{I}_{kl}, \odot\right]^2, \tag{12.4}$$

где $\Gamma_{\rm ex}^{kl}$ — соответствующая скорость дефазировки. Соответственно, полный супероператор упругой дефазировки описывается суммой

$$\mathcal{L}_{\rm e} = \sum_{k<l}\left(\mathcal{L}_{\rm in}^{kl} + \mathcal{L}_{\rm ex}^{kl}\right). \tag{12.5}$$

Супероператор лазерной расстройки зависит от типа рассматриваемого резонанса и обычно может быть представлен в форме антисимметрического супероператора, представленного в виде коммутатора с операторами населенностей

$$\mathcal{L}_{\delta} = i\sum_{k}\delta_k\left(\hat{P}_{kk}\odot - \odot\,\hat{P}_{kk}\right), \tag{12.6}$$

где δ_k — массив частотных расстроек. Взаимодействие с лазерным полем может быть представлено в форме антисимметрического коммутатора с операторами поляризации

$$\mathcal{L}_{\rm I} = -\frac{i}{2}\sum_{k<l}\Omega_{kl}\left[(\hat{P}_{kl} + \hat{P}_{lk}), \odot\right], \tag{12.7}$$

где Ω_{kl} — двумерный массив частот Раби kl-переходов.

После введения символического представления полного эволюционного супероператора (12.1) и его составляющих (12.2), (12.5), (12.6), (12.7) соответствующие $N^2\times N^2$-матричные представления $L_{\rm t}$, $L_{\rm r}$, $L_{\rm e}$, L_{δ}, $L_{\rm I}$ могут быть рассчитаны с использованием формулы

$$L_{mn} = (\hat{e}_m, \mathcal{L}\hat{e}_n), \tag{12.8}$$

где $\{\hat{e}_k\}$ — ортонормированный базис. Последний удобно выразить через операторы $\hat{P}_{kl}$-переходов, представленные $N\times N$-матрицами с единственным ненулевым kl-элементом $P_{kl}(k,l) = 1$. Удобно предположить, что нумерация уровней выбрана в соответствии с возрастанием их энергий $E_1 \le E_2 \le ... \le E_N$. Соответствующий базис строится следующим образом:

$$\hat{e}_{j(k,l)} = \begin{cases} \hat{P}_{kk}, & k = l; \\ \dfrac{\hat{P}_{kl} + \hat{P}_{lk}}{\sqrt{2}}, & k < l; \\ -i\dfrac{\hat{P}_{kl} - \hat{P}_{lk}}{\sqrt{2}}, & k > l, \end{cases} \tag{12.9}$$

где $j(k,l)$ — нумерующий индекс, т. е. взаимно однозначное отображение двумерного множества чисел: $k,l=1,N$ в одномерный индекс $j=1,N^2$. Он, в частности, может быть конкретизирован нижеследующим, универсальным для любых N образом:

$$j=\begin{cases} k, & k=l; \\ (2k-1)N-(k+1)^2+k+2l, & k<l; \\ (2l-1)N-(l+1)^2+l+2k+1, & k>l, \end{cases}$$

что для $N=2,3,4$ соответствует следующим $(j(k,l))$-матрицам:

$$j_2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad j_3=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \\ 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad j_4=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 6 & 2 & 11 & 13 \\ 8 & 12 & 3 & 15 \\ 10 & 14 & 16 & 4 \end{pmatrix}. \tag{12.10}$$

Базис (12.9) ортонормирован в отношении скалярного произведения (3.4), $(\hat{e}_m,\hat{e}_n)=\delta_{mn}$ для всех $m,n=1,N^2$.

Изложенная техника эффективна для аналитических расчетов, связанных как с решением проблемы стационарного состояния, так и с решением полной спектральной задачи для эволюционного супероператора $\mathcal{L}_{\mathrm{t}}$ [51, 52].

12.2 Резонансные свойства Λ-систем

Энергетическая схема Λ-резонанса [50] показана на рис. 12.2. Его название связано со спецификой конфигурации резонансных уровней, где один верхний связан с каждым из двух нижних. Таким образом, Λ-резонанс является рамановским (двухфотонным) резонансом на переходе между нижними подуровнями с рамановской расстройкой резонанса $\delta_{\mathrm{R}}=\omega'_{\mathrm{L}}-\omega_{\mathrm{L}}-\omega_{12}$. В качестве пары нижних уровней обычно выступают подуровни сверхтонкой структуры одного состояния, переход между которыми дипольно запрещен, а соответствующее время дефазировки является очень большим. Благодаря этому Λ-резонанс является предельно острым — до 10 Гц. Основной физический механизм, характерный для данного резонанса, состоит в том, что из двух нижних уровней поле взаимодействует лишь с одной линейной комбинацией — так называемым *связанным* (“coupled”) состоянием, которое опустошается за счет возбуждения полем на верхний уровень, в результате чего подавляющая часть населенностей в процессе радиационного распада возбужденного состояния сосредотачивается в *несвязанном* (“uncoupled”) состоянии, не взаимодействующим с полем и соответствующем ортогональной к связанному состоянию линейной комбинации нижних уровней. Этот эффект называется *когерентным пленением населенностей* (КПН — “CPT”).

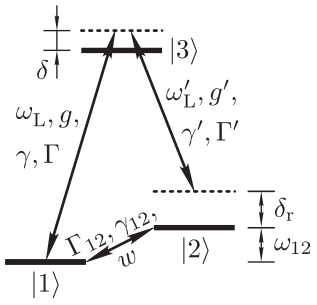

Рис. 12.1 Λ-резонанс в трехуровневой системе и его существенные параметры: γ, γ' — скорости радиационного распада возбужденного состояния на уровни 1, 2; Γ, Γ' — скорости дефазировки переходов 1↔3 и 2↔3; $\omega_{\rm L}$, $\omega'_{\rm L}$ — частоты лазерных полей; g, g' — соответствующие частоты Раби; δ, $\delta_{\rm R}$ — расстройка резонанса на переходе 1↔3 и рамановская расстройка; γ_{12}, w — скорости распада и накачки уровня 1 через уровень 2; Γ_{12} — скорость чистой дефазировки перехода 1↔2.

Анализ Λ-резонанса в случае достаточно большого расщепления нижних подуровней $\omega_{12} \gg \Gamma, \Gamma', g, g'$ может выполняться аналогично ДА с использованием приближения вращающихся волн. В качестве гамильтониана невозмущенной динамики при этом используется

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = -\hbar(\omega_{\rm L}\hat{P}_{11} + \omega'_{\rm L}\hat{P}_{22}),$$

что приводит к прецессии переходов 1↔3, 2↔3 с частотами $\omega_{\rm L}, \omega'_{\rm L}$ и перехода 1↔2 с частотой $\omega'_{\rm L} - \omega_{\rm L}$. При этом гамильтониан взаимодействия с лазерным полем

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm I} = 2\,\mathcal{R}\mathrm{e}\,\left[\mathbf{d}_{13}\hat{P}_{13}(t) + \mathbf{d}_{23}\hat{P}_{23}(t)\right]\,[\mathbf{E}_{\rm L}(t) + \mathbf{E}'_{\rm L}(t)]$$

может быть осреднен по осцилляциям поля и их комбинациями, что приводит его к виду

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm I} = \hbar\,\mathcal{R}\mathrm{e}\,\left(g\hat{P}_{13} + g'\hat{P}_{23}\right). \tag{12.11}$$

Отличие невозмущенного гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_0$ от собственного гамильтониана атома в отсутствие поля и релаксационных процессов учитывается гамильтонианом расстроек

$$\hat{\mathcal{H}}_\delta = \hbar\left(\delta_{\rm R}\hat{P}_{22} - \delta\hat{P}_{33}\right). \tag{12.12}$$

С учетом соответствующих выражениям (12.11), (12.12) рассмотренных в п. 12.1 символических представлений для лиувиллианов $\mathcal{L}_{\rm I}, \mathcal{L}_\delta$ и матричного представления (12.8) полного лиувиллиана (12.1) в базисе (12.9) получаем

$L_{\mathrm{t}} =$

$$\begin{pmatrix}
-w & \gamma_{12} & \gamma & 0 & 0 & 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
w & -\gamma_{12} & \gamma' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g'}{\sqrt{2}} \\
0 & 0 & -\gamma-\gamma' & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{g'}{\sqrt{2}} \\
0 & 0 & 0 & -\Gamma_{12} & \delta_{\mathrm{R}} & 0 & \frac{g'}{2} & 0 & \frac{g}{2} \\
0 & 0 & 0 & -\delta_{\mathrm{R}} & -\Gamma_{12} & -\frac{g'}{2} & 0 & \frac{g}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g'}{2} & -\Gamma & -\delta & 0 & 0 \\
-\frac{g}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{g}{\sqrt{2}} & -\frac{g'}{2} & 0 & \delta & -\Gamma & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} & 0 & 0 & -\Gamma' & -\delta-\delta_{\mathrm{R}} \\
0 & -\frac{g'}{\sqrt{2}} & \frac{g'}{\sqrt{2}} & -\frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 & \delta+\delta_{\mathrm{R}} & -\Gamma'
\end{pmatrix}. \quad (12.13)$$

В данном выражении дефазировки переходов определяются скоростями распада образующих их уровней и вкладом чистой дефазировки:

$$\Gamma = \frac{w+\gamma+\gamma'}{2} + \Gamma_{\mathrm{e}}, \quad \Gamma' = \frac{\gamma_{12}+\gamma+\gamma'}{2} + \Gamma'_{\mathrm{e}}, \quad \Gamma_{12} = \frac{w+\gamma_{12}}{2} + \Gamma^{e}_{12}.$$

В реальном эксперименте отсутствие столкновений с атомами буферного газа, т. е. в случае использования кювет с чистыми парами активных атомов, величинами Γ_{e}, Γ'_{e} можно пренебречь. В отличие от дипольных переходов на переходе $1\leftrightarrow 2$ основную роль играет чистая дефазировка $\Gamma^{e}_{12} \gg \gamma_{12}, w$, которая в отсутствие буферного газа моделирует конечность времени нахождения атомов в области их взаимодействия с полем (смысл использования буферного газа состоит в увеличении этого времени). Вклад самых малых параметров γ_{12}, w в дефазировку дипольных переходов тем более не существенен.

Основные свойства эффекта КПН определяются величиной поглощения приложенного поля, которое на основе двухуровневой формулы (10.31) для случая Λ-резонанса описывается модифицированным выражением

$$W_{\mathrm{L}} = \hbar\, \mathcal{J}\mathrm{m}\, \left(\omega_{\mathrm{L}} g \left\langle \hat{\sigma}^{+}_{13} \right\rangle + \omega'_{\mathrm{L}} g' \left\langle \hat{\sigma}^{+}_{23} \right\rangle\right) \approx \hbar \left(\omega_{\mathrm{L}}\gamma + \omega'_{\mathrm{L}}\gamma'\right) n_3, \quad (12.14)$$

где $\left\langle \hat{\sigma}^{+}_{13} \right\rangle$, $\left\langle \hat{\sigma}^{+}_{23} \right\rangle$ описывают положительно-частотные операторы комплексных амплитуд переходов $1\leftrightarrow 3$ и $2\leftrightarrow 3$, соответственно. Для расчета стационарных средних значений $\left\langle \hat{\sigma}^{+}_{13} \right\rangle$, $\left\langle \hat{\sigma}^{+}_{23} \right\rangle$ или n_3 требуется рассчитать соответствующее векторное представление $\langle 0|$ стационарной матрицы плотности $\hat{\rho}_{\mathrm{st}}$, разрешив уравнение $\langle 0|\, L_{\mathrm{t}}$. При этом в рассматриваемом

мом базисе (12.10) первые три элемента вектора $\langle 0|$ описывают населенности и должны быть соответственно нормированы, так что бра-вектор стационарной матрицы плотности $\langle 0|$ следует использовать в нормированной форме:

$$\langle 0| \to \frac{\langle 0|}{\langle 0|_1 + \langle 0|_2 + \langle 0|_3},$$

что автоматически обеспечивает правильный знак рассчитываемых величин. Средние значения населенностей при этом совпадают с соответствующими компонентами:

$$\langle n_k \rangle = \langle 0|_k, \quad k = 1, 3,$$

а комплексные амплитуды переходов выражаются через соответствующие компоненты с $k > 3$:

$$\langle \hat{\sigma}_{13}^{+} \rangle = \frac{\langle 0|_6 + i \langle 0|_7}{\sqrt{2}}, \quad \langle \hat{\sigma}_{23}^{+} \rangle = \frac{\langle 0|_8 + i \langle 0|_9}{\sqrt{2}}, \quad \langle \hat{\sigma}_{12}^{+} \rangle = \frac{\langle 0|_4 + i \langle 0|_5}{\sqrt{2}}.$$

Приведенные соотношения позволяют выразить поглощение в аналитическом виде, удобном как для численных расчетов, так и для качественного анализа. Это удается фактически для самого общего случая. Приведем соответствующее выражение для населенности n_3 возбужденного уровня, в котором в описанном наборе параметров лиувиллиана отброшены лишь времена распада γ_{12}, w основного состояния, которые во всех реальных системах являются пренебрежимо малыми и не влияют на поглощение:

$$n_3 = \frac{A\delta_{\mathrm{R}}^2 + B}{C\delta_{\mathrm{R}}^4 + 2C\delta\delta_{\mathrm{R}}^3 + (D + E\delta^2)\delta_{\mathrm{R}}^2 + F\delta\delta_{\mathrm{R}} + G\delta^2 + H}, \tag{12.15}$$

где

$$\begin{aligned}
A &= 8\Gamma\Gamma' g^2 g'^2, \\
B &= 2\Gamma_{12} g^2 g'^2 (\Gamma g^2 + \Gamma' g'^2 + 4\Gamma_{12}\Gamma\Gamma'), \\
C &= 16 g^2 \Gamma'\Gamma, \\
D &= -8\Gamma'\Gamma g^4 + 16\Gamma\Gamma'(\Gamma'\Gamma' g^2 + \Gamma\Gamma g'^2) + 16\Gamma_{12}^2 \Gamma'\Gamma g^2 \\
&\quad + 4(\Gamma_{12}\Gamma' - \Gamma(\Gamma + \Gamma' - 6\Gamma')) g^2 g'^2, \\
E &= 16(\Gamma'\Gamma g^2 + \Gamma\Gamma' g'^2), \\
F &= 4[2\Gamma'\Gamma g^4 - 2\Gamma\Gamma' g'^4 - 8\Gamma_{12}^2 \Gamma'\Gamma g^2 \\
&\quad + g^2 g'^2((\Gamma + \Gamma')(\Gamma - \Gamma') - \Gamma_{12}(\Gamma + 3\Gamma')], \\
G &= 8\Gamma_{12}(2\Gamma_{12}(\Gamma'\Gamma g^2 + \Gamma\Gamma' g'^2) + (\Gamma + \Gamma') g^2 g'^2), \\
H &= (\Gamma g^2 + \Gamma' g'^2 + 4\Gamma_{12}\Gamma\Gamma') \\
&\quad \times (\Gamma' g^4 + \Gamma g'^4 + 4\Gamma_{12}(\Gamma'\Gamma' g^2 + \Gamma\Gamma g'^2) + (\Gamma + \Gamma' + 6\Gamma_{12}) g^2 g'^2).
\end{aligned}$$

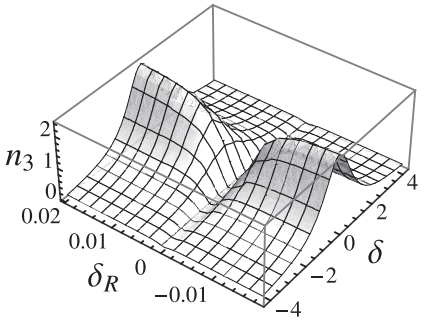

Рис. 12.2 Зависимость населенности возбужденного состояния от однофотонной расстройки $\delta = \omega_{\rm L} - \omega_{13}$ и рамановской расстройки $\delta_{\rm R} = \omega'_{\rm L} - \omega_{\rm L} - \omega_{12}$ для симметричной Λ-системы со скоростями радиационного распада $\gamma_{31} = \gamma_{32} = 1$, частотами Раби $g = g' = 0.1$, нулевыми скоростями чистой дефазировки дипольных переходов $\Gamma_{\rm e}, \Gamma'_{\rm e}$ и скоростями распада γ_{12}, w основного состояния, для значения скорости дефазировки основного состояния $\Gamma_{12} = 0.001$.

Узкий по сравнению с шириной однофотонного резонанса провал в зависимости населенности возбужденного состояния от рамановской расстройки в окрестности ее нулевого значения соответствует КПН. Для реальных значений Γ_{12} в современных экспериментах он может быть на много порядков уже изображенного на рис. 12.2.

Глава 13
Квантовые флуктуации в квазиклассических системах

13.1 Квазиклассический расчет обобщенного лиувиллиана

Для квазиклассических систем расчет обобщенного лиувиллиана существенно упрощается за счет возможности ограничения в представлении Вигнера (4.45) квантовой скобки Пуассона конечным числом членов разложения по $C \sim \hbar$. Анализируя с этой точки зрения формулу (7.14) для релаксационного супероператора, соответствующего каноническому гамильтониану взаимодействия (7.13), нетрудно видеть, что старшее по $\hbar$ приближение соответствует просто замене всех квантовых скобок Пуассона классическими и пренебрежению квантовой спецификой умножения при расчете внешнего антикоммутатора $[\,.\,,\,.\,]_+$ (последнее справедливо благодаря симметризации этого умножения, из-за чего возникающие в первом порядке по $\hbar$ в соответствии с правилом умножения (4.44) члены с $\pm i\hbar/2$ сокращаются). Это дает

$$\mathcal{L}_{\rm r} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} d\tau_2 \int_t^{\tau_2} d\tau_1 \times \tag{13.1}$$

$$\times\left[K_{\mu\nu}(\tau_1,\tau_2)\left\{F_\mu(\tau_1),\{F_\nu(\tau_2),\odot\}\right\} - \frac{i}{\hbar}C_{\mu\nu}(\tau_1,\tau_2)F_\mu(\tau_1)\left\{F_\nu(\tau_2),\odot\right\}\right],$$

где $F_\lambda(\tau) = F_\lambda(X,\tau)$ описывают в представлении Вигнера переменные ОС $\hat{F}(\tau)$ без учета взаимодействия с резервуаром. Первое слагаемое описывает температурно зависимые квантовые флуктуации, приводящее к диффузии, в то время как второе слагаемое описывает классическое затухание. Действительно, для термодинамически равновесного шума ξ в соответствии с формулой Планка корреляционная матрица $K_{\mu\nu}$ имеет порядок kT при высоких температурах а при низких температурах пропорциональна $\hbar$, поскольку определяется только вакуумной энергией.

Коммутатор же $C_{\mu\nu}$ пропорционален $\hbar$ и не зависит от температуры. Поэтому при $T \to 0,\ \hbar \to 0$ в этом супероператоре сохраняется только второй член, который описывает, следовательно, только классическое затухание и эффекты типа классического смещения частоты осциллятора, поскольку никаких флуктуаций в этом пределе нет.

Для линейных ОС, как нетрудно видеть, супероператор (13.1) для случая взаимодействия с резервуаром через обобщенные координаты $\hat{F} = \hat{X}$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{\mathrm{r}} = \sum \left(D_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial X_\mu \partial X_\nu} - G_{\mu\nu} X_\mu \frac{\partial}{\partial X_\nu} \right). \tag{13.2}$$

Здесь $D_{\mu\nu}$ — матрица диффузии, $G_{\mu\nu}$ — матрица, описывающая затухание и частотные смещения.

Таким образом, в квазиклассической ОС в рамках старшего приближения по $\hbar$ диффузионный процесс содержит наряду с классическим затуханием и квантовую диффузию. Квантовая диффузия, несмотря на относительную малость, может, тем не менее, быть очень существенной в условиях, когда динамика рассматриваемой ОС очень критична к ее наличию. Это имеет место, например, для динамики электронов в ускорителях [54], где геометрическая область устойчивости движения также мала по отношению к геометрическому размеру системы.

13.2 Стохастические квантовые уравнения

Для квазиклассических ОС эффективно описание динамики с помощью стохастических уравнений для временных производных физических переменных, в которых наряду с релаксацией сохранены шумы, порождающие флуктуации в ОС. Такого типа уравнения в приложениях называются уравнениями Ланжевена, а основанный на их использовании подход к анализу ОС называется ланжевеновским. Они могут быть выведены в общем виде с использованием обобщенного лиувиллиана. При этом также следует исходить из представления взаимодействия в такой форме, чтобы исключить быстрые динамические осцилляции. Для этого следует представлять переменные ОС медленно меняющимися операторами $\hat{A}(t)$, через которые в представлении Гейзенберга в составной системе переменные ОС имеют вид

$$\hat{A}(t) = U_0^{-1}(t) \hat{A}(t) U_0(t), \tag{13.3}$$

где $U_0(t)$ описывает движение ОС в отсутствие резервуара. В этом случае зависимость $\hat{A}(t)$ аналогична медленно меняющейся амплитуде классического осциллятора, причем она учитывает и возмущение резервуара. Эта зависимость задается стохастическим преобразованием

$$\mathcal{S}_\xi = \mathrm{T}\,\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t [\hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau), \odot] d\tau\right\},$$

в котором шум резервуара описывается в представлении взаимодействия гейзенберговскими операторами $\hat{\xi}(t)$ невозмущенного резервуара.

Рассмотрим усредненный по времени оператор

$$\left\langle \frac{d\hat{A}}{dt} \right\rangle_\Delta = \frac{1}{\Delta}\left[\hat{A}(t+\Delta) - \hat{A}(t)\right] \equiv \frac{1}{\Delta}\int_t^{t+\Delta} \frac{d\hat{A}}{d\tau} d\tau.$$

Он может быть выражен через неусредненное флуктуирующее преобразование перехода $\mathcal{S}_\xi$ в виде

$$\left\langle \frac{d\hat{A}}{dt} \right\rangle_\Delta = \frac{1}{\Delta}\left[\mathcal{S}_\xi(t, t+\Delta) - 1\right]\hat{A}. \tag{13.4}$$

Выделяя здесь в правой части усредненное по ξ преобразование и флуктуационное отклонение от нее, для $\tau_\mathrm{c} \ll \Delta \ll \tau_\mathrm{r}$, получаем *уравнение Ланжевена*, сглаженное по физически малым временным интервалам Δ:

$$\left\langle \frac{d\hat{A}}{dt} \right\rangle_\Delta = \mathcal{L}_\mathrm{r}\hat{A} + \langle\hat{\eta}(t)\rangle_\Delta, \tag{13.5}$$

где квантовые случайные силы $\langle\hat{\eta}(t)\rangle_\Delta$ имеют вид

$$\langle\hat{\eta}(t)\rangle_\Delta = \frac{1}{\Delta}\left[\mathcal{S}_\xi(t, t+\Delta) - \langle\mathcal{S}_\xi(t, t+\Delta)\rangle_\xi\right]\hat{A}. \tag{13.6}$$

В условиях релаксации диффузионного типа после замены $\mathcal{S}_\xi(t, t+\Delta)$ на коммутатор с гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}_\xi$ получаем выражение для шума при $\Delta \to 0$

$$\hat{\eta}(t) = \frac{i}{\hbar\Delta}\int_t^{t+\Delta} [\hat{\mathcal{H}}_\xi(\tau), \hat{A}(t)]\, d\tau. \tag{13.7}$$

Далее возможно использование одной из двух моделей — физического или математического белого шума. В первом случае в качестве шума $\xi(t)$ рассматривается непосредственно процесс, входящий в гамильтониан взаимодействия. Его время корреляции хотя и мало, но конечно. В этом случае можно рассмотреть в (13.7) предел $\Delta \to 0$ без модификации $\xi(t)$ и получить в качестве *ланжевеновского* шума модель физического белого шума

$$\hat{\eta}(t) = \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}_\xi(t), \hat{A}(t)]. \tag{13.8}$$

Он имеет конечное малое время корреляции, которое, однако, в силу малости не входит непосредственно в конечные результаты, определяемые спектральной плотностью на нулевой частоте (здесь предполагается, что

все высокочастотные осцилляции уже учтены в гамильтониане $\hat{\mathcal{H}}_\xi(t)$ благодаря использованию представления взаимодействия). Для перехода же к модели математического белого шума в качестве $\hat{\eta}(t)$ следует использовать эквивалентный шум с той же локальной спектральной полностью, но с нулевым временем корреляции.

Учитывая, что в пределе $\Delta \to 0$ флуктуация этого шума стремится к бесконечности, получаем, что адекватным его предельным представлением является белый шум $\hat{\zeta}$ с сингулярной корреляционной функцией

$$\hat{K}(t,t+\tau) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} \left[\mathcal{S}_\xi(t,t+\Delta) - \langle \mathcal{S}_\xi(t,t+\Delta)\rangle_\xi\right] \triangleleft$$

$$\left[\mathcal{S}_\xi(t,t+\Delta) - \langle \mathcal{S}_\xi(t,t+\Delta)\rangle_\xi\right] \; [\hat{A}(t)\otimes\hat{A}(t)]\,\delta(\tau). \tag{13.9}$$

С использованием конкретного вида гамильтониана взаимодействия можно выразить (13.9) через белый шум, описывающий непосредственно шум резервуара. В частности, для гамильтониана вида (7.13) в условиях релаксации диффузионного типа, после замены $\mathcal{S}_\xi(t,t+\Delta)$ на коммутатор с гамильтонианом (7.13) можно с использованием структурных коэффициентов выразить шум (13.6) в виде линейной комбинации произведения белого шума и базисных операторов. В этом случае в физическом белом шуме, определяемом выражением

$$\left.\frac{d\hat{A}}{dt}\right|_\xi = \frac{i}{\hbar}\sum \hat{\xi}_\nu \left[\hat{F}_\nu, \hat{A}\right],$$

при желании нетрудно ввести взамен него соответствующий математический белый шум путем замены физических шумов $\hat{\xi}_\nu$ на эквивалентные им математические белые шумы. В реальных же расчетах необходимость в такой замене отсутствует, поскольку предельный переход $\tau_{\rm c} \to 0$ может быть выполнен на стадии выполнения расчетов с физическим белым шумом.

Таким образом, после выполнения предельного перехода $\Delta \to 0$ уравнение (13.5) переходит в уравнение Ланжевена для мгновенных значений физических величин

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \mathcal{L}_{\rm r}\hat{A} + \hat{\eta}(t), \tag{13.10}$$

в котором в правой части может использоваться как математический, так и физический белый шум, вычисляемый для диффузионных процессов как квантовая скобка Пуассона с гамильтонианом взаимодействия с резервуаром. В квазиклассических ОС после перехода к представлению Вигнера оно может исследоваться как обычное уравнение для классической системы, в котором шум имеет квантовое происхождение, но описывается как классический с корреляционной функцией, равной симметризованному квантовому коррелятору. Ланжевеновский подход на-

шел широкое применение при анализе самых различных квантовых ОС, в частности, в теории лазера [25] и в теории ДА [55] (см. *Приложение П2*). Здесь рассматривается его применение к анализу квантовой раскачки колебаний электронов в ускорителях, где, благодаря квазиклассичности ОС, этот подход особенно эффективен.

13.3 Квантовые флуктуации электронов в ускорителях

Для электронов в ускорителях принципиальная роль квантовых шумов состоит в возбуждении квантовых флуктуаций, приводящих к конечной амплитуде колебаний относительно равновесной траектории. Это обстоятельство требует точного учета, поскольку вследствие очень большого геометрического масштаба траектории эти флуктуационные отклонения могут быть не малы по сравнению с областью устойчивости. Хотя данная проблема относится к области квантовой теории релятивистского электрона, она является существенно квазиклассической вследствие большой величины релятивистской массы γm, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ при больших значениях энергии ускоренного электрона. Поэтому в данном случае вместо рассмотрения релятивистского электронно-позитронного поля [56] достаточно исходить из одноэлектронного приближения и использовать ланжевеновский подход при квазиклассическом описании электронной динамики. Более того, эта задача является линейной.

На рис. 13.1 показаны равновесная траектория и осцилляции искаженной траектории. Существует несколько степеней свободы этих осцилляций, что несколько осложняет теорию. Здесь мы обсудим только наиболее простой тип колебаний — вертикальные (вдоль оси z) бетатронные колебания, которые отличаются тем, что они описываются независимо от остальных типов колебаний. Амплитуды осцилляций предполагаются малыми, т. е. колебания должны описываться линейным уравнением. Это уравнение имеет вид

$$\gamma m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\gamma m \omega_z^2 z - \gamma m \Gamma \frac{dz}{dt} + F_z(t), \tag{13.11}$$

где ω_z — частота рассматриваемых колебаний, Γ — затухание и $F_z(t)$ — z-компонента ланжевеновской силы, обусловленной процессом излучения электрона на орбите. Для стационарной дисперсии флуктуаций, используя преобразование Фурье, получаем

$$\sigma_z^2 = \frac{N_{zz}}{2\omega_z^2 m^2 \gamma^2 \Gamma}\,, \tag{13.12}$$

где N_{zz} — спектральная плотность флуктуаций силы $F_z(t)$ на частоте ω_z. С учетом п. 13.2 флуктуации $F_z(t)$ описываются симметризованной корреляционной функцией соответствующей квантовой силы, представленной в квантовом уравнении Гейзенберга.

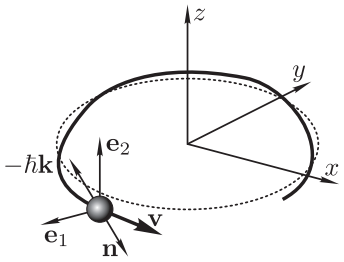

Рис. 13.1 Равновесная траектория, бетатронные осцилляции и формирование импульса отдачи излучения ультрарелятивистского электрона в ускорителе. Импульс отдачи $-\hbar\mathbf{k}$ имеет ненулевую составляющую по оси z.

Сила $F_z(t)$ описывается z-проекцией квантовой электромагнитной силы Лоренца, обусловленной вакуумным электромагнитным полем:

$$\hat{\mathbf{F}}_0(t) = -e\hat{\mathbf{E}}_0 - \frac{e}{c}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{H}_0\right]. \tag{13.13}$$

Здесь $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ — напряженности электрического и магнитного полей, которые могут быть рассчитаны с использованием разложения по плоским волнам типа разложения (9.37). Чтобы понять характер этой силы, рассмотрим выражение (13.13) для векторов $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ одной плоской волны с волновым вектором $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ и векторным потенциалом вида $\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r},t) = A_\lambda(\mathbf{k})\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$, $\omega = ck$, соответствующим поляризации $\mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k})$:

$$\mathbf{F}_\lambda(\mathbf{k}) = -iek\left[\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)\mathbf{e}_\lambda + \frac{\mathbf{ve}_\lambda}{c}\mathbf{n}\right]A_\lambda(\mathbf{k})\exp\left[-i\omega t + i\mathbf{kr}_{\mathrm{e}}(t)\right], \tag{13.14}$$

где $\mathbf{r}_{\mathrm{e}}(t)$ — траектория электрона. Для ультрарелятивистской частицы угол θ между направлением излучаемого поля, с которым взаимодействует электрон, и скоростью электрона $\mathbf{v}$ имеет порядок γ^{-1}. Соответственно, в (13.14) первый член в квадратных скобках пропорционален $1-\cos\theta \sim \gamma^{-2}$, в то время как второй имеет порядок γ^{-1}. Это является следствием компенсации представленных в (13.14) электрической и магнитной компонент поперечной составляющей силы Лоренца. В нерелятивистском случае поперечная составляющая является преобладающей и определяется, в основном, электрической компонентой. В ультрарелятивистском же случае основной является продольная составляющая, которая является продольной компонентой магнитной силы Лоренца. Она направлена против волнового вектора и в вакуумной силе (13.13) описывает импульс отдачи фотона $-\hbar\mathbf{k}$. Она пропорциональна скорости электрона и осциллирует с частотой ее колебаний, поэтому расчет ее спектральной плотности на частоте рассматриваемых колебаний сводится просто

к расчету интегральной по всем частотам мощности флуктуаций импульса отдачи $-\hbar\mathbf{k}$. С учетом этих соображений результат расчета искомой матрицы N спектральной плотности вакуумной силы Лоренца (13.13) выражается через среднеквадратичную величину импульса отдачи:

$$N = \iiint \hbar\mathbf{k}\hbar\mathbf{k}^{\mathrm{T}} \frac{I(\mathbf{k})}{\hbar\omega}\, d^3\mathbf{k}, \tag{13.15}$$

где $I(\mathbf{k})$ описывает плотность мощности излучения, а $I(\mathbf{k})/\hbar\omega$ — распределение вероятности излучения квантов в $\mathbf{k}$-пространстве.

Используя zz-компоненту матрицы (13.15) и выражение (13.12), с учетом известных результатов теории излучения для распределения энергии излучения и радиационного затухания [57] получаем окончательное выражение для флуктуаций:

$$\sigma_z^2 = \frac{13\sqrt{3}}{48} \frac{\hbar}{m\omega_z\sqrt{n}}, \tag{13.16}$$

где n обозначает отношение квадрата частоты вертикальных бетатронных колебаний к квадрату частоты обращения на орбите, которая определяет интенсивность излучения. Величина σ_z^2 существенно превосходит уровень квантовых флуктуаций вакуумного состояния рассматриваемого гармонического осциллятора

$$\sigma_0^2 = \frac{\hbar}{2\gamma m\omega_z}, \tag{13.17}$$

зависящий, в отличие от σ_z^2, от релятивистской массы. В выражении же (13.16) для σ_z^2 релятивистский фактор γ отсутствует, поскольку возрастание релятивистской массы при росте энергии электрона компенсируется возрастанием мощности излучения, возбуждающего колебания. Бетатронные колебания сильно возбуждаются в процессе излучения и, как следует из сравнения флуктуаций (13.12), (13.17), соответствующее среднее число квантов бетатронных колебаний имеет порядок γ. Для энергий порядка 1 Гэв $\gamma \sim 10^3$. Этому высокому уровню возбуждения соответствует, тем не менее, относительно низкое значение температуры $T \sim 1$ К. Это обусловлено малым значением энергии кванта для частот бетатронных колебаний, поскольку они лежат в радиодиапазоне.

Таким образом, из проведенного анализа следует, что физическая картина раскачки электронных колебаний импульсами отдачи излучаемых фотонов в рамках адекватной асимптотики строго следует из построенных в п. 13.2 квазиклассических уравнений Ланжевена.

Глава 14
Квантово-полевые открытые системы: релаксация и флуктуации фононных возбуждений

14.1 Специфика квантово-полевых ОС

Физические примеры ОС, изученные в *Главах 7–10*, относительно просты в том отношении, что для них в самой исходной структуре гамильтониана заложено естественное разделение на ОС и резервуар. Это не всегда так, и примером является любое поле, в котором роль ОС играет то возбуждение, скажем, собственная волна, которое возникает в специфических условиях, соответствующих рассматриваемой специальной задаче. Поэтому для применения изложенных выше общих методов теории ОС необходимо предварительно в общем виде обсудить проблему выделения рассматриваемой ОС в форме, описанной в п. 5.1 *Главы 5*. Мы здесь сделаем это не в абстрактных обозначениях, а на примере фононной системы твердого тела. В действительности, излагаемая идеология является очень общей и, очевидно, может быть распространена на любые поля, включая те, которые описывают фундаментальные взаимодействия элементарных частиц в физическом вакууме [58]. Общая схема введения ОС в таких системах имеет следующий вид:

$$\begin{matrix}\textit{свободное}\\ \textit{поле}\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\textit{выделенное}\\ \textit{возбуждение}\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\textit{другие}\\ \textit{возбуждения}\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\textit{расчет}\\ \textit{взаимодействия}\end{matrix}$$

Сначала рассматривается линейный гамильтониан *свободного поля* в базисе, собственном для представляющих интерес возбуждений. Этот гамильтониан представляется в виде суммы одного или нескольких выделенных возбуждений, описывающих собственно ОС, и остальных, описывающих резервуар. Далее рассматривается нелинейная часть полевого гамильтониана, которая описывает взаимодействие между (квази)частицами свободного поля и соответствует рассматривавшемуся ранее гамильтониану $\hat{\mathcal{H}}_\xi$ взаимодействия ОС с шумами, и рассчитываются соответствующие релаксационно-флуктуационные характеристики. В

качестве резервуара может выступать как само исходное поле, так и другие поля, так что приведенный в п. 5.1 список примеров ОС может быть неограниченно расширен за счет ОС такого типа.

14.2 Роль линейных и нелинейных процессов в фононной системе

Модель фононной системы строится на основе представления об ансамбле из n_σ сортов частиц — атомов кристалла — с потенциалом взаимодействия, имеющим минимум для периодической конфигурации частиц и квадратичным по малым отклонениям от положения равновесия [59, 60]. Квадратичная (гармоническая) часть гамильтониана описывает поле свободных фононов, представление о которых естественно возникает после замены исходных координат и импульсов частиц на набор нормальных координат и сопряженных импульсов. В этом представлении гамильтониан имеет вид суммы энергий невзаимодействующих гармонических осцилляторов — собственных колебаний. Кванты этих колебаний и есть фононы, описываемые аналогично фотонам электромагнитного поля операторами порождения и уничтожения $\hat{b}_s^+(\mathbf{k})$, $\hat{b}_s(\mathbf{k})$ фононов s-ой колебательной моды с волновым вектором $\mathbf{k}$. Гамильтониан свободных фононов имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_s \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_s(\mathbf{k})\hat{b}_s^+(\mathbf{k})\hat{b}_s(\mathbf{k}). \tag{14.1}$$

Здесь $\omega_s(\mathbf{k})$ описывают частоты фононных мод; волновые векторы принимают дискретные значения, лежащие в первой зоне Бриллюена обратной решетки, которой достаточно для Фурье-представления функций, заданных на исходной периодической решетке. При этом число N точек $\mathbf{k}$ равно числу элементарных ячеек в объеме кристалла V : $N = V/\Omega$, где Ω — объем ячейки.

Равновесные координаты атомов задаются составным индексом $\mu = (\mathbf{m}, \sigma)$, где $\mathbf{m}$ — трехкомпонентный индекс ячейки, а σ — номер сорта атома:

$$\mathbf{r}_\mu = m_x\mathbf{a}_x + m_y\mathbf{a}_y + m_z\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_\sigma, \tag{14.2}$$

где $\mathbf{a}_{x,y,z}$ — базисные векторы решетки, $\mathbf{a}_\sigma$ — координаты атомов в ячейке с $m_x = m_y = m_z = 0$. Операторы смещений $\Delta\hat{\mathbf{r}}_\mu$ координат атомов относительно их равновесных значений $\mathbf{r}_\mu$ описываются выражением

$$\Delta\hat{\mathbf{r}}_\mu = \sum_s \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{g}_\sigma^s(\mathbf{k}) \left[\hat{b}_s(\mathbf{k},t) + \hat{b}_s^+(-\mathbf{k},t)\right] \exp\left(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mu\right), \tag{14.3}$$

$$\hat{b}_s(\mathbf{k},t) = \hat{b}_s(\mathbf{k}) \exp\left[-i\omega_s(\mathbf{k})t\right].$$

Здесь

$$\mathbf{g}_\sigma^s(\mathbf{k}) = \left[\frac{\hbar\Omega}{8\pi^3 m_\sigma \omega_s(\mathbf{k})}\right]^{1/2} \mathbf{e}_\sigma^s, \tag{14.4}$$

где $\mathbf{e}_\sigma^s$ описывают векторы поляризации колебаний s-ой моды для σ-го атома, m_σ — масса σ-го атома.

Свободное поле фононов, описываемое гамильтонианом (14.1), как это следует из представлений квантовой динамики, рассмотренных в *Главе 4* (п.п. 4.2, 4.3), с точки зрения динамики является классическим объектом, проявляющим квантовые свойства лишь в специфике пространства квантовых состояний: в наличии вакуумных флуктуаций — как следствие соотношения неопределенностей, и в ненулевой энергии кванта при энергообмене с другими степенями свободы. Классичность динамики наиболее наглядна для состояний фононного поля, описываемых когерентными состояниями Ψ_{C}, для которых

$$\hat{b}_s(\mathbf{k})\Psi_{\mathrm{C}} = b_s(\mathbf{k})\Psi_{\mathrm{C}} \tag{14.5}$$

для любых s, $\mathbf{k}$. Здесь $b_s(\mathbf{k})$ описывают классические комплексные амплитуды фононов, которым в соответствие с выражением (14.3) отвечают классические собственные волны

$$b_s(\mathbf{r},t) = b_s(\mathbf{k}) \exp\left[-i\omega_s(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mu\right]. \tag{14.6}$$

Когерентное состояние Ψ_{C} по своему качественному смыслу является аналогом вакуумного состояния Ψ_0 с тем отличием, что оно эквивалентным образом описывает замену операторов уничтожения на смещенные операторы $\hat{b}_s(\mathbf{k}) + b_s(\mathbf{k})$, т. е. операторы поля имеют классическую добавку к вакуумным флуктуациям. Любая линейная комбинация собственных возбуждений вида (14.6), соответствующая одной и той же частоте $\omega = \omega_s(\mathbf{k})$, имеет неизменное во времени пространственное распределение:

$$\mathbf{G}(\mathbf{r},t) = \exp(-i\omega t) \sum_{s,\mathbf{k}} \mathbf{g}_\sigma^s(\mathbf{k}) b_s(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_\mu),$$

т. е. $\mathbf{G}$ является стационарным возбуждением. Несмотря на то, что возбуждения b_s, $\mathbf{G}$ являются многофононными и описывающие их волновые функции в представлении Шредингера содержат осцилляции с n-фононными частотами $n\omega_s(\mathbf{k})$, для когерентных состояний это не проявляется, так как операторы $\hat{b}_s(\mathbf{k})$ содержат только матричные элементы, соответствующие переходам $n\omega_s(\mathbf{k}) \to (n-1)\,\omega_s(\mathbf{k})$ и осциллирующие с однофононной частотой $\omega_s(\mathbf{k})$. Для свободного фононного поля нет никакого отличия между временными характеристиками, следующими из классической теории, и соответствующими им квантовыми результатами. При этом во взаимодействиях свободного фононного поля с другими частицами роль фононов в спектрах проявляется в появлении комбинационных линий с добавлением или вычитанием невозмущенных частот

фононов по тем же законам, которые справедливы и для классических систем. Отличие от классических систем при этом связано лишь с возможностью неклассичности равновесного теплового распределения при низких температурах, когда нарушается соотношение $\hbar\omega_s(\mathbf{k})/kT \ll 1$.

Альтернативным описанному квазиклассическому представлению фононной системы является представление в чисто квантовых терминах волновой функции. В этом случае рассматриваемые базисные n-фононные возбуждения имеют чисто квантовый характер, и рассмотренные выше когерентные возбуждения представляются их суперпозициями. С использованием вакуумной волновой функции фононного поля Ψ_0 волновые функции *n-фононных состояний* представляются в виде

$$\Psi_n = \sum_{s_1,\mathbf{k}_1,\ldots,s_n,\mathbf{k}_n} \psi(s_1,\mathbf{k}_1,\ldots,s_n,\mathbf{k}_n)\hat{b}_{s_n}(\mathbf{k}_n)\ldots\hat{b}_{s_1}(\mathbf{k}_1)\Psi_0. \tag{14.7}$$

Здесь $\psi(s_1,\mathbf{k}_1,\ldots,s_n,\mathbf{k}_n)$ описывает волновую функцию n-фононной системы. Набор этих функций задает состояние в терминах *представления Фока* [61], в котором сначала фиксируется число квантов, а затем указывается распределение этих квантов по используемым координатам. Фиксация же вначале координат s, $\mathbf{k}$ и затем рассмотрение n-фононных состояний с фиксированными $s,\mathbf{k}$ называется *представлением чисел заполнения*. Использование квантового описания целесообразно в том случае, если в рассматриваемых процессах возбуждаются существенно квантовые состояния. Формулировка же временной динамики в квантовых терминах не дает никаких преимуществ и может даже привести к неадекватному ассоциированию физического существа рассматриваемого процесса с квантовым характером фононных колебаний.

В рамках описанной линейной системы нет возможности адекватного объяснения такого определяющего свойства фононной системы как диффузионное распространение тепла. Любые возбуждения распространяются в ней со скоростями соответствующих волн, т. е. скорости распространения имеют порядок скорости звука, что явно противоречит наблюдаемым свойствам теплообмена. Тепловые процессы правильно описываются только с учетом нелинейной части гамильтониана $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{NL}}$, который описывает взаимодействие между свободными фононами. С учетом этого в теории фононного поля возникает понятие *фононной ОС*, образованной некоторой выбранной одномерной системой, соответствующей фононам с координатами s, $\mathbf{k}$ в импульсном представлении, и остальными степенями свободы в качестве резервуара. Релаксационные процессы описываются гамильтонианом $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{NL}}$. С использованием техники, развитой в *Главах 5, 7, 13*, можно рассчитать релаксационный супероператор $\mathcal{L}_{\mathrm{r}}$ и смоделировать соответствующие ланжевеновские шумы, возникающие за счет других фононов. Подобная техника расчетов шумового взаимодействия частиц с фононами широко применяется при изучении процессов в кристаллических средах [33].

Учет порождаемой нелинейностью релаксации в системе свободных фононов качественно меняет природу распространения возбуждений. Даже если начальное возбуждение являлось когерентным, т. е. было близким к собственному, то с течением времени оно затухает, т. е. время жизни и время пробега фонона конечны. Исходный фонон рассеивается в широкий спектр фононов, превращаясь в некогерентное, т. е. в тепловое возбуждение.[1] Если же начальное возбуждение носит некогерентный характер и локализовано в пространстве, то оно распространяется по закону диффузии, поскольку каждый из пространственно локализованных фононов превращается в некогерентный набор новых с расширяющейся за счет их распространения областью локализации. Конкретные расчеты теплопроводности довольно сложны из-за объективной сложности рассматриваемой системы [60], однако они не выходят за рамки изложенной теории релаксации ОС.

14.3 Квазиклассичность затухания и теплосопротивления

Покажем, как даже без вычислений можно сделать качественные выводы о процессе теплообмена с использованием старшего квазиклассического приближения для релаксационного супероператора (13.1). В данном случае входящие в него корреляционная и коммутационная матрица описывают шум $\hat{\xi}$, возникающий в гамильтониане фонон-фононного взаимодействия $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{NL}}$. В случае кубического члена оно имеет структуру $\hat{\xi}(\hat{b}+\hat{b}^{+})$, где $\hat{b}$, $\hat{b}^{+}$ относятся к выделенному фонону, а $\hat{\xi} \sim \hat{b}\hat{b}^{+}$ описывает шум, квадратичный по операторам порождения-уничтожения других фононов. Затухание в (13.1) определяется коммутатором $C = \left\langle [\hat{\xi}(\tau_1), \hat{\xi}(\tau_2)] \right\rangle$. Выполнив перестановки в комбинациях вида $\hat{b}_1\hat{b}_2\hat{b}_3\hat{b}_4$ с учетом коммутационных соотношений

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_l^{+}] = \delta_{kl}, \quad [\hat{b}_k, \hat{b}_l] = [\hat{b}_k^{+}, \hat{b}_l^{+}] = 0\,,$$

получаем для C качественное соотношение

$$\mathrm{C} \sim \hbar^2(\langle n \rangle + 1). \tag{14.8}$$

Из полученного выражения для C видно, что затухание в (13.1) при высоких температурах, когда $\langle n \rangle \sim kT/\hbar\omega$, не содержит постоянной Планка и линейно зависит от температуры. Соответственно, затухание

[1] При этом возможны качественно отличные типы рассеяния возбуждений в зависимости от того, преобладают ли процессы рассеяния с сохранением фононного импульса или так называемые “процессы переброса”: обычные свойства распространения тепла имеют место в последнем случае. Подробнее см. [59, 60] и цитированную в [60] литературу.

пропорционально T, а длина пробега имеет обратную температурную зависимость $l \sim 1/T$ (ср. [60], стр. 196). Это затухание квазиклассично, и в его расчете можно было при желании полностью исключить появление постоянной Планка. Действительно, величина $C/\hbar$ описывает скобку Пуассона резервуара (см. п. 7.3). При этом в квазиклассической асимптотике $C/\hbar \sim \hbar\langle n\rangle \sim kT/\omega$ есть квазиклассическое приближение для усредненной скобки Пуассона случайной силы, квадратичной по атомным отклонениям, которая пропорциональна среднеквадратичным флуктуациям координат и импульсов. При уменьшении квазиклассических флуктуаций квазиклассический вклад рассматриваемого канала затухания стремится к нулю, и остается только вакуумный квантовый вклад, не исчезающий и при нулевой температуре.

Расчет теплосопротивления связан дополнительно с учетом в кинетике релаксационных процессов величины энергетических вкладов различных колебаний, которые определяют фононную теплоемкость. При высоких температурах теплоемкость также рассчитывается по классической теории, так что теория теплоемкости может быть полностью изложена как классическая и в рамках теории релаксации ОС.

14.4 Спектроскопические проявления фононного ангармонизма

Помимо *однофононных возбуждений*, линейных по операторам $\hat{b}_s(\mathbf{k})$, $\hat{b}_s^+(\mathbf{k})$ переменных фононного поля, представляют интерес и нелинейные характеристики фононной системы. При этом, в отличие от точечных систем, в данном случае возможны комбинации операторов, относящихся к различным модам. Важным примером являются двухфононные возбуждения

$$\hat{B}_2(s_1, s_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \hat{b}_{s_1}(\mathbf{k}_1)\hat{b}_{s_2}(\mathbf{k}_2). \tag{14.9}$$

Они существенны, в частности, при рассмотрении комбинационных откликов твердого тела на лазерное воздействие. В общем случае такие возбуждения имеют сплошной спектр, если возбужденный набор волновых векторов $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ не подчинен какому-либо специальному условию для обеспечения узкополосности возбуждения.

Двухфононные возбуждения не могут быть наблюдаемы в кристаллах с точно гармоническим потенциалом в линейном отклике на лазерное ИК-возбуждение. Действительно, при формировании линейного отклика поле взаимодействует с линейными по $\hat{b}_s(\mathbf{k})$, $\hat{b}_s^+(\mathbf{k})$ переменными. При наличии двухфононных возбуждений эти переменные испытывают возмущение, описываемое слагаемыми третьего порядка по $\hat{b}_s$, $\hat{b}_s^+$, т. е. содержат лишь третьи гармоники, но не содержат вторых. Принципи-

альная роль кубичного члена $\hat{\mathcal{H}}_3$ в ангармоническом фононном потенциале $\hat{\mathcal{H}}_{\rm NL}$ состоит в модификации уравнений движения с дополнением их коммутаторами типа $[(\hat{b}^+)^3, \hat{b}] \sim (\hat{b}^+)^2$. Эти членам соответствуют осцилляции на вторых гармониках, которые и соответствуют двухфононным возбуждениям. Таким образом, если имеются двухфононные возбуждения, благодаря ангармонизму третьего порядка они проявляются в однофононном рассеянии лазерного поля. Практически, однако, в случае сплошного спектра наблюдение этих возбуждений затруднительно. Этот спектр ярко выражен лишь в том случае, когда спектр двухфононных возбуждений содержит узкую линию.

Качественные рассуждения и количественный анализ показывает, что такие кристаллы должны существовать [62]. Механизм образования таких возбуждений имеет довольно простой качественный смысл. Это образование связанных в пары однофононных возбуждений, связываемых через ангармоническое взаимодействие, описываемое вкладом в гамильтониан четвертого порядка, сохраняющим число фононов:

$$\hat{\mathcal{H}}_4 \sim \sum \hat{B}_2^+(s_1^{'}, s_2^{'}, \mathbf{k}_1^{'}, \mathbf{k}_2^{'}) V_4 \hat{B}_2(s_1, s_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \tag{14.10}$$

Здесь V_4 описывает соответствующую матрицу перехода из одного двухфононного состояния в другое, помеченное штрихованными аргументами. Эта матрица представляет оператор энергии взаимодействия в представлении вторичного квантования. Чтобы нагляднее представить, как это взаимодействие может привести к появлению связанных состояний с дискретной энергией связи, удобнее использовать смешанное координатно-импульсное представление: движение центра фононных пар описывать суммарным импульсом $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, а относительное движение описывать в координатном представлении разностной координатой $\mathbf{r}$, учитывая, что после такого перехода разностному импульсу $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/2$ соответствует производная $-i\partial/\partial\mathbf{r}$.

Собственная энергия пары фононов есть

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm p} = \hbar\left[\omega_{s_1}(\mathbf{k}_1) + \omega_{s_2}(\mathbf{k}_2)\right].$$

С учетом указанной выше замены получаем оператор кинетической энергии внутреннего движения

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm p} = \hbar\left[\omega_{s_1}\left(\mathbf{k}/2 - i\partial/\partial\mathbf{r}\right) + \omega_{s_2}\left(\mathbf{k}/2 + i\partial/\partial\mathbf{r}\right)\right]. \tag{14.11}$$

Этот оператор становится полностью аналогичным оператору кинетической энергии относительного движения двух материальных точек, если ограничиться параболическим приближением зависимости $\omega_s(\mathbf{k})$ при $s_1 = s_2 = s$. Он отличается лишь видом обобщенной массы $\hbar/4\omega_s^{''}(\mathbf{k})$, (здесь и далее штрихом обозначена операция дифференцирования по $\mathbf{k}$) входящей в член $-\hbar^2/2m\,\partial^2/\partial\mathbf{r}^2$. Если параболическая аппроксимация справедлива в достаточно широкой области дисперсионной кривой и

нелинейное взаимодействие V_4 описывает притяжение, то очевидно, что суммарный гамильтониан

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{B}} = \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{p}} + V_4 \tag{14.12}$$

может иметь при фиксированном $\mathbf{k}$ дискретный энергетический уровень, описывающей *связанное* фононное состояние — *бифонон*, описываемый собственной функцией

$$\Psi_{\mathrm{B}}(s_1, s_2, \mathbf{k}, \mathbf{r})\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0),$$

где суммарный импульс $\mathbf{k}_0$ произволен (его определенность для собственного состояния связана с пространственной однородностью взаимодействия, т. е. инвариантностью гамильтониана относительно сдвига). Область локализации квадрата модуля описанной функции в импульсном и координатном представлении показана на рис. 14.1.

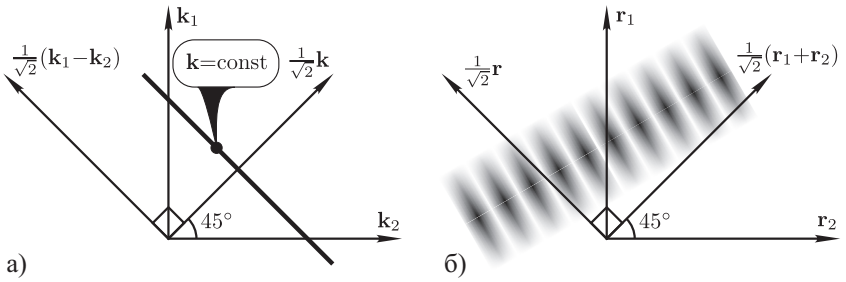

Рис. 14.1 Локализация квадрата модуля собственной волновой функции бифонона в импульсном (а) и в координатном (б) представлениях. Полная неопределенность по средней координате фононов указывает на то, что возбуждение имеет вид бегущей волны, описывающей движение центра бифонона.

Существование дискретного уровня у гамильтониана (14.12) возможно только для оптических фононов, у которых дисперсионная кривая имеет максимум в окрестности $\mathbf{k} = 0$ и описанное параболическое приближение адекватно. При этом зависимость энергии бифонона от величины суммарного импульса в достаточно широком диапазоне приводит лишь к относительно слабому уширению уровня. Зависимость от времени соответствующей собственной функции бифонона имеет вид

$$\Psi(s_1, s_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, t) = \exp(-i\omega_{\mathrm{B}}t)\Psi_{\mathrm{B}}(s_1, s_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \tag{14.13}$$

где ω_{B} — частота бифонона, включающая наряду с энергией связи сумму собственных энергий при нулевых импульсах и вклад суммарного импульса $\hbar(\omega''_{s_1}(\mathbf{k}) + \omega''_{s_2}(\mathbf{k}))\mathbf{k}^2/8$. Зависимость частоты бифонона от сум-

марного импульса приводит к уширению бифононного резонанса, аналогичному неоднородному уширению атомов.

Появление в спектрах лазерных откликов линий, соответствующих бифононным резонансам, наблюдалось как в спонтанном рассеянии [62], так и в активной спектроскопии [63]. Бифононные состояния образуют естественно выделенную ОС, для описания которой может быть использован как феноменологический, так и микроскопический подход. Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении других квазичастиц в твердом теле: электронно-дырочных пар в полупроводнике [33], куперовских пар в сверхпроводнике [64] и т. д. Во всех этих приложениях целесообразно использование изложенных методов описания ОС.

Глава 15
Статистическое и динамическое описание процесса квантового измерения

При изложении квантовой теории важную роль играет описание процедуры измерения квантовой величины [7, 11], в результате которого некоторая физическая переменная измерительной системы приобретает значение, в точности равное значению измеряемой квантовой величины, а состояние квантовой системы преобразуется в одну из собственных функций измеряемой переменной с вероятностью, определяемой начальным состоянием. Это преобразование квантового состояния иногда называется постулатом "квантовой редукции" или "коллапса" волновой функции, которому посвящена обширная литература. При обсуждении данного вопроса также удобно использовать супероператорную технику. Ниже дается определение переходного супероператора составной системы, образованной измеряемой квантовой системой и квазиклассическим измерительным устройством, применительно к классу процедур, включающих как стандартные "неразрушающие" измерения, вводимые постулатом "квантовой редукции" так и "разрушающие" измерения, приводящие после их завершения к искажению состояния не только величин, некоммутирующих с измеряемой, но и самой измеряемой величины. Данное определение дает статистическое описание квантового измерения в терминах теории открытых систем. Затем показывается, как введенное определение неразрушающего измерения возникает из полностью динамического описания процесса измерения, конкретизирующего открытую систему, неявно задаваемую ее переходным супероператром.

15.1 Система объект–прибор и переходной супероператор квантового измерения

Специфика данной квантовой системы состоит в том, что по смыслу самого постулата квантового измерения прибор должен быть "классиче-

ским", т. е. находиться в таком состоянии, в котором квантовый его характер может игнорироваться. По крайней мере, это относится к "индикаторной" переменной измерительной системы, значения которой отождествляются со значениями измеряемой квантовой величины. С учетом этого вместо классического распределения вероятностей $\mathcal{P}(\lambda)$, описывающего состояния игдикаторной переменной прибора в отсутствие взаимодействия, и матрицы плотности $\hat{\rho}$, описывающей распределение вероятностей изолированной квантовой системы, состояние описывается гибридной матрицей плотности $\hat{R}(\lambda)$, являющейся при фиксированном λ матрицей плотности по квантовым переменным и дающей положительный набор вероятностей $\mathcal{P}(n,\lambda) = \psi_n^+ \hat{R}(\lambda)\psi_n$ для любого ортогонального набора ψ_n. Последнее распределение описывает смешанный набор квантовой и классической переменных $\{\hat{A},\lambda\}$, где $\hat{A} = \sum \lambda_k \psi_k \psi_k^+$. Супероператор перехода смешанного набора данного типа в состояние, в котором λ точно совпадает с некоторой заданной квантовой переменной в момент времени $t = 0$, а состояние по этой переменной в процессе перехода неизменно, имеет вид:

$$S(\lambda_t,\lambda) = \sum_\mu \delta(\lambda_t - \mu)(\hat{P}_\mu \odot \hat{P}_\mu) = \hat{P}_{\lambda_t} \odot \hat{P}_{\lambda_t}, \tag{15.1}$$

где P_μ — собственный набор ортопроекторов измеряемой квантовой переменной с собственными значениями μ, переменные λ соответствуют начальным значениям приборного индикатора, λ_t — конечным. Соответствующее конечное состояние

$$\hat{R}(\lambda_t) = \sum_\lambda \hat{P}_{\lambda_t} \hat{R}_0(\lambda) \hat{P}_{\lambda_t}. \tag{15.2}$$

Для $\hat{R}_0(\lambda) = \hat{\rho}_0 \mathcal{P}_0(\lambda)$ с учетом независимости (15.1) от λ получаем

$$\hat{R}(\lambda_t) = \hat{P}_{\lambda_t} \hat{\rho}_0 \hat{P}_{\lambda_t}. \tag{15.3}$$

Это соотношение выражает факт измеренности начальных значений переменных $\hat{A} = \sum \mu \hat{P}_\mu$ значениями λ_t. В частности, если $\hat{\rho}_0 = P_\mu$, то получаем $\hat{R}(\lambda_t) = \delta_{\lambda_t \mu} \hat{P}_\mu$, т. е. показание прибора совпадает с точно заданным начальным значением переменной $\hat{A}$ объекта.

Для более общего обсуждения свойств описанной процедуры измерения следует рассмотреть совместное распределение вероятностей для моментов до и после измерения, рассматривая процедуру усреднения хронологически упорядоченных многомоментных величин [20]. Оно имеет вид

$$\mathcal{R}_{\lambda_t \lambda; k'k, ll'} = \mathcal{S}_{\lambda_t \lambda; k'k, ll'}[\rho_{kl} \mathcal{P}(\lambda)], \tag{15.4}$$

где пара λ_t, λ описывает классические переменные, пара двухиндексных переменных соответствует квантовому состоянию до измерения и

после, а $\rho_{kl}\mathcal{P}(\lambda)$ описывает начальное квантово-классическое состояние системы. Рассчитывая средние типа $\langle\delta(\lambda_t - \hat{A}(0))\rangle$, $\langle\delta(\lambda_t - \hat{A}(t))\rangle$, $\langle \mathrm{T}\,\delta(\hat{A}(t) - \hat{A}(0))\rangle$, характеризующие соответствующие точности, можно с этих общих позиций проиллюстрировать смысл утверждения о неизменности измеряемой переменной и отсутствия погрешности измерения. Так,

$$\langle\delta(\lambda_t - \hat{A}(0))\rangle = \sum_{\lambda_t\lambda}\sum_{k'kll'} \delta(\lambda_t - \lambda_k)\delta_{kl}\delta_{k'l'}\mathcal{S}_{\lambda_t\lambda;k'k,ll'}\rho_{kl}\mathcal{P}(\lambda).$$

Учитывая согласно определению (15.1) независимость результата преобразования S с матричными элементами

$$\mathcal{S}_{\lambda_t\lambda;k'k,ll'} = \delta_{kk(\lambda_t)}\delta_{kl}\delta_{kk'}\delta_{kl'} \tag{15.5}$$

от начального $\mathcal{P}(\lambda)$, получаем точность, равную 1, которой соответствует отсутствие погрешности. Такой же результат получается и для двух других оценок.

Поскольку состояние $\hat{\rho}_0 = \hat{P}_\mu$ с точно определенным значением $\lambda = \mu$ измеряемой переменной неизменно, рассмотренное измерение можно определить как "неразрушающее". Представляет интерес рассмотреть и более общий класс измерений вида

$$S(\lambda_t, \lambda) = \hat{\Pi}_{\lambda_t} \odot \hat{\Pi}_{\lambda_t}, \tag{15.6}$$

где по сравнению с (15.1) проекторы имеют более общий вид

$$\hat{\Pi}_\lambda = \varphi_\lambda\psi_\lambda^+. \tag{15.7}$$

В этом случае некоторая величина $\hat{B} = \sum\lambda\varphi_\lambda\varphi_\lambda^+$ после измерения копирует величину $\hat{A} = \sum\lambda\psi_\lambda\psi_\lambda^+$ в ее состоянии до измерения в унитарно преобразованном пространстве состояний. Результирующее состояние имеет вид

$$\hat{R}(\lambda_t) = \left(\psi_{\lambda_t}^+\hat{\rho}\psi_{\lambda_t}\right)\,\varphi_{\lambda_t}\varphi_{\lambda_t}^+. \tag{15.8}$$

Для чистого состояния $\hat{\rho}_0 = \psi_\lambda\psi_\lambda^+$ получаем состояние $\hat{R}(\lambda_t) = \delta_{\lambda_t\lambda}\,\varphi_\lambda\varphi_\lambda^+$ с точно измеренным начальным значением переменной $\hat{A}$, переведенной в процессе измерения в переменную $\hat{B}$.

Подобного типа преобразования начального состояния возникают, например, при рассмотрении лазерного возбуждения одного из состояний ψ_λ дипольно-неактивного перехода в некоторое дипольно-активное состояние и последующей регистрации излучаемого фотона как индикатора начального состояния ψ_λ. Можно выделить два специальных частных случая преобразования (15.7): а) переменные $\hat{A}$, $\hat{B}$ действуют в ортогональных подпространствах прямой суммы подпространств $H \oplus H$; б) переменные $\hat{A}$, $\hat{B}$ действуют в общем пространстве так, что волновые функ-

ции из собственного для $\hat{A}$ набора ψ_λ неортогональны волновым функциями из собственного для $\hat{B}$ набора φ_λ. В первом случае новые состояния системы ортогональны начальным, и пара $\hat{A}$, $\hat{B}$ образует коммутативный набор переменных, подчиняющийся классической логике событий, благодаря чему соотношения между результатами измерения и начальным состоянием измеряемой величины имеют классический характер. Во втором случае $\hat{A}$, $\hat{B}$ некоммутативны, и в процессе измерения появляются специфические квантовые соотношения между результатами измерения и начальным состоянием измеряемой величины, т. к. фактически измеряется модифицированная произвольным унитарным преобразованием копия измеряемой величины. Матричные элементы соответствующего переходного распределения вероятностей имеют вид

$$\mathcal{S}_{\lambda_t\lambda;k'k,ll'} = \delta_{kk(\lambda_t)}\delta_{kl}C_{kk'}C^*_{kl'}, \tag{15.9}$$

где C_{kl} — коэффициенты разложения $\varphi_k = \sum_l C_{kl}\psi_l$, представляемые скалярными произведениями $C_{kl} = \psi_l^+\varphi_k$. Их несингулярный в общем случае вид описывает квантовые корреляции.

15.2 Динамическая модель неразрушающего квантового измерения

В ряде руководств преобразование, выполняемое квантовым измерительным устройством, рассматривается как один из необходимых постулатов квантовой теории. Тем не менее, исходя только из уравнения Шредингера и рассчитывая вероятности соответствующих квантовых событий по правилам квантовой механики, можно проследить, как супероператорное преобразование квантовой редукции (15.6) возникает в результате динамической эволюции в замкнутой системе {квантовый объект + индикаторная ОС + резервуар}.

Для установления связи между переменной $\hat{A} = \sum \lambda_k \hat{P}_k$ в измерительной системе как минимум необходимо иметь *индикаторную* динамическую переменную $\hat{\lambda} = \mathit{\Lambda}(\hat{X})$, зависящую от индикаторных динамических переменных $(\hat{X})$ некоторой ОС, полный набор переменных которой, включающий переменные резервуара, имеет вид $\hat{\mathcal{X}} = \{\hat{X}, \hat{\Xi}\}$, где шумы $\hat{\Xi}$ не взаимодействуют ни с $\hat{A}$, ни с другими переменными измеряемой квантовой системы. Наиболее общий вид "неразрушающего", т. е. коммутирующего с оператором измеряемой переменной $\hat{A}$, гамильтониана измерительного взаимодействия представляется выражением

$$\hat{H}_I = \sum_\lambda \delta(\hat{A} - \lambda)\mathcal{H}_\lambda(\hat{X}), \tag{15.10}$$

где δ имеет смысл дискретной функции Кронекера, $\mathcal{H}_\lambda(\hat{X})$ — гамильтониан, отвечающий состоянию $\hat{\rho}_\lambda = \delta(\hat{A}-\lambda)$ измеряемой системы. Изменение состояния измеряемой системы в результате такого взаимодействия не влияет на переменную $\hat{A}$, однако вследствие наличия некоммутативных с $\hat{A}$ переменных те состояния, в которых $\hat{A}$ не имеет определенного значения, претерпевают существенные изменения.

Рассмотрим в терминах замкнутой квантовомеханической системы динамику волновой функции начального состояния, которую следует взять в виде мультипликативного состояния

$$\Psi_0 = c_0(\lambda) \cdot \psi_0(q, \xi), \tag{15.11}$$

где $c_0(\lambda)$ описывает волновую функцию измеряемой системы в собственном представлении для оператора $\hat{A}$, а $\psi_0(q, \xi)$ — измеряющей системы, где q задает обобщенные координаты ОС, а ξ — резервуара. Оператор временной эволюции с учетом взаимодействия с резервуаром имеет вид

$$U(t) = \left(U_\lambda(t)\delta(\lambda - \lambda')\right), \tag{15.12}$$

где λ, λ' — матричные индексы измеряемой системы, а

$$U_\lambda(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left[\mathcal{H}_\lambda(\hat{X}) + \mathcal{H}_R(\hat{X}, \hat{\Xi})\right] t\right\} \tag{15.13}$$

описывают операторы временной эволюции в пространстве всех переменных измерительной системы с учетом действия шумов для фиксированного значения переменной $\hat{A}$; $\mathcal{H}_R$ описывает гамильтониан резервуара и его взаимодействие с индикаторной ОС. Соответственно, временная зависимость волновой функции имеет вид

$$\Psi(t) = c_0(\lambda) \cdot \psi_\lambda(t), \quad \psi_\lambda(t) = U_\lambda(t)\psi(q, \xi). \tag{15.14}$$

Чистое состояние (15.14) в системе {квантовый объект + измерительная ОС + резервуар} описывает квантовые статистические связи между объектом и всеми переменными измерительной системы, из которых основной интерес представляют только значения индикаторной переменной λ. Исходя из очевидных требований, предъявляемых к свойствам измерительной системы, мы можем конкретизировать общие свойства унитарных операторов $U_\lambda(t)$, даже не вникая в детали ее устройства. Динамика, соответствующая гамильтонианам $\mathcal{H}_\lambda(\hat{X})$, при каждом λ должна приводить к тому, чтобы соответствующая динамическая переменная $\Lambda(\hat{X})$ принимала значение λ в пределах некоторой асимптотически малой погрешности ε. Очевидная модель, обеспечивающая это условие, описывается осциллятором с релаксацией к равновесному состоянию со значением $\Lambda(\hat{X}) = \lambda$ с точностью до флуктуаций динамических переменных $\hat{X}$ (см. Рис. 15.1). Этот осциллятор в общем виде имеет, разу-

меется, квантовую природу, однако, ничто не препятствует ему иметь пренебрежимо малые квантовые флуктуации. Более того, в дополнение к его вакуумным флуктуациям у него могут присутствовать и дополнительные шумы типа тепловых флуктуаций, которые могут приводить к полной несущественности квантового характера флуктуаций. Принципиально квантовый характер переменная $\Lambda(\hat{X})$ имеет только по переменным измеряемого квантового объекта, приобретая зависимость от них в процессе взаимодействия.

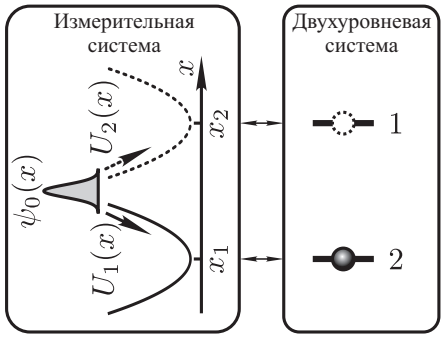

Рис. 15.1 Механизм измерения двухуровневой квантовой системы измерительной системой с потенциалом, определяемым состоянием измеряемой системы.

Теперь можно проанализировать, чему же после истечения времени релаксации физически соответствует квантовое состояние (15.14) с учетом того, что наблюдатель смотрит только на прибор, т. е. следит только за значением $\Lambda(\hat{X})$, огрубляя ее значение в пределах некоторой малой величины ε. Наличие большого числа дополнительных степеней свободы означает в общем случае существование равновесных флуктуаций вокруг наблюдаемого состояния. Вероятностные распределения в подсистеме {индикатор + объект} описываются соответствующей матрицей плотности

$$\hat{\rho}(t) = c_0(\lambda)c_0^*(\lambda')\hat{\rho}_{\lambda\lambda'}(t), \quad \hat{\rho}_{\lambda\lambda'}(t) = \int \psi_\lambda(t)\psi^*_{\lambda'}(t)\,dq\,d\xi. \tag{15.15}$$

Поскольку волновая функция $\psi_\lambda(t)$ в результате релаксационного перехода локализована в окрестности области $\Lambda(q,p) = \lambda$, то недиагональные матричные элементы обращаются в ноль, и матрица плотности приобретает вид

$$\hat{\rho}(t) = |c_0(\lambda)|^2\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{15.16}$$

что соответствует формуле (15.3), выражающей преобразование квантовой редукции.

Представляет интерес рассмотреть количественные требования к параметрам измерительной системы, что нетрудно сделать для случая линейных осцилляторов, описываемых динамическими уравнениями

$$m\frac{d^2\hat{x}}{dt^2} + m\gamma\frac{d\hat{x}}{dt} + m\omega^2(\hat{x} - x_\lambda) = \hat{\eta}(t), \tag{15.17}$$

где m — масса, γ — скорость затухания, ω — частота, x_λ — равновесная координата для потенциала, зависящего от состояния квантовой переменной λ, $\hat{\eta}(t)$ — равновесный квантовый тепловой шум, соответствующий некоторой температуре T. Данное уравнение выражает с помощью параметра затухания γ результат взаимодействия с резервуаром и описывает в терминах ОС соответствующее уравнение Шредингера или его решение (15.14) для волновой функции полного пространства состояний измерительной системы. Решение уравнения (15.17) с заданным операторным начальным условием $m d\hat{x}/dt = \hat{p}$, $\hat{x} = \hat{q}$ для смещенного вакуумного начального состояния с некоторым $\langle\hat{q}\rangle = q_0$, $\langle\hat{p}\rangle = p_0$ может быть описано в терминах некогерентной суперпозиции вакуумных волновых функций

$$\psi_{vac}(q, \kappa, \nu) = \Big(\frac{m}{\pi\hbar\omega}\Big)^{1/4} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\nu q - \frac{(q-\kappa)^2}{2\hbar\omega/m}\right],$$

смешанных с некоторой плотностью вероятностей $w(\kappa, \nu, t)$ распределения средних координат и импульсов κ, ν, соответствующей уравнению и начальным условиям. В рассматриваемых условиях результирующее состояние является гауссовским и описывается средними значениями и среднеквадратичными отклонениями

$$q_\lambda(t) = x_\lambda + (q_0 - x_\lambda)\, e^{-\gamma t}, \quad p_\lambda(t) = p_0\, e^{-\gamma t},$$
$$\sigma^2_{q\lambda}(t) = \sigma^2_T + (\sigma^2_0 - \sigma^2_T)\, e^{-2\gamma t},\ \sigma^2_{p\lambda}(t) = m^2\omega^2[\sigma^2_T + (\sigma^2_0 - \sigma^2_T)\, e^{-2\gamma t}],$$

где $\sigma^2_0 = \hbar\omega/2m$ — среднеквадратичная неопределенность координаты в вакуумном состояния, $\sigma^2_T = \sigma^2_0 \mathrm{cth}(\hbar\omega/2kT) \to (kT/m\omega^2)[1 - \mathcal{O}(h\omega/2kT)]$ — аналогичная неопределенность при температурном равновесии. При $t \gg 1/\gamma$ получаем

$$q_\lambda(t) = x_\lambda, \quad p_\lambda(t) = 0, \quad \sigma^2_{q\lambda}(t) = \sigma^2_T, \quad \sigma^2_{p\lambda}(t) = m^2\omega^2\sigma^2_T. \tag{15.18}$$

Для каждого λ равновесная смесь вакуумных волновых функций, соответствующая чистому состоянию $\psi_\lambda(t)$ расширенной системы, описывается вероятностной плотностью

$$w_\lambda(q, p) = \frac{\exp\left[-\dfrac{(q - x_\lambda)^2}{\sigma^2_{q\lambda} - \sigma^2_0} - \dfrac{p^2}{\sigma^2_{p\lambda} - m^2\omega^2\sigma^2_0}\right]}{2\pi\sqrt{(\sigma^2_{q\lambda} - \sigma^2_0)(\sigma^2_{p\lambda} - m^2\omega^2\sigma^2_0)}}, \tag{15.19}$$

где $\sigma^2_{q\lambda} \geq \sigma^2_0$, $\sigma^2_{p\lambda} \geq m^2\omega^2\sigma^2_0$ в соответствии с соотношением неопределенностей, поскольку σ^2_0, $m^2\omega^2\sigma^2_0$ соответствуют минимальным неопределенностям координата и импульса для рассматриваемого класса несжатых

(т. е. с равноправно представленными импульсами p и координатами q) состояний.

С целью интерпретации смешанного состояния, соответствующего волновой функции (15.14) следует рассмотреть среднее значение произвольной переменной $\hat{B}$ системы {квантовый объект + индикатор}

$$\langle\hat{B}\rangle = \sum_{\lambda\lambda'} c^*_{\lambda'}\psi^*_{\lambda'}(t)\hat{B}_{\lambda'\lambda}\psi_\lambda(t)c_\lambda,$$

которое выражается через матрицу плотности (15.15). С помощью плотности (15.19) в этом выражении можно интерпретировать $\psi_\lambda(t)$ как смешанное состояние

$$\langle\hat{B}\rangle = \sum_\mu \int d\kappa d\nu\, w_\mu(\kappa,\nu) \sum_{\lambda\lambda'} c^*_{\lambda'}\psi^*_{vac}(q,\kappa,\nu)\delta_{\lambda\lambda'}\hat{B}_{\lambda'\lambda}\psi_{vac}(q,\kappa,\nu)c_\lambda,$$

где $\psi_{vac}(q,\kappa,\nu)$ определена лишь в пространстве индикаторной переменной $\hat{x}$. Для каждого λ плотность $w_\lambda(\kappa,\nu)$ локализована с учетом (15.18) в окрестности точки $\kappa = x_\lambda$, $\nu = 0$ с точностью до температурных флуктуаций, описываемых распределением (15.19). Это представление при условии $\sigma_T \ll |x_{\lambda'} - x_\lambda|$ дальнейшим интегрированием по κ, ν внутри областей $|x_{\lambda'} - x_\lambda| \gg \Delta_\lambda \gg \sigma_T$ приводится к следующему эквивалентному виду:

$$\langle\hat{B}\rangle = \sum_\mu |c_\mu|^2 \sum_\lambda \delta_{\lambda\mu}\psi^*_{vac}(q,x_\lambda,0)\hat{B}_{\lambda\lambda'}\delta_{\lambda'\mu}\psi_{vac}(q,x_\lambda,0), \qquad (15.20)$$

где $|c_\mu|^2$ описывает распределение вероятностей представленной некогерентной смеси волновых функций

$$\psi_\mu(\lambda,q) = \delta_{\lambda\mu}\psi_{vac}(q,x_\lambda,0). \qquad (15.21)$$

В этих состояниях центр локализации x_λ координатной волновой функции определяется значением измеряемой переменной λ, которая для каждого значения индекса μ некогерентной смеси имеет значение $\lambda = \mu$. В рассмотренной схеме измерения, таким образом, возникает смешанное состояние, составленное только из волновых функций с точно определенными значениями λ переменной $\hat{A}$, хотя в общем случае результирующая диагональная матрица плотности может быть реализована и другими способами. Важным частным примером качественно другого представления является представление диагональной матрицы плотности $\rho_{\lambda\lambda'} = |c_\lambda|^2\delta_{\lambda\lambda'}$ некогерентной суперпозицией когерентных состояний $\psi(\lambda) = c_\lambda \exp(i\varphi_\lambda)$ со случайными независимыми равномерно распределенными фазами φ_λ.

В рамках описанной осцилляторной модели нетрудно указать физические оценки для параметров измерительной системы. Для того, чтобы

тепловой резервуар реализовывал описанный релаксационный процесс, необходимо условие $\omega \gg \gamma \sim 1/\tau$, где τ — желаемое время измерения, ограничивающее снизу частоту колебаний. В терминах этого ограничения вакуумная неопределенность координаты есть $\sigma_0 \sim (\hbar\tau/m)^{1/2}$. Что же касается σ_T, то выбор этого параметра содержит произвол, и его появление может быть мотивировано желанием иметь дело только с неквантовыми флуктуациями. В последнем случае справедлива оценка $\sigma_T \sim (kT/m)^{1/2}\tau$. Разрешающая способность по координате определяется снизу оценками σ_0 или σ_T, но надежность измерения переменной λ повышается с увеличением характерного расстояния $\Delta \gg \sigma_T, \sigma_0$ между равновесными точками x_λ. Платой за это является повышение энергии состояний, возникающих в процессе измерения, причем соответствующий масштаб энергий дается величиной

$$E_\Delta \sim m\left(\frac{\Delta}{\tau}\right)^2.$$

Эта величина может быть очень большой, если требуется выполнять измерение за очень малое время с использованием макроскопических индикаторов: при $\tau \sim 10^{-15}$ с, $m \sim 1$ г, $\Delta \sim 1$ см получаем $E_\Delta \sim 10^{23}$ Дж.

Приложения

П1 Возможное обобщение квантовых физических величин

В п. 2.2 *Главы 2* при обсуждении логики квантовых событий (стр. 124) указывалось, что для того, чтобы система рассматриваемых событий была классической, достаточно, чтобы каждый элемент, находящийся в линейной оболочке некоторого набора других элементов, совпадал с одним из них или принадлежал ему. Тем самым, ортогональности набора векторов, описывающих систему классических событий, не требуется. Поэтому из требования классичности логики событий, связанной с квантовой физической величиной, не следует, что набор собственных векторов соответствующего ей оператора обязан быть ортогонален. Необходимо лишь, чтобы он не был переполнен. Соответствующий класс матриц в конечномерном гильбертовом пространстве носит название матриц простой структуры [31]. Они приводятся к диагональному виду преобразованием подобия $\hat{f} \to V^{-1}\hat{f}V$ ($V^{-1} \neq V^{+}$) и соответствующий им базис собственных векторов отличается этим преобразованием от ортогонального.

В качестве двумерного примера таких матриц можно привести матрицы вида

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & (\lambda_2 - \lambda_1)\mathrm{tg}\theta \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad (\text{П1.1})$$

где (λ_1, λ_2) — собственные значения, а θ — угол отклонения от ортогональности одного из базисных векторов. Эта матрица обобщает класс диагональных 2×2-матриц на матрицы, приводимые к диагональному виду в базисе собственных векторов, один из которых отклонен от соответствующего ему вектора ортогонального базиса на угол θ. Она имеет две системы собственных векторов — правую и левую, которые ортогональны друг другу. Они изображены на рис. П1.1.

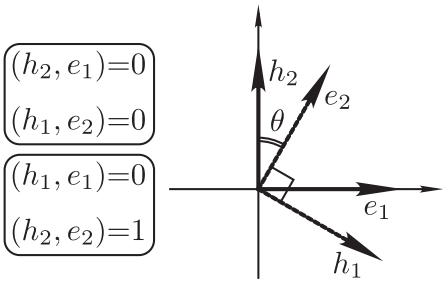

Рис. П1.1 Биортогональная система неортогональных базисных векторов для примера двумерного оператора простой структуры: $|e_k\rangle$ — правые собственные векторы, $\langle h_k|$ — левые.

Ее спектральное представление имеет следующий вид:

$$\hat{f} = \lambda_1 \hat{P}_1 + \lambda_2 \hat{P}_2, \tag{П1.2}$$

где $\hat{P}_k = |e_k\rangle \langle h_k|$ — обобщенные проекторы, которые идемпотентны и ортогональны, т. е. $\hat{P}_k \hat{P}_l = \delta_{kl} \hat{P}_k$; образуют полный набор, т. е. $\sum \hat{P}_k = \hat{I}$; но не эрмитовы, т. е. $\hat{P}_k^+ \neq \hat{P}_k$. В рассматриваемом случае они имеют вид

$$\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{tg}\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{tg}\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{П1.3}$$

Диагонализирующие матрицы подобия V, V^{-1} составлены из правых и левых собственных векторов и имеют вид:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{tg}\theta \\ 0 & \sec\theta \end{pmatrix}. \tag{П1.4}$$

Операторам типа (П1.1) соответствуют две классические системы событий, которые, однако, несовместны в совокупности. Совместность правой и левой систем событий, связанных с одной и той же физической величиной выделяет класс эрмитовых или, в более общем случае, нормальных операторов, использованных в качестве традиционного способа описания квантовых физических величин. Физический смысл указанного возможного обобщения пока неясен. Операторам рассмотренного типа могут быть поставлены в соответствие два самосопряженных оператора:

$$\hat{f}_+ = \lambda_1 |e_1\rangle \langle e_1| + \lambda_2 |h_2\rangle \langle h_2|, \quad \hat{f}_- = \lambda_1 |h_1\rangle \langle h_1| + \lambda_2 |e_2\rangle \langle e_2|. \tag{П1.5}$$

Если базисы e_k, h_k биортонормированы, то, как минимум, два из приведенных здесь четырех ортопроекторов $\hat{P}_k^{(\mathrm{e})} = |e_k\rangle \langle e_k|$, $\hat{P}_k^{(\mathrm{h})} = |h_k\rangle \langle h_k|$ не нормированы, что затрудняет их интерпретацию как индикаторов и придание физического смысла операторам (П1.5).

П2 Ланжевеновский шум в ДА

Рассмотрим стохастическую динамику базисных операторов ДА $\hat{s}_k(t)$, $\hat{s}_k(0) = \hat{\sigma}_k$ для самого общего вида гамильтониана взаимодействия с резервуаром, определенного формулой (9.1) для стационарного шума ξ с нулевым средним значением. Тогда для соответствующих ланжевеновских шумов диффузионного марковского процесса получаем

$$\hat{\eta}_k = \frac{i}{2} \sum_{\nu} \hat{\xi}_{\nu}^{\Delta} [\hat{s}_{\nu}, \odot] \hat{s}_k, \tag{П2.1}$$

где

$$\hat{\xi}_{\nu}^{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\mu} \int_0^{\Delta} \hat{\xi}_{\mu}(\tau) S_{\mu\nu}^0(\tau) d\tau \tag{П2.2}$$

при $\Delta \gg \tau_{\mathrm{c}}$. Здесь $S_{\mu\nu}^0(\tau)$ описывает собственную динамику ДА. Представляя в выражении (П2.1) коммутаторы через структурные коэффициенты, получаем шумы в виде

$$\hat{\eta}_k = \sum_{\nu n} \varepsilon_{k\nu n} \hat{\xi}_{\nu}^{\Delta} \hat{s}_n. \tag{П2.3}$$

С учетом (П2.2) шумы $\hat{\xi}_{\nu}^{\Delta}$ имеют корреляционную матрицу

$$N_{\mu\nu} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\lambda\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle S_{\mu\lambda}^0(t - \tau/2) \mathcal{K}_{\lambda\kappa}(\tau) S_{\kappa\nu}^0(t + \tau/2) \right\rangle_{t \in \Delta} d\tau, \tag{П2.4}$$

где

$$\mathcal{K}_{\lambda\kappa}(\tau) = \left\langle \hat{\xi}_{\lambda}(0) \hat{\xi}_{\kappa}(\tau) \right\rangle.$$

Это выражение качественно отличается от аналогичного ему выражения (9.4) для матрицы Q при расчете релаксационного супероператора тем, что в нем отсутствует ограничение $\tau > 0$, отражающее хронологическую упорядоченность выражения для супероператора. Поэтому оно выражается только через симметризованную корреляционную функцию $K(\tau)$ шумов $\hat{\xi}_k(t)$. В частности, для случая одночастотной прецессии, подставляя в выражение (П2.4) спектральное представление (9.26), после усреднения по времени получаем

$$N = \frac{1}{\Delta} \sum_{k} \langle \nu_k | \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) \exp(-i\nu_k \tau)\, d\tau\, |\nu_k\rangle\, |\nu_k\rangle \langle \nu_k| . \tag{П2.5}$$

Вклад коммутатора здесь выпадает вследствие антисимметрии соответствующего ему вклада относительно замены $\nu_k \to -\nu_k$, и он существенен

только при расчете релаксационного супероператора. Наличие Δ в знаменателе соотношения (П2.5) указывает, что в пределе $\Delta \to 0$ шум (П2.2) эквивалентен белому шуму со спектральной плотностью $N\Delta$.

Литература

[1] С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, *Проблемы нелинейной оптики*. "Наука", Москва, 1964.

[2] B. W. Shore, *The theory of coherent atomic excitation*. "Wiley", New York, 1990.

[3] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge Univ. Press, 1995.

[4] C. P. Williams, S. H. Clearwater, *Explorations in Quantum Computing*. "Springer", 1998.

[5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*. "Наука", Москва, 1974.

[6] А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Квантовая механика и атомная физика*. "Просвещение", Москва, 1970.

[7] Д. И. Блохинцев, *Основы квантовой механики*. "Наука", Москва, 1983.

[8] А. С. Давыдов, *Квантовая механика*. "Наука", Москва, 1973.

[9] Ж.-П. Вижье, "Панельная дискуссия". *Эйнштейновский сборник*, стр. 230–269, "Наука", Москва, 1970.

[10] О. Мороз, *Жажда истины*. "Знание", Москва, 1984.

[11] А. Садбери, *Квантовая механика и физика элементарных частиц*, "Мир", Москва, 1989.

[12] *Справочник по теории вероятностей и математической статистике*, под редакцией В. С. Королюка. "Наукова думка", Киев, 1978.

[13] Ю. Л. Климонтович, *Статистическая физика*. "Наука", Москва, 1982.

[14] J. Dalibard, Y. Castin, K. Mølmer, Phys. Rev. Lett., **68**(3), p. 580 (1993).

[15] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*. "Наука", Москва, 1970.

[16] K. Wódkiewicz, J. H. Eberly, Phys. Rev. A, **32**, pp. 992–1001 (1985).

[17] В. М. Файн, *Фотоны и нелинейные среды*. "Сов. радио". Москва, 1972.

[18] Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*. “Мир”, Москва, 1978.
[19] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*. “Наука”, Москва, 1966.
[20] Б. А. Гришанин, *Квантовая электродинамика для радиофизиков*. Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1981.
[21] E. P. Wigner, Phys. Rev., **40**, p. 749 (1932).
[22] J. E. Moyal, Proc. Cambr. Phil. Soc., **45**, p. 99 (1948).
[23] Р. Глаубер, *Оптическая когерентность и статистика фотонов*. В: *Квантовая оптика и квантовая радиофизика*. “Мир”, Москва, 1966.
[24] Б. А. Гришанин, ТМФ, **48** (3), стр. 396 (1981).
[25] М. Лэкс, *Флуктуации и когерентные явления*. “Мир”, Москва, 1974.
[26] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*. “Academic Press”, London, 1976.
[27] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*. “Наука”, Москва, 1969.
[28] Ж. Диксмье, *C^*-алгебры и их представления*. “Наука”, Москва, 1974.
[29] A. Kossakowski, Rep. Math. Phys., **3**, p. 247 (1973); Bull. Acad. Polon. Sci. Math., **21**, p. 21 (1973).
[30] H. Primas, U. Müller-Herold, in: S. A.Rice, *For Ilia Prigogin*. “Wiley”, New York, 1978.
[31] К. А. Абгарян, *Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем*. “Наука”, Москва, 1973.
[32] И. Пригожин, *От существующего к возникающему*. “Наука”, Москва, 1985.
[33] Б. А. Гришанин, В. М. Петникова, В. В. Шувалов, *Нестационарная четырехфотонная спектроскопия полупроводников*. В: *Итоги науки и техники: современные проблемы лазерной физики*, **2**, ВИНИТИ, Москва, 1990.
[34] Дж. Клаудер, Э. Сударшан, *Основы квантовой оптики*. “Мир”, Москва, 1970.
[35] П. А. Апанасевич, *Основы теории взаимодействия света с веществом*. “Наука и техника”, Минск, 1977.
[36] Б. А. Гришанин, ЖЭТФ, **58**(2), стр. 262–266 (1983); Б. А. Гришанин, В. Л. Рыжков, В. Н. Задков, Вестн. Моск. ун-та, сер. 3, Физ. астрон., **35**(3), стр. 23-28 (1994).
[37] Ю. Л. Климонтович, *Статистическая теория открытх систем*. “Янус”, Москва, 1995.
[38] С. Чандрасекар, *Стохастические проблемы в физике и астрономии*. “Иностранная литература”, Москва, 1947.
[39] Н. Б. Делоне, В. П. Крайнов, *Атом в сильном световом поле*. “Атомиздат”, Москва, 1978.
[40] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*. “Наука”, Москва, 1973.

[41] С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику*. "Наука", Москва, 1981.
[42] У. Люиселл, *Излучение и шумы в квантовой электронике*. "Наука", Москва, 1981.
[43] У. Фано, Дж. Купер *Спектральные распределения сил осцилляторов в атомах*. "Наука", Москва, 1972.
[44] F. Bloch, Phys. Rev., **102**, p. 104 (1956).
[45] А. М. Бонч-Бруевич, Г. А. Вартанян, В. В. Храмов, ЖЭТФ, **78**, стр. 538 (1970); J. L. Carlsten, A. Szöke, M. J. Raymer, Phys. Rev. A, **15**, p. 1029 (1977).
[46] И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров*. "Наука", Москва, 1963.
[47] Б. А. Гришанин, Вестн. Моск. ун-та, сер. 3, Физ. астрон., **26**(6), стр. 50-54 (1994).
[48] Т. С. Бимагамбетов, Б. А. Гришанин, В. И. Одинцов, Препр. физ. фак. МГУ $\mathcal{N}$ 20/1987, Москва, 1987.
[49] W. Happer, Rev. Mod. Phys., **44**, pp. 169–249 (1972).
[50] E. Arimondo, "Coherent population trapping in laser spectroscopy", Progress in Optics, **35**, pp. 257–354 (1996).
[51] Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, Д. Мешеде, ЖЭТФ, **113**, стр. 144–167 (1998).
[52] I. V. Bargatin, B. A. Grishanin, and V. N. Zadkov, In: Proceedings of SPIE, **3736**, pp. 246-254 (1999).
И.В.Баргатин, Б. А. Гришанин, Оптика и спектроскопия, **87**(3), pp. 400-408 (1999).
[53] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*. "Наука", Москва, 1982, стр. 456, ф-ла (96.4).
[54] А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, *Теория циклических ускорителей*. "Физматгиз", Москва, 1962.
[55] J. R. Senitzky, Phys. Rev., **119**, p. 670 (1960); Phys. Rev., **124**, p. 642 (1961).
[56] А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*. "Наука", Москва, 1975.
[57] В. Н. Байер, В. М. Катков, В. С. Фадин, *Излучение релятивистских электронов*. "Атомиздат", Москва, 1973.
[58] А. И. Ахиезер, М. П. Рекало, *Элементраные частицы*. "Наука", Москва, 1986.
[59] А. С. Давыдов, *Теория твердого тела*. "Наука", Москва, 1976.
[60] Дж. Рейсленд, *Физика фононов*. "Мир", Москва, 1975.
[61] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*. "Наука", Москва, 1965.
[62] H. Cohen, J. Ruvalds, Phys. Rev. Lett., **23**, pp. 1386–1381 (1969).
[63] J. M. Gale, F. Vallee, C. Flytzanis, In: *Second International Conference on Time-Resolved Vibrational Spectroscopy*. "Springer-Verlag", Bayreuth FRG, 1969.

[64] B. A. Grishanin, V. A. Lobastov, V. M. Petnikova, and V. V. Shuvalov, *Laser Physics*, **3**(1), p. 121 (1993).

Часть V
Список публикаций Б. А. Гришанина

В этом разделе приведен полный список научных публикаций Бориса Андреевича Гришанина. В список вошли только работы в реферируемых изданиях, не вошли многочисленные тезисы докладов и труды конференций. К большей части ссылок даны аннотации публикаций, что позволяет более детально понять, какими проблемами науки интересовался и занимался Борис Андреевич.

Книги и главы в книгах

1. Б. А. Гришанин, *Квантовая электродинамика для радиофизиков*. Издво Моск. ун-та, Москва, 1981, 112 с.
   Аннотация. Данная книга базируется на специальном курсе, который читался автором на физическом факультете МГУ, начиная с 1973 г. Она содержит систематическое изложение методов квантовой теории случайных процессов в том виде, как они используются в теоретических расчетах квантовых открытых систем. Наибольшее применение эти методы нашли при решении задач лазерной физики, в связи с чем рассматриваемые физические системы относятся, в основном, к этой области приложений квантовой теории. Специфика данной книги состоит в том, что, будучи рассчитанной по содержанию и характеру изложения, главным образом, на читателя-физика, она, тем не менее, базируется на идеологии и наиболее важных понятиях математической теории случайных процессов. Это позволяет использовать принятую в математической теории систематизацию описываемых методов, которая является наиболее общей и компактной. Изложение сопровождается обсуждением наиболее существенного качественного содержания рассматриваемых процессов с физической точки зрения. В частности, подробно обсуждается модель двухуровневого атома с акцентом на таких вопросах как пределы применимости марковского описания, структура и качественные особенности спектра флуоресценции и роль упругой дефазировки. В книге содержится значительный объем оригинального материала как в части математического описания, так и физических приложений, однако, его использование полностью согласовано с основной целью — дать замкнутое изложение теории и ее наиболее важных приложений к задачам лазерной физики. Книга рассчитана на научных работников, студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в различных областях приложений квантовой физики, и должна представить интерес и для математиков, соприкасающихся с проблемами квантовой теории.
2. Б. А. Гришанин, В. М. Петникова, В. В. Шувалов, *Нестационарная четырехфотонная спектроскопия полупроводников*, В серии: *Современные проблемы лазерной физики* (ВмНмТм: Москва, Т. 2, 1990). 75 с.
3. B. A. Grishanin, A. Yu. Chikishev, N. I. Koroteev, V. D. Vachev, V. N. Zadkov, “Fast (pico- and femtosecond) reaction dynamics in the excited states of large molecules: Fluorescence studies and computer simulation”, In: *Femtosecond Reaction Dynamics*, Edited by D.A.Wiersma, North-Holland, Amsterdam/Oxford/New York/Tokyo, pp. 169–195 (1994).
   Abstract. A computer simulation procedure is developed for modeling ultrafast photoinduced intramolecular dynamics in polyatomic molecules. Electronic-vibrational excitation by ultrashort laser pulses (20 fs $\div$ 1 ps) is treated explicitly using quantum theory in harmonic approximation. MD

simulation is used for studying the excited state dynamics. *First part* of the paper is devoted to the modeling of photoinduced isomerization of stilbene molecule Model potential energy surfaces (PES) for the ground and first excited singlet states are obtained using experimental absorption spectra in supersonic jet. Using a symmetrical along the torsional coordinate PES, it is shown that *cis*-stilbene undergoes the first stage of the isomerization reaction, i. e. transition to the twisted configuration, much faster than *trans*-stilbene, only due to the specific conformational properties. *Second part* is focused on modeling of dissociation dynamics of ethylene molecule excited by short IR laser pulse.

4. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Quantum jumps in molecules excited by intense laser field", In: *Quantum Communication and Measurements* (V. P. Belavkin, O. Hirota and R. L. Hudson, Eds.)(Plenum, 1995) pp. 272–280.
   Abstract. Computer simulation results on HCl^+ dissociation in intense ($I\tilde{1}0^{14}$ W/cm^2) laser field in two-level approximation in the model of random quantum jumps are presented. The probabilities of ground and excited states of a molecule at the end of laser pulse are calculated. It is shown that molecule's dissociation dynamics in intense laser field has a quantum stochastic nature. It is argued that the used model can be applied to multiatomic molecules as well.
5. Б. А. Гришанин, Е. В. Шувалова, А. Ю. Чикишев, "Динамика переноса протона в активном центре белка-фермента альфа-химотрипсина", В кн: *Молекулярная динамика ферментов* (ред. Ю. М. Романовский), Изд-во: МГУ, Москва, 2000, с. 139–151.
6. B. A. Grishanin, Yu. M. Romanovskii, A. Yu. Chikishev, E. V. Shuvalova, "Quantum mechanical model of proton transfer in a fluctuating potential field of the active side of alpha-chymotrypsin", In: *Lecture Notes in Physics, Stochastic Processes in Physics, Chemistry, and Biology* (Jan A. Freund Thorsten Poechel, Ed.) (Springer, 2000), pp. 338–349.
   Abstract. We studied the process of proton transfer from oxygen of serine 195 to nitro- gen of the imidazole ring of histidine 57 that takes place in the active site of the enzymeα-chymotrypsin (CT). We studied the dynamics of the proton in a non-stationary potential of the active site of CT with regard to the fluctuations determined by the oscillations of the clusters. In addition to tunneling in the non-stationary potential we observed an incoherent dynamic irreversible process of the over-barrier transfer, that is caused by the noise action. The fluctuations of the potential field of the active site were described by either white or colored noise. Probability and energy parameters were obtained for both cases. We studied the influence of the amplitude and frequency of the colored noise and the asymmetry of the potential wells of the non-stationary two-minimum potential on the proton dynamics. It was demonstrated that over-barrier proton transfer plays the most important role.
7. D. V. Sych, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Optimal alphabets for noise-resistant quantum cryptography", In: *Quantum Information Processing:*

From Theory to Experiment (Eds.: D. G. Angelakis, M. Christandl, A. Ekert, A. Kay, and S. Kulik) (IOS Press, NATO Science Series: Computer and Systems Sciences, Vol. 199, 2006), pp. 113–117.
Abstract. Possibilities of increasing the critical error rate of quantum key distribution (QKD) protocols are investigated. We consider QKD protocols with discrete alphabets, letters of which form regular polyhedrons on the Bloch sphere (tetrahedron, octahedron, cube, icosahedron, and dodecahedron, which have 4, 6, 8, 12, and 20 vertices respectively) and a QKD protocol with continuous alphabet, which corresponds to the limiting case of a polyhedron with infinite number of vertices. The stability of such QKD protocols against intercept?resend and optimal eavesdropping attacks on the individual information carriers is studied in detail. It is shown that all these QKD protocols have approximately the same critical error rates. In the case of optimal eavesdropping strategies, after basis reconciliation, the QKD protocol with continuous alphabet surpasses all other protocols in terms of noise-resistance. Without basis reconciliation the protocol with the highest critical error rate has a tetrahedron-type alphabet. Additional increase of the dimensionality of the quantum alphabet leads to a further increase of the critical error rate.

8. Б. А. Гришанин. “Мои воспоминания о Руслане”: В кн. *Профессор Р.Л.Стратонович: Воспоминания родных, коллег и друзей* (под ред. Ю.М.Романовского), М.: Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2007, с. 93–97.

Статьи в реферируемых журналах

9. Б. А. Гришанин, “Оптимальное измерение параметров радиолокационного сигнала в ближней зоне РЛС”, Вопросы специальной радиоэлектроники, No. 11, 57–66 (1964).
10. Б. А. Гришанин, Ю. Н. Минин, Ю. П. Михайлов, “Режекция радиолокационного сигнала на промежуточной частоте”, Вопросы специальной радиоэлектроники, No. 3, 23–32 (1965).
11. м. А. Большаков, Б. А. Гришанин, “Оптимальное использование многоканальной системы для выделения регулярных сигналов из шума”, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **4**(1), 95–103 (1966).
12. Б. А. Гришанин, Р. Л. Стратонович, “Ценность информации в случае невозможности прямого оценивания наблюдаемой случайной величины”, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **4**(3), 3–25 (1966).
13. Б. А. Гришанин, Р. Л. Стратонович, “Ценность информации и достаточные статистики при наблюдении случайного процесса”, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **4**(6), 4–12 (1966).

14. Б. А. Гришанин, “Учет стоимости информации в теории ценности информации”, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **5**(2), 9–16 (1967).
15. Б. А. Гришанин, Р. Л. Стратонович, “Игровые задачи с ограничениями информационного типа”, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **5**(2), 3–12 (1967).
16. Б. А. Гришанин, Р. Л. Стратонович, “Об асимптотическом решении задачи оптимального квантования случайного сигнала”, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, No. 1, 203–204 (1968).
17. Б. А. Гришанин, Р. Л. Стратонович, “Оптимальная фильтрация квантовых переменных при квадратичном критерии качества”, Проблемы передачи информации, **6**(3), 15–23 (1970).
Аннотация. Рассматривается квантовое обобщение задачи оптимальной оценки последовательности случайных величин по критерию минимума среднеквадратичной ошибки. Для гауссовского случая доказывается линейность оптимального алгоритма фильтрации наблюдаемой последовательности и находится явный вид этого алгоритма, совпадающий по форме с соответствующим неквантовым результатом.
18. В. П. Белавкин., Б. А. Гришанин, “Оптимальное квантование векторных случайных величин”, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **8**(1), 15–23 (1970).
19. Б. А. Гришанин, Д. Д. Мамаев, “Об одном теоретико-информационном методе адаптивного решения игровых задач”, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **8**(6), 3–10 (1970).
20. В. П. Белавкин., Б. А. Гришанин, “Оптимальное квантование векторных случайных величин в игровой ситуации”, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **9**(3), 174–183 (1971).
21. Б. А. Гришанин, “Условия эквивалентности двух важных алгоритмов адаптации и его связь с эффективными оценками параметров распределения вероятностей”, Изв. ВУЗ, Радиофизика **XV**(3), 464–471 (1972).
22. Б. А. Гришанин, “Условия эффективности алгоритмов адаптации, основанных на эмпирическом байесовском подходе”, Изв. ВУЗ, Радиофизика, **XV**(3), 472–483 (1972).
23. Б. А. Гришанин, Д. Д. Мамаев, “Об одном методе оценки потенциальных возможностей информационных систем в игровой ситуации”, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **10**(3), 177–183 (1972).
24. Б. А. Гришанин, Д. Д. Мамаев, “Сравнение качества эмпирических и оптимальных алгоритмов адаптации в задачах многоальтернативного выбора”, Изв. ВУЗ, Радиофизика **XV**(7), 1097–1102 (1972).
25. В. П. Белавкин., Б. А. Гришанин, “Оптимальное измерение квантовых переменных”, Проблемы передачи информации, **8**(3), 103–109 (1972).
Аннотация. Выводится и исследуется система уравнений, определяющих в задачах оценки квантовых переменных вид оптимальных измеряемых (редуцированных) операторов при линейном оценивании.

Приводится приближенное решение, соответствующее предположению слабой некоммутативности оптимальных безредукционяых оценок. Показывается, что оптимальное нелинейное оценивание в гауссовском случае сводится к линейному.

26. Б. А. Гришанин, "Некоторые методы решения квантовых задач обнаружения и измерения", Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **11**(5), 10 (1973).
27. А. Г. Ванцян, Б. А. Гришанин, "Условия эффективности эмпирических алгоритмов адаптации для процессов со статистической зависимостью", Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **11**(6), 5 (1973).
28. В. П. Белавкин. Б. А. Гришанин, "Исследование задачи оптимального оценивания в квантовых каналах методом обобщенного неравенства Гейзенберга", Проблемы передачи информации, **9**(3), 44–52 (1973).
    Аннотация. Рассматривается задача оптимизации косвенного квантового измерения на выходе квантового канала при квадратичном критерии качества. Находится нижняя граница потерь оценивания, совместимая с принципом неопределенности Гейзенберга. Путем использования этой границы в гауссовском случае устанавливается линейность оптимального оценивания и дается конкретное описание соответствующей оптимальной процедуры косвенного измерения.
29. Б. А. Гришанин, "Асимптотические гауссовские методы в квантовых задачах оценивания классических параметров", Радиотехника и электроника, No. 4, 7 (1973).
30. А. С. Ахманов, Б. А. Гришанин, "Когерентное излучение характеристических линий при прохождении заряженных частиц через монокристалл", Письма в ЖЭТФ **2**(10), 562–565 (1976).
    Аннотация. Предсказывается новый эффект — излучение когерентных аракте ристических линий образца в рентгеновском диапазоне при прохождении заряженных частиц через монокристаллы. Обсуждается возможность обнаружения и использования этого эффекта для получения когерентного рентгеновского излучения.
31. Б. А. Гришанин, "Квантовые электромагнитные процессы в конденсированных средах и естественное затухание в вандерваальсовых кристаллах", ЖЭТФ **72**(2), 783–791 (1977).
    Аннотация. В приближении усредненного коммутатора для операторов перехода в молекулах выведены уравнения квантовой динамики для электромагнитного поля в среде, учитывающие изменение населенностей и естественного (радиационного) распада. Рассчитаны интенсивность распада и соответствующая естественная ширина линии кристалла, а также возможность объяснения экспериментальных данных по поглощению в кристаллах инертных газов.
32. Б. А. Гришанин, Г. Е. Колосов, "Аналитическое решение задачи оптимального квантования случайных процессов", Изв. АН СССР, Техническая кибернетика **15**(1), 148–157 (1977).

33. Б. А. Гришанин, “Новая схема теоретического расчета характеристик атома в сильном электромагнитном поле”, Квантовая электроника **6**(7), 1409–1414 (1979).
34. Г. А. Ляхов, А. С. Ахманов, Б. А. Гришанин, “Когерентные свойства рентгеновских источников и эффекты когерентности в рентгеновской оптике. I. Пространственная когернтность синхротронного излучения”, Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия **21**(6), 31–38 (1980).
35. Г. А. Ляхов, А. С. Ахманов, Б. А. Гришанин, “Когерентные свойства рентгеновских источников и эффекты когерентности в рентгеновской оптике. II. Динамическое рассеяние частично когернтного излучения в кристаллах”, Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия **21**(6), 38–44 (1980).
36. Б. А. Гришанин, “Коллективные квантовые особенности релаксации нелинейных поляритонных колебаний”, Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия **21**(2), 56–63 (1980).
37. М. С. Бос, Б. А. Гришанин, “Эффекты геометрии среды в коллективном излучении распределенных атомных систем”, Оптика и спектроскопия **49**(2), 244–249 (1980).
38. Б. А. Гришанин, “Численный расчет модовой структуры сверхизлучения в длинном цилиндре”, Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия **21**(5), 90-92 (1980).
39. Б. А. Гришанин, Ф. Шмидт, “Спектр флуоресценции двухуровневого атома при двухфотонном резонансе”, Квантовая электроника **8**(10), 2085–2089 (1981).
40. Б. А. Гришанин, “Марковские методы анализа статистической квантовой динамики квазиклассических открытых систем”, Теоретическая и математическая физика **48**(3), 396–408 (1981).
Аннотация. Излагается общая схема расчета характеристик квантовых марковских процессов в квазиклассических системах, квантовая специфика которых связана с взаимодействием с шумовой подсистемой. Основные соотношения конкретизируются для случая заряженных частиц во внешних электромагнитных полях.
41. Б. А. Гришанин, А. С. Яров, “Роль флуктуаций вакуума при движении электрона в магнитном поле ускорителя”, Изв. ВУЗ, сер. физика, No. 3, 42–46 (1981).
42. Б. А. Гришанин, “Спектр флуоресценции двухуровневого атома в условиях частичного подавления столкновительной релаксации сильным резонансным полем”, ЖЭТФ **85**(2), 54–59 (1983).
Abstract. Вычислен спектр флуоресценции двухуровневого атома в приближении марковской диффузии с учетом изменения константы релаксации за счет уменьшения эффективности фазового шума при действии сильного монохроматического поля на атом. Результаты показывают подавление диффузионной компоненты столкновительного

уширения линиц флуоресценции двухуровневых атомов со статическими дипольными моментами.
43. Б. А. Гришанин, В. Н. Руденко, “О регистрации классической силы, действующей на квантовый осциллятор”, Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия **24**(2), 54–59 (1983).
44. Б. А. Гришанин, Г. Г. Шаталова, “Когерентный отклик двухуровневого атома на пробное поле с учетом подавления фазовой релаксации сильным полем”, Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия **25**(2), 21–25 (1984).
45. Б. А. Гришанин, А. В. Титов, К. Н. Шорин, С. А. Яров, “Измерение параметров Стокса и степени поляризации синхротронного излучения”, Краткие сообщения по физике, инст. им. Лебедева, No. 7, 37–44 (1984).
46. Б. А. Гришанин, “Перестройка спектра флуоресценции двухуровневой примесной молекулы в кристалле в сильном резонансном поле, воздействующем на фононную дефазировку”, Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия **26**(6), 50–54 (1985).
47. Б. А. Гришанин, В. М. Петникова, В. В. Шувалов, “Немарковская динамика — объект нелинейной субпикосекундной спектроскопии конденсированных сред”, ЖПС **47**(6), 966–970 (1987).
48. Б. А. Гришанин, В. М. Петникова, В. В. Шувалов, “Динамическая теория статистических процессов при формировании линейного и нелинейного отклика сложных молекул”, ЖПС **47**(6), 1002–1008 (1987).
49. Б. А. Гришанин, В. М. Петникова, В. В. Шувалов, “Динамический расчет линейного и нелинейного откликов растворов органических красителей в адиабатическом приближении”, Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия **29**(4), 58–62 (1988).
50. Б. А. Гришанин, “мнверсия однородно уширенного двухуровневого атома монохроматическим внешним полем”, Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия **29**(5), 61–65 (1988).
51. Б. А. Гришанин, В. М. Петникова, В. В. Шувалов, “Супероператорная техника в задачах нелинейной немарковской и релаксации”, Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия **3**(2), 49–53 (1989).
52. Б. А. Гришанин, В. М. Петникова, В. В. Шувалов, “Динамическая модель электрон-фононных переходов в нелинейной спектроскопии полупроводников методом бигармонической накачки”, ЖПС **51**(2), 43–48 (1990).
53. B. A. Grishanin, A. V. Titov, S. A. Yarov, “Formation of synchrotron radiation continuum”, Nuclear Instr. and Methods in Phys. Research A **308**, 120–123 (1991).
Abstract. The process of formation of the SR spectrum in a weak-focusing magnetic field is investigated in detail and expressions for the combined spectral structure are given. It is shown that the radial betatron oscillations determine the wavelength region where it is possible to select spectral harmonics.

54. В. Д. Вачев, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, “Исследование эффектов импульсного лазерного воздействия на электронные переходы в сложных молекулах методом молекулярной динамики”, Известия РАН, сер. физ. **56**, 16–28 (1992).
55. V. D. Vachev, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, “Computer simulation of the conformational switching induced by ultrashort laser pulse”, Nonlinear Optics **3**, 375–386 (1992).
56. B. A. Grishanin, V. A. Lobastov, V. M. Petnikova, V. V. Shuvalov, “Theory of the nonlinear response of metals and superconductors to biharmonic excitation”, Laser Physics **3**(1), 121–130 (1993).
Abstract. A model of the cubic nonlinear optical susceptibility of a superconductor is developed for the process of self-diffraction of two light waves with different frequencies. Experimental data on Y-Ba-Cu-O [9] are interpreted, and possible values for fitting parameters of the model are estimated (amplitudes chi(ac) and chi(nr) of contributions due to processes involving low-frequency acoustic phonons and due to multiparticle scattering, respectively, the rate constant of relaxation of Gamma(E) quasi-particles in reservoir). Here we establish the interference character of the "dip"observed in [9] in a high-temperature superconductor at temperatures theta below a critical point on the dependence of efficiency eta of the nonlinear process on frequency detuning Omega of pump components.
57. V. D. Vachev, J. H. Frederick, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, N. I. Koroteev, “Stilbene isomerization dynamics on multidimensional potential energy surface: molecular dynamics simulation”, Chem. Phys. Lett. **215**, 306–314 (1993).
Abstract. The dynamics in the photoisomerization of isolated cis-stilbene, especially the dynamics leading to the intermediate twisted configuration is explored by molecular dynamics simulation. Comparison of the dynamics of the trans and cis isomers shows that for cis-stilbene the time required to reach the twisted configuration is an order of magnitude or two less than for trans-stilbene, due only to the specific steric interactions, and not to any difference in the potential functions or parameters. A barrier of between 510 and 640 cm(-1) along the torsional coordinate from the cis side is estimated for isolated molecule, accounting for a transition to the intermediate in approximately 300 fs.
58. Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, В. Л. Рыжков, “Релаксация двухуровневого атома в поле интенсивного квазимонохроматического лазерного излучения”, Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия, No. 5, 23–28 (1994).
59. V. D. Vachev, J. H. Frederick, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, N. I. Koroteev, “Quasiclassical molecular dynamics simulation of the photoisomerization of stilbene”, J. Phys. Chem. **99**, 5247–5263 (1995).
Abstract. The ultrafast laser-induced isomerization dynamics of gas phase stilbene is studied in detail using quasiclassical molecular dynamics

methods. To model the dynamics, empirical potential surfaces for both the ground and the first excited electronic states of stilbene are constructed using molecular modeling-type potentials which are fit to available spectroscopic measurements, ultrafast dynamics observations, and theoretical structural information. An algorithm for creating quasiclassical initial conditions that simulate the nonstationary state prepared by an ultrashort (100 fs) laser pulse is presented. This algorithm ultilizes a quantum mechanical formulation of the excitation based on harmonic approximations for the potential surfaces which is then adapted to give initial conditions for an ensemble of trajectories. Using these methods, we recently (Chem. Phys. Lett. 1993, 215, 306) found evidence for the existence of a small barrier along the cis-trans isomerization (ethylenic torsion) coordinate from the cis-stilbene Franck-Condon region of the excited state and here we improve the estimate of that barrier to between 260 and 400 cm(-1). Detailed examination of the excited state dynamics of cis-stilbene reveals that the isomerization process proceeds via multiple pathways to a twisted potential minimum on the excited state from which internal conversion to the ground state occurs. All three photoproducts of cis-stilbene cross to the ground state from the same general region of the excited state and are differentiated during the radiationless transition and subsequent dynamics on the ground stale. Nonadiabatic coupling between the electronic states is included in our studies using a semiclassical technique, and this allows the identification of correlations between the excited state dynamics and the branching between final products. The photoexcitation of trans-stilbene is also examined, and our calculations suggest that this isomerization process proceeds through a different minimum on the excited state surface which also corresponds to a 90 degrees twisted configuration. This is a departure from the standard view that both cis- and trans-stilbene proceed through the same intermediate in their respective cis-trans photoisomerization dynamics.

60. Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, В. Д. Вачев, Дж. Фредерик, “Динамика светоиндуцированных квантовых переходов в многоатомных молекулах”, ЖЭТФ **109**(6), 2021–2034 (1996).

Аннотация. Исследована применимость квазиклассических представлений для описания фотоиндуцированных неадиабатических процессов в многоатомных молекулах. Рассчитана временная зависимость вигнеровского представления молекулярной матрицы плотности и получена уточненная формула для временной плотности вероятности перехода, являющейся основой для квазиклассического моделирования квантовых скачков. Анализируется квантовая специфика законов сохранения энергии и импульса во время квантового скачка. Показана эффективность квазиклассического приближения для моделирования динамики фотодиссоциации молекул под действием сильного лазерного поля и обсуждаются результаты исследования фотостимулированной диссоциации молекулы HCl^+.

61. Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, Д. Мешеде, "Влияние четырехфотонных взаимодействий на когерентное пленение населенностей в Λ-системе", ЖЭТФ **113**, 144–167 (1998).
Аннотация. В результате марковского анализа Λ-системы, возбужденной двумя резонансными световыми полями, рассчитан спектр ее резонансной флуоресценции. В предельном случае сильного поля получены аналитические формулы как в рамках приближения вращающихся волн так и за его пределами. Показано, что при когерентном пленении населенностей в системе ее резонансная флуоресценция не исчезает. Ее спектр состоит из двух триплетов, аналогичных триплету в спектре резонансной флуоресценции двухуровневого атома, расположенных на частотах электронных переходов, и двух триплетов, расположенных на частотах четырехфотонных процессов с участием возбуждающих световых полей. Последние имеют фундаментальный характер и накладывают ограничения на нижний предел скорости дефазировки рамановского резонанса за счет вклада радиационного распада дипольных переходов в динамику основного состояния. Проанализировано влияние четырехфотонного механизма дефазировки на спектр поглощения Λ-системы, приводящее к существенному уменьшению глубины провала в спектре поглощения, вплоть до его исчезновения при возрастании интенсивности лазерного поля.
62. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Natural capacity of a system of two two-level atoms as a quantum information channel", Laser Physics **8**(5), 1074–4087 (1998).
Abstract. A system of two closely spaced atoms interacting through a vacuum electromagnetic field is considered. It is demonstrated that radiative decay in such a system resulting from photon exchange gives rise to a definite amount of information related to interatomic communication. Joint distributions of detection probabilities of atomic quanta and the corresponding amount of communication information are calculated.
63. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, D. Meschede, "Modification of Resonance Fluorescence and Absorption in a Λ-System by Four-Wave Mixing", Phys. Rev. A**58**, 4235–4238 (1998).
Abstract. A universal mechanism destroying coherence in a Λ-system driven by two resonant laser fields due to four-photon interactions is analyzed theoretically. It is shown that this mechanism gives rise to novel spectral structures in resonance fluorescence. The "dark resonance" in absorption (dispersion) spectra is affected as well.
64. Б.А. Гришанин, В.Н. Задков, "Фотоиндуцированная хиральность молекул перекиси водорода", ЖЭТФ **116**(10), 1250–1263 (1999).
Аннотация. На примере молекулы перекиси водорода исследуется возможность использования методов нелинейной оптики для управления хиральным состоянием молекул. Предлагается использование механизма рамановского возбуждения оптической активности за счет перехода между состояниями с различной хиральной симметрией и

экспериментальная схема регистрации соответствующего фотоиндуцированного оптического вращения в парах перекиси водорода.

65. Б. А. Гришанин, "Нелинейная столкновительная релаксация двухуровневых атомов в лазерном поле", Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия, №2, 30–33 (1999).
Аннотация. Рассматривается задача расчета возбуждения двухуровневых атомов в газовой фазе с учетом их резонансного диполь-дипольного столкновительного уширения на основе квантового аналога уравнения Больцмана. Анализируется зависимость параметров релаксационной матрицы от параметров лазерного поля, обусловленная зависимостью от поля состояния сталкивающихся активных атомов.
66. И. В. Баргатин, Б. А. Гришанин, "Спектры флуоресценции и поглощения Λ-системы в условиях рамановского резонанса", Оптика и спектроскопия **87**(3), 400–408 (1999).
Аннотация. Получены аналитические формулы, описывающие спектры флуоресценции и поглощения Λ-системы в условиях рамановского резонанса для неравных интенсивностей полей и ненулевой однофотонной расстройки в приближении вращающихся волн и асимптотике насыщающего поля. Показано, что помимо группы лоренцевских линий в спектрах присутствует знакопеременная нелоренцевская часть, обусловленная квантовой спецификой динамики Λ-системы и определяющая характер спадания крыльев спектра и поведение коэффициента поглощения пробного поля вблизи лазерных частот. Рассмотрено соотношение между теоретическими моделями, описывающими случаи стационарной и нестационарной динамики формирования отклика индивидуальных атомов, и обоснована возможность универсального использования феноменологической стационарной модели.
67. I. V. Bargatin, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Generation of entanglement in a system of two dipole-interacting atoms by means of laser pulses", Fortschritte der Physik **48**(5–7), 637–641 (2000).
Abstract. Effectiveness of using laser field to produce entanglement between two dipole-interacting identical two-level atoms is considered in detail. The entanglement is achieved by driving the system with a carefully designed laser pulse transferring the system's population to one of the maximally entangled Dicke states in a way analogous to population inversion by a resonant pi-pulse in a two-level atom. It is shown that for the optimally chosen pulse frequency, power and duration, the fidelity of generating a maximally entangled state approaches unity as the distance between the atoms goes to zero.
68. I. V. Bargatin, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Analysis of radiatively stable entanglement in a system of two dipole-interacting three-level atoms", Phys. Rev. A**61**, 052305–7 (2000).
Abstract. We explore the possibilities of creating radiatively stable entangled states of two three-level dipoleinteracting atoms in a Λ configuration by means of laser biharmonic continuous driving or pulses. We

propose three schemes for generation of entangled states which involve only the lower states of the Λ-system, not vulnerable to radiative decay. Two of them employ coherent dynamics to achieve entanglement in the system, whereas the third one uses optical pumping, i.e., an essentially incoherent process.

69. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Coherent information analysis of quantum channels in simple quantum systems", Phys. Rev. A**62**, 032303–12 (2000).
Abstract. The coherent-information concept is used to analyze a variety of simple quantum systems. Coherent information was calculated for the information decay in a two-level atom in the presence of an external resonant field, for the information exchange between two coupled two-level atoms, and for the information transfer from a two-level atom to another atom and to a photon field. The coherent information is shown to be equal to zero for all full-measurement procedures, but it completely retains its original value for quantum duplication. Transmission of information from one open subsystem to another one in the entire closed system is analyzed to learn quantum information about the forbidden atomic transition via a dipole active transition of the same atom. It is argued that coherent information can be used effectively to quantify the information channels in physical systems where quantum coherence plays an important role.
70. Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, "Простые квантовые системы как источник когерентной информации", ЖЭТФ **118**(5), 1048–1065 (2000).
Аннотация. Набор важнейших простых квантовых систем проанализирован с точки зрения объема когерентной информации, доступной при использовании соответствующих этим системам информационных каналов. Показано, что для простых квантовых моделей когерентная информация может быть рассчитана и использована для оценки потенциальных возможностей соответствующего квантового канала как источника физической информации в экспериментах, связанных с эффектами когерентности квантовых состояний. Рассмотрены следующие физические модели: двухуровневый атом в поле лазерного излучения, совокупность двух двухуровневых подсистем в многоуровневом атоме (водорода), система двух двухуровневых атомов в процессе совместной квантово-детерминированной эволюции и под действием преобразований квантового измерения и квантового дублирования, а также один и два двухуровневых атома в процессе излучения.
71. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "The Information capacity of the Λ-system–photon field channel", Laser Physics **10**(6), 1–7 (2000).
Abstract. The potentially attainable information capacity of a radiatively stable Λ-system, viewed as the input of a quantum information channel, is studied. The output of the channel is formed by the states of the photon field with optical excitation frequencies, which are created as a result of Raman pumping. The analysis is based on the notion of coherent information.

72. B. A.Grishanin, V. N. Zadkov, "Photoinduced optical rotation in a racemic mixture of hydrogen peroxide molecules", Nonlinear Optics (Mol. Cryst. Liq. Cryst. Sci. Technol.—Sec. B) **23**, 286–304 (2000).
Abstract. A problem of inducing a required sign of chirality in a racemic mixture of enantiomers of a chiral molecule is analyzed. As an example, a racemic mixture (vapor) of left- and right-handed enantiomers of hydrogen peroxide (H_2O_2) molecule is considered. It is shown that biharmonic Raman excitation of the splitted due to the left-right conversion internal rotation levels can be effectively used for inducing optical activity in the initially racemic vapor of H_2O_2 molecules. An experiment to study this photoinduced optical rotation is discussed.
73. И. В. Баргатин, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, "Перепутанные квантовые состояния атомных систем", УФН **171**, 625–647 (2001).
Аннотация. Обсуждается современное состояние физики запутанных состояний атомных систем — междисциплинарного направления научных исследований на стыке квантовой оптики, физики квантовой информации и проблематики физических основ квантовой механики. В первой части работы дается введение в теорию запутанных состояний, описываются их свойства и применения. Вторая часть посвящена экспериментам по созданию и детектированию запутанных состояний атомных систем, а также предложениям по их постановке. Рассмотрена наиболее развитая на данный момент экспериментальная техника создания запутанных состояний ионов в ионной ловушке и проанализированы перспективы методов создания запутанных состояний нейтральных атомов.
74. С. С. Бычков, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, "Лазерный синтез хиральных молекул из изотропной рацемической смеси", ЖЭТФ **120**, 31–40 (2001).
Аннотация. Проблема направленного лазерного синтеза энантиомеров в изотропной рацемической смеси хиральных молекул проанализирована с учетом вращательных степеней свободы молекул. Показано, что хиральность поляризационной структуры лазерного поля является наиболее общим необходимым условием для лазерной дистилляции изотропной нерацемической смеси хиральных молекул с изотропным распределением по углам Эйлера. В приближении электродипольного взаимодействия необходимая конфигурация поля может быть обеспечена за счет некомпланарности векторов поляризаций компонент лазерной накачки. Предложена и рассчитана соответствующая экспериментальная схема преобразования изотропной рацемической смеси с использованием трехкомпонентного импульсного лазерного поля. Показано, что эквивалентным выражением условия возможности лазерного управления хиральностью в изотропной среде является ненулевое количество информации связи входа и выхода в информационном канале лазерное поле–хиральное состояние молекулы.

75. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, “Compatible Information as a Natural Information Measure of a Quantum Channel”, Laser Physics **11**(12), 1–11 (2001).
Abstract. The Shannon information amount corresponding to two independent generalized measurements of all possible quantum states at the input and output is proposed as a natural quantitative characteristic of mutual information stored in two compatible sets of quantum states considered as an input and an output. We analyze the physical content of this information measure and its relation to other measures, such as the Holevo information and coherent information. Using an example of two two-level systems, we reveal and discuss the main essential properties of compatible information in the absence and in the presence of selection of states being measured.
76. S. S. Bychkov, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, “Laser Distillation of Enantiomers from an Isotropic Racemic Mixture”, Laser Physics **11**(10), 1088–1093 (2001).
Abstract. It is shown that coherent synthesis with light from a racemic mixture of enantiomers with homogeneous distribution of enantiomers over rotational degrees of freedom is only possible when the incident laser field configuration is of chiral nature. This condition is fulfilled for nonlocal magneto-dipole [2] or quadrupole interaction of circular polarized light with enantiomers. In electro-dipole approximation, i.e., for local interactions, enantiomers do not distinguish between circular and linear polarizations and helicity of the incident field comes into play only for non-coplanar configurations of polarizations for the incident fields. For stable enantiomers with the total mass of M ? 103mH , we propose a laser distillation scenario for synthesis from a racemic isotropic solution. In contrast to the Shapiro?s scenario [5] this scenario can be used for homogeneous distribution of enantiomers over the Euler angles. Its efficacy depends on the configuration of polarizations of the incident fields and their intensities. It is shown that it is feasible to achieve the maximum efficacy with the incident field intensities much smaller than the intraatomic ones.
77. Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, “Количественное измерение и физическое содержание квантовой информации”, Радиотехника и электроника **47**(9), 1029–1046 (2002).
Аннотация. Рассмотрена роль основных количественных мер квантовой информации для информационного анализа квантовых систем. Показано, что основные способы количественного измерениЯ квантовой информации зависят от совместимости или несовместимости соответствующих квантовых событий и в случае полностью квантовых каналов можно выделить две качественно различные информационные меры: когерентную и совместимую информацию. Предложена общаЯ информационнаЯ схема эксперимента в квантовой физике, с помощью

которой проблема информационной оптимизации экспериментальной установки сведена к единой математической форме.

78. Б. А. Гришанин, Д. В. Сыч, "Совместимая квантовая информация в задаче Дике", Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия, №4, 37–42 (2002).
Аннотация. Рассматривается специальный тип квантовой информации — совместимая информация, являющаяся аналогом классической взаимной информации Шеннона для квантовых систем. Для конкретной физической системы, образованной двумя двухуровневыми атомами, взаимодействующими в соответствии с моделью Дике, выполнен анализ зависимости совместимой информации от параметров системы и ее начального состояния.

79. S. S. Bychkov, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, H. Takahashi, "Laser coherent control of molecular chiral states via entanglement of the rotational and torsional degrees of freedom", J. Raman Spectr. **33**(11–12), 962–973 (2002).
Abstract. A new mechanism tor controlling chiral states in simple chiral molecules with internal rotation, which employs the coherent quantum entanglement of the rotational-torsional states of the molecules, is proposed. It requires no preliminary spatial alignment of the molecules in a solution. A novel scenario tor the preferentiallaser synthesis of enantiomers flom a racemic solution of chiral molecules employing this new mechanism of inducing chirality is proposed and analyzed in detail and experimental scheme realizing this scenario is discussed. It is suggested that a non-linear optical activity coherent anti-Stokes Raman scattering (NOA-CARS) spectroscopic technique is used tor both inducing the gyration wave in the medium (vapor) of chiral molecules and detecting this photoinduced gyration wave in the medium by registering the NOA-CARS signal. All numerical estimates are made tor the hydrogen peroxide and deuterated hydrogen peroxide chiral molecules.

80. Б. А. Гришанин, "Совместимая информация как естественная информационная мера квантового канала", Проблемы передачи информации **38**(1), 31–34 (2002).
Аннотация. В качестве естественной количественной характеристики взаимной информации, содержащейся в двух совместимых множествах квантовых состояний, рассматриваемых как вход и выход, предлагается количество информации Шеннона, соответствующее двум независимым обобщенным измерениям всех возможных квантовых состояний на входе и выходе. мнализируется физическое содержание этой информационной меры и ее соотношение с другими мерами, такими как информация Холево и когерентная информация. На примере двух двухуровневых систем выявляются и обсуждаются наиболее существенные свойства совместимой информации в отсутствие и при наличии селекции измеряемых состояний.

81. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Entangling quantum measurement and its properties", Phys. Rev. A**68**, 022309–8 (2003).
Abstract. We study the mathematical structure of superoperators describing quantum measurements, including the entangling measurement—the generalization of the standard quantum measurement that results in entanglement between the measurable system and apparatus. It is shown that the coherent information can be effectively used for the analysis of such entangling measurements whose possible applications are discussed as well.
82. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Evolution of the quantitative measures of quantum information: on the path to the unified theory of quantum information", Laser Physics **13**(10), 1–5 (2003).
Abstract. The most general approaches to determining the quantitative measure of quantum information are analyzed based on physical content. Dynamic information is proposed as an alternative to coherent information. In a sense, the former corresponds to the use of a set of all possible states in the Hilbert space of a quantum system as the information available for free exchange.
83. Ю. В. Владимирова, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, Н. Н. Колачевский, А. В. Акимов, Н. А. Киселев, С. И. Канорский, "Спектроскопия когерентных темных резонансов в многоуровневых атомах на примере паров самария", ЖЭТФ **123**(4), 710–725 (2003).
Аннотация. Предложена универсальная теория для расчета резонансов когерентного пленения населенности (КПН) в многоуровневых атомах, позволяющая рассчитывать произвольные схемы многоуровневых атомов и их возбуждения с учетом эффектов релаксации в них, приложенного магнитного поля и эффекта Допплера. Результаты экспериментов по высокопрецизионной диодной спектроскопии когерентных темных резонансов в парах самария систематически проанализированы с помощью данной теории. В отсутствии магнитного поля, модель самария основана на рассмотрении вырожденной Λ-системы на активных переходах $4f^6 6s^2(^7F_0) \leftrightarrow 4f^6(^7F)6s6p(^3P^o)^9F_1^o \leftrightarrow 4f^6 6s^2(^7F_1)$, которая с учётом четвертого уровня $4f^6 6s^2(^7F_2)$, играющего роль резервуара, становится открытой системой. Численное моделирование резонансов КПН показывает, что открытый характер системы уменьшает контраст резонансных кривых в спектрах поглощения, не меняя ширины самих резонансов. Анализ системы выполнен также для случаев наложения внешнего продольного/поперечного магнитного поля, для которых показывается адекватность, соответственно, 7-и и 12-уровневых моделей атомных переходов.
84. Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, "Перепутывающие квантовые измерения", Оптика и спектроскопия **96**(5), 751–759 (2004).
Аннотация. Традиционное определение идеального квантового измерения как коллапса квантовых состояний с отображением измеренной

информации в классической форме не является единственно возможным и допускает естественное обобщение на отображение информации в форме квантовой перепутанности в системе объект–прибор. Наиболее общей формой идеального квантового измерения является вводимое в данной работе перепутывающее измерение. Его математическое определение даётся в форме супероператорного преобразования, проектирующего начальные состояния в системе объект-прибор на соответствующие перепутанные состояния, возникающие после завершения процесса измерения. Рассматриваются математические свойства супероператора перепутывающего измерения, для примера двухуровневой системы в аналитической форме исследуется спектр его собственных состояний, устанавливается алгебраическое соотношение $\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}_{AM}$ между супероператорами перепутывающего и стандартного измерения, анализируется создаваемая в процессе измерения когерентная информация и обсуждаются связанные с ней потенциальные возможности использования перепутывающего измерения.

85. D. N. Sych, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Quantum Key Distribution with a Continuous Alphabet", Laser Physics **14**(10), 1314–1321 (2004).
Abstract. A novel quantum key distribution protocol (QKD) based on all unselected states of a quantum system that set the alphabet with a continuous set of letters is proposed. Employing all states of the Hilbert space leads to a maximum quantum uncertainty of transmitted states, and, therefore, an eavesdropper receives the minimum amount of information. For the case of a two-dimensional Hilbert space, our protocol allows secure transmission at an error rate better than that for the BB84-protocol and is comparable with the characteristics of the best known QKD protocols. However, with increasing the dimensionality of the Hilbert space, the critical error rate for our protocol increases and, in the limit of infinite-dimensional space, the protocol becomes nonthreshold.
86. D. V. Sych, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Critical error rate of QKD protocols versus the size and dimensionality of the quantum alphabet", Phys. Rev. A**70**, No. 5, 052331–8 (2004).
Abstract. A quantum-information analysis of how the size and dimensionality of the quantum alphabet affect the critical error rate of the quantum-key-distribution (QKD) protocols is given on an example of two QKD protocols: the six-state and ∞-state (i.e., a protocol with continuous alphabet) ones. In the case of a twodimensional Hilbert space, it is shown that, under certain assumptions, increasing the number of letters in the quantum alphabet up to infinity slightly increases the critical error rate. Increasing additionally the dimensionality of the Hilbert space leads to a further increase in the critical error rate.
87. B. A. Grishanin, H. Takahashi, Yu. V. Vladimirova, D. V. Zhdanov, V. N. Zadkov, "Laser coherent control of an ensemble of randomly oriented chiral molecules", Laser Physics **15**(9), 1247–1251 (2005).

Abstract. We discuss applications of coherent control laser for asymmetric synthesis of enantiomers from a racemic mixture of chiral molecules. General symmetry requirements on the exciting laser field configurations are derived. Detailed calculations are made for the example of the simplest chiral hydrogen peroxide molecule, including laser distillation scenarios from a racemic solution and estimates for induced chirality.

88. Б. А. Гришанин, В. Н. Задков. “Информационные свойства обобщенных квантовых измерений”, Квантовая Электроника, **35**(10), 923–928 (2005).

Аннотация. Вводится понятие обобщённого квантового измерения как преобразования, устанавливающего соответствие между исходными состояниями объекта и конечными состояниями системы объект–прибор с помощью классического информационного индекса, однозначно связанного с классически совместимым набором состояний системы объект–прибор. Показывается, что оно включает основные типы измерения: стандартное проективное, перепутывающее, мягкое и обобщённое измерение с частичным или полным разрушением начальной информации, содержащейся в объекте. Рассматривается специальный класс частично разрушающих измерений, которые устанавливают соответствие между континуальным множеством состояний конечномерных квантовых системы и систем с бесконечномерным пространством состояний, обсуждается их информационный смысл и рассчитываются некоторые информационные характеристики.

89. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, “Physical implementation of entangling quantum measurements”, Laser Phys. Lett. **2**(2), 106–111 (2005).

Аннотация. We clarify the microscopic structure of the entangling quantum measurement superoperators and examine their possible physical realization in a simple three-qubit model, which implements the entangling quantum measurement with an arbitrary degree of entanglement.

90. Д. В. Сыч, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, “Анализ предельно возможных информационных характеристик протоколов квантовой криптографии”, Квантовая электроника **35**(1), 80–84 (2005).

Аннотация. Исследуется вопрос об увеличении критического уровня допустимых ошибок протоколов квантовой криптографии за счет варьирования набора букв в квантовом алфавите при фиксированной размерности пространства. Рассматриваются квантовые алфавиты, образующие правильные многогранники на сфере Блоха и континуальный алфавит, равноправно включающий все квантовые состояния. Показано, что из рассмотренных протоколов до согласования базисов наивысшим критическим уровнем ошибок обладает протокол с алфавитом в виде тетраэдра, а после согласования базисов — протокол с континуальным алфавитом.

91. D. V. Sych, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Copying of quantum information by means of a quantum amplifier", Laser Phys. Lett., 1–4 (2005).
Abstract. Information aspects of copying quantum states via stimulated emission of an optical quantum amplifier are considered. It is shown that the measurable information very rapidly decreases after amplification of a single photon up to a level of several photons. Spontaneous emission, which leads to such behavior, is also discussed.
92. Ю. В. Владимирова, Б. А. Гришанин, Д. В. Жданов, В. Н. Задков, Х. Такахаши, "Возможность лазерного асимметричного синтеза энантиомеров молекул перекиси водорода из рацемической смеси без их предварительной ориентации", Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия, №6, 37-41 (2005).
Аннотация. На примере молекул перекиси водорода исследуются специфические особенности лазерного управления хиральными состояниями предварительно не ориентированных молекул в изначально рацемической смеси. Выявлена определяющая роль вращений молекул и температуры молекулярного ансамбля, предложены перспективные схемы лазерного асимметричного синтеза энантиомеров из рацемической смеси.
93. D. N. Yanyshev, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, and D. Meschede, "Dynamics of Atoms Interacting Via the Radiation Field in an Optical Dipole Trap", Laser Physics **15**(8), 1–15 (2005).
Abstract. Theoretical study and computer simulation results for the stochastic dynamics of atoms localized in an optical dipole trap are presented. This dynamics is governed by the optical trap potential, cooling due to the Doppler effect, and heating due to the emission and absorption of virtual photons, i.e., due to the resonant dipole?dipole interactions (RDDI). It is shown that the RDDI becomes essential for closely spaced atoms, but the effect can be significantly improved by irradiating the atoms in the trap with an additional resonance probe laser beam. By varying both the optical dipole trap parameters and intensity of the probe laser field, the role of RDDI in the atomic dynamics in the trap is clarified in detail.
94. J. V. Vladimirova, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, V. Biancalana, G. Bevilacqua, Y. Dancheva, L. Moi, "Computer modeling of frequency-modulation spectra of coherent dark resonance", Laser Phys. Lett. **3**(9), 427–436 (2006).
Abstract. Dynamics of a three-level quantum system in Λ-configuration driven by a resonant laser field with and without frequency modulation (FM) is studied for the first time in detail using two simulation techniques ? the density matrix and quantum trajectories analysis. This analysis was applied to the FM spectroscopy of coherent dark resonances in Cs atoms and computer simulation results for the absorption spectra are in qualitative agreement with those taken in an experiment.

95. Д. В. Жданов, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, "Селекция молекул по их ориентации при совместном действии лазерного и электростатического полей", ЖЭТФ **130**(3), 387–400 (2006).
Аннотация. Показано, что одновременное воздействие электростатического и резонансных лазерных полей на ансамбль молекул может быть использовано для селекции молекул по их ориентации за счет изменения их внутреннего состояния. В отличие от большинства других способов управления ориентацией молекул, предложенный метод не требует предварительного вымораживания вращательных степеней свободы молекул и способен обеспечивать высокую эффективность даже при комнатных температурах.
96. Ю. В. Владимирова, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, В. Бьянкалана, Д. Бевилаква, Й. Данчева, Л. Мой, "Теория частотно-модуляционной спектроскопии когерентных темных резонансов", ЖЭТФ **130**(4), 609–620 (2006).
Аннотация. Впервые выполнен теоретический анализ взаимодействия трехуровневого атома в Λ-конфигурации с частотно-модулированным (ЧМ) полем. Представлена и проанализирована двухчастотная модель для решения задачи ЧМ спектроскопии когерентных темных резонансов на примере трехуровневой Λ-системы. Эффективность двухчастотной модели продемонстрирована путем сравнения результатов, полученных с ее помощью, с результатами решения точной задачи о взаимодействии Λ-системы с ЧМ полем, решаемой при помощи метода матрицы плотности. Показано, что простая двухчастотная модель соответствует точному решению и качественно согласуется с данными экспериментов.
97. B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Correspondence between quantum and classical information: Generalized quantum measurements", Phys. Rev. A**73**, 042312–16 (2006).
Abstract. The concept of generalized quantum measurement is introduced as a transformation that sets a one-to-one correspondence between the initial states of the measured object system and final states of the object-meter system with the help of a classical informational index, unambiguously linked to a classically compatible set of quantum states. It is shown that the generalized quantum measurement concept covers all key types of quantum measurement—standard projective, entangling, fuzzy, and generalized measurements with a partial or complete destruction of initial information associated with the object. A special class of soft quantum measurements as a basic model for the fuzzy measurements widespread in physics is introduced and its information properties are studied in detail. Also, a special class of partially destructive measurements mapping all states of the Hilbert space of a finite-dimensional quantum system onto the basis states of an infinite-dimensional quantum system is considered.

98. D. V. Sych, B. A. Grishanin, V. N. Zadkov, "Copying of quantum information by means of a quantum amplifier", Laser Phys. Lett. **3**(2), 102–105 (2006).
Аннотация. Information aspects of copying quantum states via stimulated emission of an optical quantum amplifier are considered. It is shown that the measurable information very rapidly decreases after amplification of a single photon up to a level of several photons. Spontaneous emission, which leads to such behavior, is also discussed.
99. Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, "Обобщенные квантовые измерения континуальных переменных", Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия, No. 5, 20–25 (2008).
Аннотация. Предложенная нами ранее [Phys. Rev. A **73**, 042312 (2006)] общая структура обобщённых квантовых измерений с минимальными возмущениями начальной информации рассматривается в приложении к измерению континуальных квантовых переменных и выявляются её качественные особенности в сравнении с аналогичным традиционным вариантом полностью деквантующего измерения, описываемого соответствующей ему положительно определённой операторной мерой.
100. Д. Н. Янышев, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, "Информационный анализ квантового невозмущающего измерения фотона в резонаторе", Вестник МГУ. Серия 3. Физика. Астрономия, №6, 50–54 (2009).
Аннотация. Концепция перепутывающего квантового измерения продемонстрирована на имеющем фундаментальное значение эксперименте по квантовому невозмущающему измерению наличия фотона в резонаторе с помощью пробного атома [G. Nogues et. al. , Nature, **400**, 239 (1999)]. Выполнен квантово-информационный анализ данного эксперимента. Продемонстрирован механизм передачи информации в схеме невозмущающего измерения в случае классического и квантового формализма и показано, что результаты в обеих случаях совпадают. Это является следствием копирования классической части исходной квантовой информации, связанной с набором состояний в квантовом объекте.

Часть VI
Подборка фотографий из жизни Б. А. Гришанина

Рис. 15.5 Бабушка Б.А.Гришанина — Арина Хорина (слева) и ее сын, отец Бориса – Андрей Андреевич Гришанин (справа).

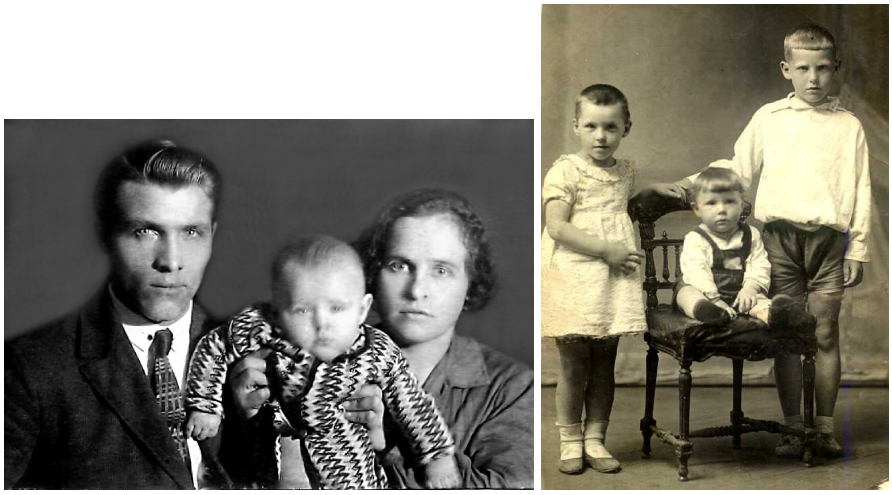

Рис. 15.5 Слева: родители Б.А.Гришанина с его братом Владимиром — Андрей Андреевич Гришанин и Евдокия Хорина. Справа: сестра и два брата Бориса — Рая, Толя и Володя (в г. Орел).

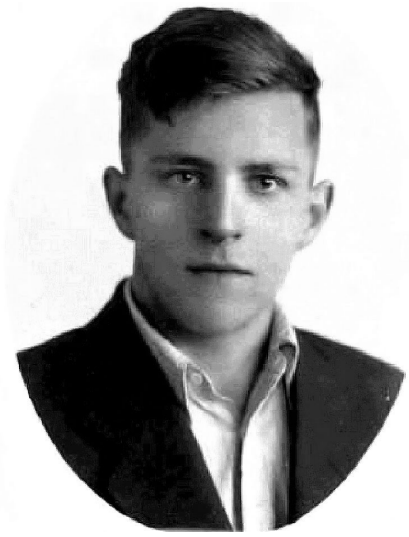

Рис. 15.5 Б.А.Гришанин в первом (слева) и 10-м (справа) классах общеобразовательной школы.

Рис. 15.5 Слева: Владимир и Борис Гришанины в Пронске. Справа: Владимир, Анатолий и Борис Гришанины — три брата (1989 г., Ясная Поляна).

Рис. 15.5 Три брата – Анатолий, Владимир и Борис Гришанины (2004).

Рис. 15.5 Слева: Катя Гаспарян (дочь Б.А.Гришанина), Владислав (его внук), Арут (муж Кати) и Б.А.Гришанин на квартире у Бориса (10 января 2004 года).

Рис. 15.5 Слева: Владислав, внук Бориса Андреевича. Справа: Борис Андреевич с внуком Владиславом (2004 г.).

Рис. 15.5 Б.А.Гришанин на велосипедной прогулке по подмосковью.

Рис. 15.5 Б.А.Гришанин на своем шверботе.

Рис. 15.5 Б.А.Гришанин на отдыхе на Клязьминском водохранилище (2003).

Рис. 15.5 Б.А.Гришанин и В.Ф.Пашутина на теннисном корте в Тарасовке.

Рис. 15.5 Б.А.Гришанин и В.Ф.Пашутина на прогулке в Пирогово (1995).

Рис. 15.5 Б.А.Гришанин работает в огороде на даче М.С.Смирнова в Кратово (2003).

Рис. 15.5 После дачи (см. предыдущее фото) — отдых на кухне у Бориса вместе с М.С.Смирновым (2003).

Рис. 15.5 Борис Андреевич с Михаилом Смирновым отдыхают вместе под Волочком (2005).

Рис. 15.5 Три сокурсника по физфаку МГУ — И.Г.Зубарев, А.Б.Успенский и Б.А.Гришанин (1994).

Рис. 15.5 А.Б.Успенский (слева) и Б.А.Гришанин (1968).

Рис. 15.5 Слева направо: Б.А.Гришанин, В.Ф.Пашутина и Г.Колосов (в гостях у Г.Колосова, 2004).

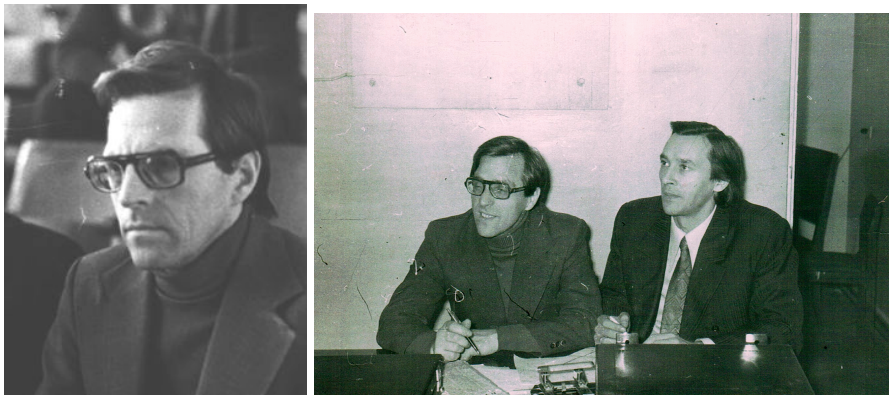

Рис. 15.5 Слева: Б.А.Гришанин — сотрудник кафедры на физфаке. Справа: молодые теоретики кафедры Б.А.Гришанин и Г.Ляхов.

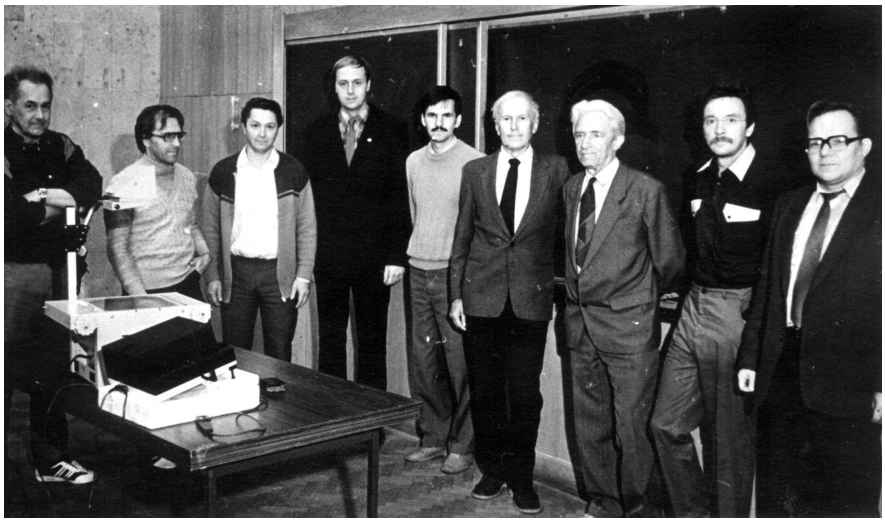

Рис. 15.5 Костяк теоретиков кафедры Общей физики и волновых процессов (слева направо — Ю.Дьяков, Б.А.Гришанин, К.Н.Драбович, В.А.Макаров, С.Ю.Никитин, Р.Л.Стратонович, Г.Я.Мякишев, А.В.Белинский, А.С.Чиркин).

Рис. 15.5 Групповая фотография участников Школы по современным проблемам лазерной физики в Красновидово. Б.А.Гришанин — второй слева на первой ступеньке.

Рис. 15.5 Групповая фотография сотрудников и аспирантов кафедры общей физики и волновых процессов физфака МГУ (1987). Б.А.Гришанин — в пятом ряду снизу, четвертый слева (рядом с ним слева стоит Р.Л.Стратонович).

Рис. 15.5 Среди участников международной конференции по «Применению лазеров в науках о жизни (LALS'1996)» в Йене (Германия) в 1996 году. Слева направо: Альфред Лоберо (с кружкой в руке), В.Н.Задков, Б.А.Гришанин.

Рис. 15.5 В гостях у Дитера Мешеде (Бонн, Германия) во время летней Школы по «Квантовой оптике», организованной в 2001 г. Слева направо: Б.А.Гришанин, один из лекторов Школы, В.Н.Задков, Дитер Мешеде.

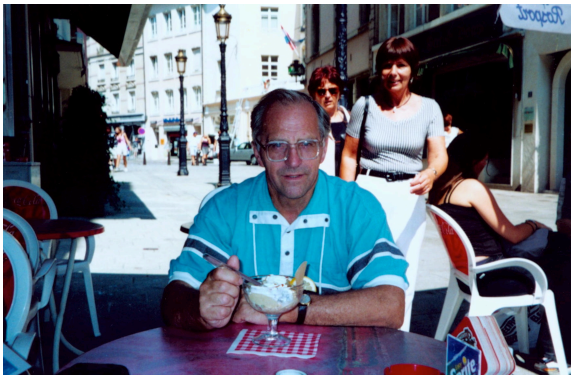

Рис. 15.5 Слева: Б.А.Гришанин во время посещения Люксембурга с ознакомительной поездкой (2001).

Рис. 15.5 Среди участников международной конференции по «Квантовой оптике» в Раубичах, Беларусь, 2002 г. Б.А.Гришанин — стоит крайний слева в заднем ряду.

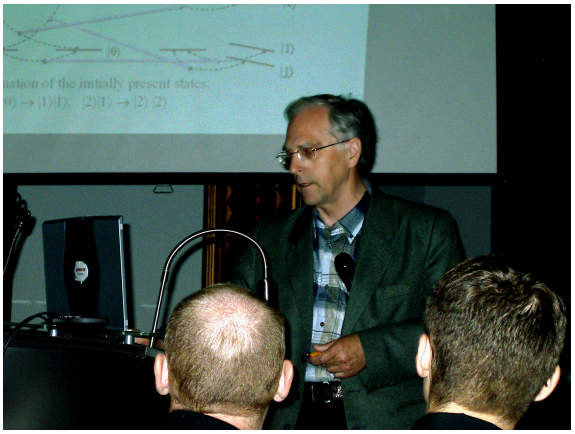

Рис. 15.5 Б.А.Гришанин делает приглашенный доклад на «Международной конференции по когерентной и нелинейной оптике (ICONO-2004) в Минске, Беларусь (2004).

Рис. 15.5 Д.Н.Сыч (слева) и Б.А.Гришанин на «Международной конференции по когерентной и нелинейной оптике» (КиНО или ICONO) в 2004 г. в Минске.

Рис. 15.5 Б.А.Гришанин за работой на компьютере в лаборатории.

Рис. 15.5 Групповая фотография в лаборатории после защиты кандидатской диссертации Дениса Сыча. Слева направо: А.С.Чиркин, Б.А.Гришанин, В.Н.Задков, Д.Н.Сыч, Д.В.Жданов, Д.Н.Янышев, Ю.В.Владимирова (27 мая 2005 года).