АСТРОНОМИЯ

УДК 521.19

ВОЗМУЩЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ЗВЕЗДНОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Н. А. Соловая

(ГАИШ)

Получена каноническая система дифференциальных уравнений возмущенного движения звездной задачи трех тел. Разработан аналитический метод решения с учетом членов третьего и четвертого порядков в гамильтониане задачи. В качестве новых переменных введены вековые части угловых переменных g_1 и g_2, входящих под знак косинуса.

1. Введение

Под звездной задачей мы понимаем частный случай неограниченной задачи трех тел, в которой массы материальных точек одного порядка, а расстояния между двумя из них много меньше, чем расстояние от каждой из них до третьей. Обозначим массы точек через m_0, m_1 и m_2. Для определенности полагаем, что $m_0 > m_1$. Отношения больших полуосей a_1/a_2 считаем малым параметром ($< 0,1$). Гамильтониан неограниченной задачи трех тел, разложенный в ряд по полиномам Лежандра, имеет вид

$$F = \frac{\gamma_1}{2L_1^2} + \frac{\gamma_2}{2L_2^2} + \gamma_3 \frac{L_1^4}{L_2^6} \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^2 \left(\frac{a_2}{r_2}\right)^3 \left(\frac{3}{2}\cos^2\Theta - \frac{1}{2}\right) + R, \tag{1}$$

где через R обозначены члены, определяющие возмущения:

$$R = F_3 + F_4, \tag{2}$$

где

$$F_3 = \gamma_4 \frac{L_1^6}{L_2^8} \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^3 \left(\frac{a_2}{r_2}\right)^4 \left(\frac{5}{2}\cos^3\Theta - \frac{3}{2}\cos\Theta\right), \tag{3}$$

$$F_4 = \gamma_5 \frac{L_1^8}{L_2^{10}} \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^4 \left(\frac{a_2}{r_2}\right)^5 \times \left(\frac{35}{8}\cos^4\Theta - \frac{30}{8}\cos^2\Theta + \frac{3}{8}\right). \tag{4}$$

Коэффициенты имеют вид

$$\beta_1 = k\,\frac{m_0\, m_1}{\sqrt{m_0 + m_1}}, \quad \beta_2 = k\,\frac{m_2\,(m_0 + m_1)}{\sqrt{m_0 + m_1 + m_2}},$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1^4}{\mu_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2^4}{\mu_2}, \quad \gamma_3 = k^2 \mu_1 \mu_2 \frac{\beta_2^6}{\beta_1^4},$$

$$\gamma_4 = k^2 \mu_1 \frac{m_2\,(m_0 - m_1)}{m_0 + m_1} \frac{\beta_2^8}{\beta_1^6},$$

$$\gamma_5 = k^2 \mu_1 \frac{m_0^3 + m_1^3}{(m_0 + m_1)^4} \frac{\beta_2^{10}}{\beta_1^8}, \tag{5}$$

$$\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = \frac{(m_0 + m_1)\, m_2}{m_0 + m_1 + m_2}, \tag{6}$$

$$\cos\Theta = -\cos u_1 \cos u_2 - q \sin u_1 \sin u_2, \tag{7}$$

$u_j = v_j + w_j$, где v_j — истинные аномалии, w_j — аргументы периастров орбит, L_j — элементы Делоне, $L_j = \beta_j \sqrt{a_j}$ ($j = 1, 2$). Промежуточному движению соответствуют первые три члена этого разложения. Решение, соответствующее такому гамильтониану, получено в гиперэллиптических интегралах [1]. Остальные члены представляют собой возмущения. Ограничимся членами третьего и четвертого порядков. Все остальные будут много меньше.

После двукратного приложения метода Цейпеля гамильтониан промежуточного движения будет зависеть от одной угловой переменной g_1 — аргумента периастра внутренней орбиты. Если принять в расчет следующие два члена, правые части дифференциальных уравнений будут зависеть от угловых переменных g_1 и g_2.

В некоторых звездных системах могут возникнуть явления, близкие к резонансам, особенно когда отношения среднесуточных движений близки к 1, 1/2 и 1/3. Промежуточное движение будет подвержено большим долгопериодическим возмущениям. Тогда отклонение истинного движения тройной звездной системы от промежуточного будет значительно.

Точное интегрирование системы дифференциальных уравнений возмущенного движения оказывается невозможным. Можно воспользоваться асимптотическими методами. Получим долгопериодические возмущения, если члены F_3 и F_4 в гамильтониане заменим их осредненным значением, при этом радиус-векторы и истинные аномалии возмущаемых точек будем считать выраженными через эксцентрические аномалии по формулам невозмущенного движения.

Для аналитических преобразований мы использовали компьютерную программу на IBM RISC System/6000.

Мы получили [2] двукратно осредненные выражения:

$$\overline{\overline{F_3}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{F_3}\,dl_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{F_3}\,(1-e_2\,\cos E_2)\;dE_2 =$$

$$= \frac{15}{512}\,\gamma_4\,\frac{L_1^6}{L_2^8}\,\frac{e_1 e_2\sqrt{1-e_2^2}}{(1-e_2)^3\,(1+e_2)^3}\times$$

$$\times\,\Big[\left(4+3e_1^2\right)\left(-1-11q+5q^2+15q^3\right)\times$$

$$\times\,\cos\left(g_1-g_2\right)+35e_1^2\,(1-q)\,(1+q)^2\cos\left(3g_1-g_2\right)+$$

$$+\,\left(4+3e_1^2\right)\left(-1+11q+5q^2-15q^3\right)\cos\left(g_1+g_2\right)+$$

$$+\,35e_1^2\,(-1+q)^2\,(1+q)\cos\left(3g_1+g_2\right)\Big]\;, \qquad (8)$$

$$\overline{\overline{F_4}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{F_4}\,dl_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{F_4}\,(1-e_2\cos E_2)\;dE_2 =$$

$$= \frac{9}{8192}\,\gamma_5\,\frac{L_1^8}{L_2^{10}}\,\frac{\sqrt{1-e_2^2}}{(-1+e_2)^4\,(1+e_2)^4}\times$$

$$\times\,\left[\left(8+40e_1^2+15e_1^4\right)\left(2+3e_2^2\right)\left(3-30q^2+35q^4\right)+\right.$$

$$+\,140e_1^2\left(2+e_1^2\right)\left(2+3e_2^2\right)\left(-1+8q^2-7q^4\right)\cos 2g_1+$$

$$+\,735e_1^4\left(2+3e_2^2\right)\left(-1+q^2\right)^2\cos 4g_1+$$

$$+\,735e1^4e_2^2\,(1-q)\,(1+q)^3\cos\left(4g_1-2g_2\right)+$$

$$+\,140e_1^2\left(2+e_1^2\right)e_2^2\times$$

$$\times\,(1+q)^2\left(1-7q+7q^2\right)\cos\left(2g_1-2g_2\right)+$$

$$+\,10\left(8+40e_1^2+15e_1^4\right)e_2^2\left(-1+8q^2-7q^4\right)\cos 2g_2+$$

$$+\,140e_1^2\left(2+e_1^2\right)e_2^2\times$$

$$\times\,(-1+q)^2\left(1+7q+7q^2\right)\cos\left(2g_1+2g_2\right)+$$

$$\left.+\,735e_1^4e_2^2\,(1-q)^3\,(1+q)\cos\left(4g_1+2g_2\right)\right]. \qquad (9)$$

Как видно из формул, комбинации угловых элементов g_1 и g_2 в членах третьего и четвертого порядков могут вызвать явления, близкие к резонансам 1:1, 2:1 и 3:1.

2. Приложение метода вариации произвольных постоянных

Рассматривая решение задачи с упрощенным гамильтонианом как невозмущенное, применим к нему метод вариации произвольных постоянных. В результате получим новую каноническую систему дифференциальных уравнений, искомыми функциями которой являются величины, служившие постоянными интегрирования упрощенной системы, решенной методом Гамильтона–Якоби.

Общее решение дифференциальных уравнений промежуточного движения зависит от 10 произвольных постоянных A_i и B_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Так как эти постоянные возникают в процессе интегрирования системы дифференциальных уравнений промежуточного движения по способу Гамильтона–Якоби, то метод вариации произвольных постоянных осуществляется в соответствии с общей теорией [3] автоматически. Мы имеем

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial B_i}\,, \qquad \frac{dB_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial A_i}\,. \qquad (10)$$

Но эта система дифференциальных уравнений неудобна для практических приложений, так как при дифференцировании функции R по A_i в выражениях произвольных постоянных независимая переменная t появляется в виде множителя при некоторых слагаемых. В общем случае R имеет вид

$$R = \sum Q\,\cos\left(n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 g_1 + n_4 g_2 + n_5 h\right), \qquad (11)$$

где n_i — целые числа, Q — коэффициенты, зависящие от неугловых переменных.

Для устранения этого неудобства введем вместо группы переменных B_i новые функции, чтобы при дифференцировании R по новым каноническим переменным время не появлялось в явном виде. Введем вместо B_i вековые части каждого из аргументов, входящих в выражение R под знаком косинуса.

3. Выделение вековых частей

Найдем новую систему канонических переменных. Из общего решения системы [1] видно, как угловые переменные связаны со временем. Общее решение системы с упрощенным гамильтонианом имеет вид

$$L_1 = A_1 = \beta_1\sqrt{a_1}\,, \qquad L_2 = A_2 = \beta_2\sqrt{a_2}\,,$$

$$G_1 = \frac{\partial W_1}{\partial g_1} = A_1\sqrt{\xi}\,, \qquad G_2 = A_4 = \rho_2\sqrt{a_2}\,\sqrt{1-e_2^2}\,,$$

$$l_1 = B_1 + \kappa_1\,(t-t_0) + Q_1\,J_1(u) + Q_2\,J_2(u) + Q_3\,J_3(u)\,,$$

$$l_2 = B_2 + \kappa_2\,(t-t_0)\;, \qquad c = A_5\,,$$

$$B_3 - \frac{\partial\varepsilon}{\partial A_3}\,(t-t_0) - \frac{A_1\,\overline{G}_2^2}{6\,\sigma}\,J_1(u) = 0\,,$$

$$g_2 = B_4 + \kappa_4\,(t-t_0) +$$

$$+Q_4\,J_1(u) + Q_5\,J_2(u) + Q_6\,J_4(u) + Q_7\,J_5(u)\,,$$

$$h_1 = B_5 + Q_8\,J_1(u) + Q_6\,J_4(u) - Q_7\,J_5(u)\,. \qquad (12)$$

Выделим вековые части в решении. Рассмотрим это подробно на одном из соотношений (12), во всех остальных случаях все происходит аналогично. Заметим, что вековая часть l_2 равна самой переменной l_2. Возьмем соотношение, связывающее u и время:

$$B_3 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_3}\,(t-t_0) + \frac{A_1\,\overline{G}_2^2}{6\,\delta}\int\limits_0^u \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,du\,, \tag{13}$$

где

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_3} = -\frac{1}{16}\,\gamma\,\frac{A_1\,m^2}{\sqrt{(1-e_2^2)^3}}\,n_1\,,$$

$$\delta = \sqrt{(\xi_3-\xi_1)(\xi_4-\xi_1)(\xi_5-\xi_1)}\,,$$

$$\sigma = 1 - 2\,\beta\,\varepsilon\,\mathrm{sn}^2 u + \varepsilon^2\,\mathrm{sn}^4 u\,,$$

$$\overline{G_2} = \frac{\beta_2}{\beta_1}\sqrt{\frac{a_2\,(1-e_2^2)}{a_1}}\,,$$

$$\gamma = \frac{m_2}{m_0+m_1+m_2}\,,\quad m = \frac{n_2}{n_1}\,. \tag{14}$$

Введем новую произвольную переменную

$$\overline{\lambda}_3 = \frac{\pi\,u}{2\,K}\,,\quad u = \frac{2\,K}{\pi}\,\overline{\lambda}_3\,, \tag{15}$$

где K — полный эллиптический интеграл с модулем k. Как показывают формулы промежуточного движения, в случае циркулярных орбит $\sin g_1$ и $\cos g_1$ являются периодическими функциями с периодом $2\,\pi$ относительно переменной $\overline{\lambda}_3$. Когда u изменяется на $4\,K$, угол g_1 увеличивается на $2\,\pi$.

Вековая часть угловой переменной g_1 с точностью до слагаемых равна вековой части $\overline{\lambda}_3$.

Преобразуем интеграл в уравнении (13), входящий в правую часть:

$$\int\limits_0^u \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,du = \frac{u}{K}\,I + \int\limits_0^u\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} - \frac{I}{K}\right)du\,, \tag{16}$$

где

$$I = \int\limits_0^K \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,du\,. \tag{17}$$

Свободный член разложения функции в ряд Фурье обозначим через Σ_1, т.е.

$$\frac{1}{K}\int\limits_0^K \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,du = \Sigma_1\,.$$

Тогда уравнение (13) имеет вид

$$B_3 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_3}\,(t-t_0) + \frac{A_1\,\overline{G}_2^2}{6\,\delta}\,\Sigma_1\,u + \frac{A_1\,\overline{G}_2^2}{6\,\sigma}\,\Phi_1(u)\,. \tag{18}$$

$\Phi_1(u)$ есть периодическая функция с периодом $2\,K$. Она имеет вид

$$\Phi(u) = \int\limits_0^u\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} - \Sigma_1\right)du\,.$$

Тогда

$$\overline{\lambda}_3 = \lambda_3 + \Phi_1\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\overline{\lambda}_3\right)\,,$$

где λ_3 есть вековая часть переменной $\overline{\lambda}_3$.

Уравнение (13) может быть написано в форме

$$\frac{3\,\pi\,\delta}{A_1\,\overline{G}_2^2\,K\,\Sigma_1}\left[B_3 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_3}\,(t-t_0)\right] =$$

$$= \overline{\lambda}_3 + \Phi\left(\frac{2\,K}{\pi}\,\overline{\lambda}_3\right)\frac{\pi}{2\,K\,\Sigma_1}\,. \tag{19}$$

Вековая часть λ_3 в уравнении (18) есть

$$\lambda_3 = \frac{3\,\pi\,\delta}{A_1\,\overline{G}_2^2\,K\,\Sigma_1}\left[B_3 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_3}\,(t-t_0)\right]\,. \tag{20}$$

Если обозначить

$$\lambda_{30} = \frac{3\,\pi\,\delta}{A_1\,\overline{G}_2^2\,K\,\Sigma_1}\,B_3\,,\quad \nu_3 = -\frac{3\,\pi\,\delta}{A_1\,\overline{G}_2^2\,K\,\Sigma_1}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial A_3}\,,$$

тогда

$$\lambda_3 = \lambda_{30} + \nu_3\,(t-t_0)\,. \tag{21}$$

Вековая часть переменной u равна вековой части переменной $\overline{\lambda}_3$. Из уравнения (19) мы можем получить u в следующей форме:

$$u = \frac{6K\delta}{A_1\overline{G}_2^2 I}\left(B_3 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_3}\,(t-t_0)\right) -$$

$$-\frac{K}{I}\int\limits_0^u\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} - \frac{I}{K}\right)du\,. \tag{22}$$

Возьмем λ_3 как новую угловую переменную. Аналогично мы можем найти угловые части других угловых переменных. Они будут иметь следующий вид:

вековая часть l_1

$$\lambda_1 = B_1 + \kappa_1\,(t-t_0) +$$

$$+ (Q_1\,\Sigma_1 + Q_2\,\Sigma_2 + Q_3\,\Sigma_3)\,\frac{2\,K}{\pi}\,\lambda_3\,, \tag{23}$$

вековая часть l_2

$$\lambda_2 = B_2 + \kappa_2\,(t-t_0)\,, \tag{24}$$

вековая часть g_2

$$\lambda_4 = B_4 + \kappa_4\,(t-t_0) +$$

$$+ (Q_4\,\Sigma_1 + Q_5\,\Sigma_2 + Q_6\,\Sigma_4 + Q_7\,\Sigma_5)\,\frac{2\,K}{\pi}\,\lambda_3\,, \tag{25}$$

вековая часть h

$$\lambda_5 = B_5 + \left(\frac{4\,\overline{c}\,\overline{G}_2}{\delta}\,\Sigma_1 + Q_6\,\Sigma_4 - Q_7\,\Sigma_5\right)\frac{2\,K}{\pi}\,\lambda_3\,. \tag{26}$$

В предыдущих уравнениях

$$\Sigma_2 = \frac{1}{K}\int\limits_0^K \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\sqrt{\sigma}}\,du\,, \quad \Sigma_3 = \frac{1}{K}\int\limits_0^K \frac{\mathrm{sn}^2 u}{(1 - b_1^2\,\mathrm{sn}^2 u)\,\sqrt{\sigma}}\,du\,,$$

$$\Sigma_4 = \frac{1}{K}\int\limits_0^K \frac{\mathrm{sn}^2 u}{(1 - b_2^2\,\mathrm{sn}^2 u)\,\sqrt{\sigma}}\,du\,,$$

$$\Sigma_5 = \frac{1}{K}\int\limits_0^K \frac{\mathrm{sn}^2 u}{(1 - b_3^2\,\mathrm{sn}^2 u)\,\sqrt{\sigma}}\,du\,,$$

$$b_1^2 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 - \xi_1}\,, \quad b_2^2 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\left(\bar{c} + \overline{G}_2\right)^2 - \xi_1}\,, \quad b_3^2 = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_1 - \left(\bar{c} - \overline{G}_2\right)^2}\,.$$

Коэффициенты Q_k ($k = 1, 2, \ldots, 7$) — это константы, зависящие от $\bar{c}$, $\overline{G}_2$ и ξ_1.

Эти вековые части мы возьмем в качестве новых угловых переменных λ_j.

4. Определение сопряженных канонических переменных

К новым переменным λ_j необходимо подобрать сопряженные канонические переменные Λ_j. Мы можем найти их, используя теорему Якоби о канонических преобразованиях.

Согласно теореме необходимо найти такую определяющую функцию S, зависящую от λ_j, A_j и t, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\partial S}{\partial A_i} = B_i\,. \tag{27}$$

Тогда сопряженные величины Λ_j определятся равенством

$$\Lambda_j = \frac{\partial S}{\partial \lambda_j}\,. \tag{28}$$

Рассмотрим подробно случай циркулярных орбит ($\bar{h} < 0$). Мы можем представить B_j через новые переменные λ_j:

$$B_3 = \frac{2}{\pi}\frac{\partial W_1}{\partial A_3}\lambda_3 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_3}(t - t_0) \tag{29}$$

и для $j \neq 3$

$$B_j = \lambda_j + \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_j}(t - t_0) + \frac{2}{\pi}\frac{\partial W_1}{\partial A_j}\lambda_3\,, \tag{30}$$

где W_1 — это полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби. Коэффициенты при λ_3 есть частные производные по A_j от функции $W_1(g_1)$. Мы возьмем S в виде

$$S = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \\ + \frac{2}{\pi}W_1\lambda_3 + A_4\lambda_4 + A_5\lambda_5 + \varepsilon(t - t_0)\,. \tag{31}$$

Тогда

$$\Lambda_j = \frac{\partial S}{\partial \lambda_j}\,. \tag{32}$$

Мы получаем сопряженные переменные Λ_j:

$$\Lambda_1 = \frac{\partial S}{\partial \lambda_1} = A_1\,, \quad \Lambda_2 = \frac{\partial S}{\partial \lambda_2} = A_2\,, \quad \Lambda_3 = \frac{2}{\pi}\overline{W}_1\,, \tag{33}$$

$$\Lambda_4 = \frac{\partial S}{\partial \lambda_4} = A_4\,, \quad \Lambda_5 = \frac{\partial S}{\partial \lambda_5} = A_5\,.$$

Каноническая система дифференциальных уравнений в новых переменных может быть написана так:

$$\frac{d\Lambda_j}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial \lambda_j}\,, \quad \frac{d\lambda_j}{dt} = -\frac{\partial Z}{\partial \Lambda_j}\,, \tag{34}$$

для $j = 1, 2, 3, 4, 5$, где $Z = \varepsilon + R$.

Гамильтониан преобразованной системы возмущенного движения зависит от ε и R, ε соответствует невозмущенному движению и не зависит от угловых переменных.

Второй член R есть возмущающая часть и в нашем случае зависит от λ_3 и λ_4. Необходимо R выразить через новые переменные λ_3, λ_4 и Λ_j.

5. Заключение

Методом вариации произвольных постоянных была получена система дифференциальных уравнений в новых канонических переменных. Для решения этой системы можно использовать классические методы небесной механики, например итерационный.

Литература

1. *Орлов А. А., Соловая Н. А.* // Тр. ГАИШ. 1974. **45**. С. 119.
2. *Solovaya N., Pittich E.* // Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso. 1996. **26**, №2. P. 87.
3. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1968.

Поступила в редакцию
09.12.96