УДК 519.246,524

ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА РЕЗОНАНСНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНТЕНН

А. В. Гусев

(*ГАИШ*)

Разработан оптимальный по критерию минимума среднеквадратической ошибки нелинейный алгоритм интерполяции выходного сигнала резонансных гравитационных антенн. Проведено сравнение эффективности нелинейного и линейного алгоритмов оптимальной интерполяции.

Введение

Применение методов оптимального комплексирования [1] при обработке информации в гравитационно-волновом эксперименте [2, 3] предполагает предварительное восстановление исходного непрерывного (аналогового) выходного сигнала $E(t)$ резонансных гравитационных антенн (РГА), заданного в цифровой (дискретной) форме. Случайный процесс $E(t)$ представляет собой квадрат огибающей узкополосного процесса на выходе оптимального фильтра. Фильтр согласован с отдельным гравитационным импульсом, начальная фаза и момент возникновения которого предполагаются неизвестными.

При аналогово-цифровой обработке непрерывный процесс $E(t)$ подвергается дискретизации по времени с шагом T. При восстановлении исходного аналогового выходного сигнала РГА по дискретной выборке $E_k = E(t_k)$, $t_k = kT$, влиянием слабых гравитационных импульсов на качество восстановления можно пренебречь. Это позволяет в первом приближении рассматривать выходной сигнал РГА как стационарный случайный процесс.

В работе [4] при повторном анализе достоверности эффекта «гравитационно-нейтринной» корреляции [5] в период вспышки сверхновой СН 1987А указывалось на необходимость учитывать погрешность восстановления выходного сигнала РГА. Для восстановления $E(t)$ использовался алгоритм оптимальной линейной интерполяции стационарных случайных процессов [6]. Оптимальная линейная интерполяция обеспечивает минимальную среднеквадратическую ошибку (СКО) и оказывается оптимальной в «узком смысле» только при гауссовом случайном процессе [6]. Если для восстановления негауссового случайного процесса $E(t)$ применяется алгоритм оптимальной нелинейной интерполяции, то СКО должна уменьшиться по отношению к случаю линейного алгоритма.

Целью работы является разработка оптимального по критерию минимума СКО нелинейного алгоритма интерполяции выходного сигнала $E(t)$ РГА, заданного в дискретной форме.

1. Шумы РГА как гауссов марковский процесс

При обобщенном анализе РГА рассматривается как линейная система с передаточной функцией $H_\omega(j\omega) = \left[M(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma\omega j)\right]^{-1}$, где M, ω_0 и $\gamma \ll \omega_0$ — эквивалентные масса, резонансная частота и декремент затухания. На вход системы поступает аддитивная смесь полезного сигнала $f_s(t)$ и широкополосных стационарных гауссовых шумов $f_n(t)$. Шумы системы регистрации учитываются путем введения дополнительного стационарного широкополосного гауссова шума $x_r(t)$. Результирующее колебание $X(t) = H(t) * [f_s(t) + f_n(t)] + x_r(t)$ ($H(t) \leftrightarrow H_\omega(j\omega)$ – импульсная характеристика РГА) поступает на вход оптимального линейного фильтра [1] с передаточной функцией

$$K_\omega(j\omega) = K_0\left[H(j\omega)f_{s,\omega}(j\omega)/S(\omega)\right]^* \exp\{-j\omega t_0\}, \tag{1}$$

где K_0 — произвольный масштабный коэффициент; $f_{s,\omega}(j\omega) \leftrightarrow f_s(t)$, t_0 — временная задержка, введение которой обеспечивает физическую реализуемость оптимального фильтра; $S(\omega) = S_x(\omega) + |H(j\omega)|^2 S_f(\omega)$; $S_x(\omega)$ и $S_f(\omega)$ — спектральные плотности стационарных широкополосных и статистически независимых гауссовых шумов $f_n(t)$ и $x_r(t)$ соответственно.

Шум $Y(t) = K(t) * [H(t)f_n(t) + x_r(t)]$ на выходе оптимального фильтра можно рассматривать как узкополосный гауссов процесс:

$$Y(t) = a(t)\cos\omega_0 t - b(t)\sin\omega_0 t = R(t)\cos[\omega_0 t + \vartheta(t)],$$

где $K(t) \leftrightarrow K_\omega(j\omega)$ — импульсная характеристика оптимального фильтра, $R(t)$ и $\vartheta(t)$ — огибающая и фаза, $a(t)$ и $b(t)$ — квадратурные компоненты.

Для стандартной модели гравитационного «всплеска» $f_s(t)$ в виде δ-импульса с «амплитудой» f_0 — $f_s(t) = f_0\delta(t)$ — из выражения (1) находим функции корреляции случайных взаимно независимых гауссовых процессов $a(t)$ и $b(t)$ с нулевым средним значением: $\langle a(t)a(t+\tau)\rangle = \langle b(t)b(t+\tau)\rangle = \sigma_2\rho(\tau)$, где $\rho(\tau) = \exp\{-\gamma|\tau|\}$, σ^2 — дисперсия естественных гауссовых шумов на выходе РГА, $\langle\ldots\rangle$ — символическая запись оператора статистического усреднения.

Можно показать [6, 7], что стационарные экспоненциально коррелированные гауссовы шумы $a(t)$ и $b(t)$ являются гауссовыми одномерными марковскими процессами. Одномерными марковскими (но негауссовыми) процессами являются также огибающая $R(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$ и ее квадрат $E(t) = R^2(t)$, формируемый квадратичным детектором огибающей. Несмотря на то что марковский характер случайного процесса $E(t)$ позволяет, в принципе, использовать для восстановления выходного сигнала

РГА общие алгоритмы интерполяции произвольных марковских процессов [8], более удобной представляется методика, предложенная в работе [9] для оптимальной фильтрации по критерию минимума СКО огибающей $R(t)$ и фазы $\vartheta(t)$. Эта методика основана на предварительном вычислении апостериорных плотностей вероятностей независимых гауссовых случайных величин $a_{kt} = a(t_k < t < t_{k+1})$ и $b_{kt} = b(t_k < t < t_{k+1})$. На следующем этапе определяются апостериорная плотность вероятности $W_{ps}(R_{kt})$ случайной величины

$$R_{kt} = R(t_k < t < t_{k+1}) = \sqrt{a_{kt}^2 + b_{kt}^2} \qquad (2)$$

и оптимальная (по критерию минимума СКО) оценка $\hat{E}_{kt}$ выходного сигнала РГА $E_{kt} = E(t_k < t < t_{k+1})$, представляющая собой апостериорное среднее:

$$\hat{E}_{kt} = \int_0^\infty R_{kt}^2 W_{ps}(R_{kt}) dR_{kt}. \qquad (3)$$

2. Оптимальная интерполяция выходного сигнала РГА

Пусть $R_k = R(t_k)$, $\vartheta_k = \vartheta(t_k)$, $k = \overline{1, N}$. Так как при восстановлении аналогового процесса $E(t)$ дискретные отсчеты $\{E_k\}$ предполагаются заданными, то элементы $R_k = \sqrt{E_k}$ вспомогательной последовательности $\{R_k\}$ априори известны. В то же время элементы последовательности $\{\vartheta_k\}$ при реконструкции выходного сигнала $E(t)$ должны рассматриваться как случайные статистически зависимые случайные величины. Поскольку узкополосный процесс $Y(t)$ является гауссовым процессом, для которого совместная плотность вероятности $W_4(R_k, R_{k+1}, \vartheta_k, \vartheta_{k+1})$ случайных величин $R_k, R_{k+1}, \vartheta_k, \vartheta_{k+1}$ известна [7], то двумерная условная плотность вероятности $W_2(\vartheta_k, \vartheta_{k+1}|R_k, R_{k+1})$ может быть представлена в виде

$$W_2(\vartheta_k, \vartheta_{k+1}|R_k, R_{k+1}) = \frac{W_4(R_k, R_{k+1}, \vartheta_k, \vartheta_{k+1})}{W_2(R_k, R_{k+1})} =$$
$$= (2\pi)^{-2} \exp\left\{\rho_0(R_k R_{k+1}/\sigma_0^2)\cos(\vartheta_{k+1} - \vartheta_k)\right\} \times$$
$$\times I_0^{-1}\left[\rho_0(A_k R_{kt}/\sigma_0^2\right], \qquad (4)$$

где $\sigma_0^2 = (1 - \rho_0^2)$, $\rho_0 = \rho(T) = \exp\{-\gamma T\}$, $I_0(x)$, $I_1(x), \ldots$ — модифицированные функции Бесселя 1-го рода.

Оптимальная линейная интерполяция случайных величин a_{kt} и b_{kt}. При линейной оптимальной интерполяции оптимальные оценки $\hat{a}_{kt}$ и $\hat{b}_{kt}$ неизвестных случайных величин a_{kt} и b_{kt} определяются следующим образом [6]: $\hat{a}_{kt} = c_0 a_k + c_1 a_{k+1}$, $\hat{b}_{kt} = c_0 b_k + c_1 b_{k+1}$, $a_k = a(kT)$ и $b_k = b(kT)$, $k = \overline{1, N}$. Марковский характер случайных гауссовых процессов $a(t)$ и $b(t)$ учитывается тем, что оптимальные оценки $\hat{a}_{kt}$ и $\hat{b}_{kt}$ зависят только от «ближайших» отсчетов a_k, a_{k+1} и b_k, b_{k+1} соответственно. Весовые функции $c_{1,2}(t)$ при оптимальной линейной интерполяции находим, учитывая принцип ортогональности [6]: $\langle(a_{kt} - \hat{a}_{kt})a_m\rangle = 0$, $m = k, k+1$. Отсюда после несложных преобразований получим

$$c_0 = \operatorname{sh}\gamma(T - t)/\operatorname{sh}\gamma T, \quad c_1 = \operatorname{sh}\gamma t/\operatorname{sh}\gamma T.$$

СКО $\varepsilon^2 = \langle(a_{kt} - \hat{a}_{kt})^2\rangle = \left\langle(b_{kt} - \hat{b}_{kt})^2\right\rangle$ при оптимальной линейной интерполяции определяется следующей формулой:

$$\varepsilon^2 = \sigma^2\left[1 - \operatorname{sh}^{-1}\gamma T\left(\mathrm{e}^{-\gamma t}\operatorname{sh}\gamma(T - t) + \mathrm{e}^{-\gamma(T-t)}\operatorname{sh}\gamma t\right)\right]. \qquad (5)$$

Дальнейший анализ основывается на том, что алгоритм оптимальной линейной интерполяции для гауссовых случайных величин a_{kt} и b_{kt} является оптимальным в «узком смысле». Следовательно, апостериорные плотности вероятности статистически независимых случайных величин a_{kt} и b_{kt} оказываются гауссовыми с параметрами соответственно $(\hat{a}_{kt}, \sigma_{ps})$ и $(\hat{b}_{kt}, \sigma_{ps})$, где $\sigma_{ps}^2 = \varepsilon^2$ — апостериорная дисперсия.

Оптимальная интерполяция выходного сигнала РГА. Будем рассматривать случайную величину R_{kt} (2) как модуль случайного вектора с независимыми гауссовыми компонентами a_{kt} и b_{kt}. Так как модуль случайного вектора с независимыми гауссовыми компонентами определяется законом Райса [7], получим

$$W_{ps}(R_{kt}) = \qquad (6)$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} W_1(R_{kt}A_k)W_2(\vartheta_k, \vartheta_{k+1}|R_k, R_{k+1})d\vartheta_k\, d\vartheta_{k+1}.$$

Здесь

$$W_1(R_{kt}, A_k) = (R_{kt}/\sigma_{ps}^2) \times \qquad (7)$$
$$\times \exp\left\{-(R_{kt}^2 + A_k^2)/(2\sigma_{ps}^2)\right\} I_0\left[\rho_0(A_k R_{kt}/\sigma_{ps}^2)\right]$$

— распределение Райса,

$A_k = \sqrt{c_0^2 R_k^2 + c_1^2 R_{k+1}^2 + 2c_0 c_1 \cos(\vartheta_{k+1} - \vartheta_k)}$.

Начальные моменты распределения (7) могут быть представлены в виде [7] $\langle[R_{kt}^m|A_k]\rangle = (2\sigma_{ps}^2)^{\frac{m}{2}}\Gamma(1 + (m/2))\,{}_1F_1\left(-(m/2), 1, -(A_k^2/2\sigma_{ps}^2)\right)$, где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция. При $m = 2$, учитывая выражения (3) и (6), находим оптимальную по критерию минимума СКО оценку $\hat{E}_{kt}$ неизвестной случайной величины E_{kt}:

$$\hat{E}_{kt} = 2\sigma_{ps}^2 + c_0^2 E_k + c_1^2 E_{k+1} + 2c_0 c_1 R_k R_{k+1} \times$$
$$\times \frac{I_1\left(\rho_0\sqrt{E_k E_{k+1}}/\sigma_0^2\right)}{I_0\left(\rho_0\sqrt{E_k E_{k+1}}/\sigma_0^2\right)}. \qquad (8)$$

Формула (8) определяет нелинейный (за счет последнего слагаемого) алгоритм оптимального восстановления выходного сигнала $E(t)$ РГА, заданного в дискретной форме.

Представление (6) апостериорной плотности вероятности $W_{ps}(R_{kt})$ позволяет достаточно просто вычислить СКО $\chi^2 = \left\langle (E_{kt} - \hat{E}_{kt})^2 \right\rangle$ при оптимальной нелинейной интерполяции. Действительно, $\chi^2 = \langle [D_{kt}|A_k] \rangle$, $[D_{kt}|A_k] = \langle [R_{kt}^4|A_k] \rangle - \langle [R_{kt}^2|A_k] \rangle^2$ — дисперсия квадрата случайной величины, распределенной по закону Райса (7). Из общей формулы для $\langle [R_{kt}^m|A_k] \rangle$ при $m = 2, 4$ находим: $[D_{kt}|A_k] = 4\sigma_{ps}^4[1 + (A_k^2/\sigma_{ps}^2)]$. Усреднение нелинейного члена в A_k^2 удобно осуществить в два этапа.

На первом этапе A_k^2 следует усреднить, принимая во внимание выражение (4), по случайным фазам ϑ_k и ϑ_{k+1} при фиксированных R_k и R_{k+1}. Полученное при этом выражение зависит только от случайной величины $y = R_k R_{k+1} = \sqrt{E_k E_{k+1}}$: $\langle A_k^2 | R_k, R_{k+1} \rangle \equiv \langle A_k^2 | y \rangle$. Плотность вероятности $W_{1y}(y)$ случайной величины y известна [10]: $W_{1y}(y) = (2\sigma_{ps}^2\sigma_0^2)^{-1} I_0\left(\rho_0\sqrt{y}/\sigma_0^2\right) K_0\left(\sqrt{y}/\sigma_0^2\right)$, $y \geqslant 0$, где $K_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя 2-го рода. На следующем этапе находим безусловное среднее значение: $\langle A_k^2 \rangle = \int\limits_0^\infty \langle A_k^2 | y \rangle \, W_1(y)\, dy$. Этот интеграл является табличным [11]. Окончательная формула для вычисления СКО при оптимальной нелинейной интерполяции оказывается следующей:

$$\chi^2 = 4\sigma_{ps}^4 \left[1 + 2(c_0^2 + c_1^2 + 2c_0c_1\rho_0)\right], \quad \sigma_{ps}^2 = \varepsilon^2. \quad (9)$$

Алгоритм оптимальной нелинейной интерполяции (8) становится заметно более сложным по отношению к алгоритму оптимальной интерполяции. Целесообразность применения подобного алгоритма для восстановления выходного сигнала реальной РГА зависит от относительной эффективности этого алгоритма по отношению к линейному.

Сравнение с алгоритмом оптимальной линейной интерполяции. При оптимальной линейной интерполяции в качестве оптимальной оценки $\hat{E}_{kt,l}$ выходного сигнала РГА E_{kt} выбирается линейная комбинация
$\hat{E}_{kt,l} = d_0E_k + d_1E_{k+1} + 2\sigma^2 d$, $d = 1 - (d_0 + d_1)$. Весовые функции $d_{0,1}$ определяются из принципа ортогональности [6]: $\left\langle (E_{kt} - \hat{E}_{kt})E_m \right\rangle = 0$, $m = 0, 1$: $d_0 = \operatorname{sh} 2\gamma(T - t)/\operatorname{sh} 2\gamma T$, $d_1 = \operatorname{sh} 2\gamma t/\operatorname{sh} 2\gamma T$, $d = 1 - d_0 - d_1$. СКО $\xi^2 = \left\langle (E_{kt} - \hat{E}_{kt,l})^2 \right\rangle$ восстановления выходного сигнала РГА при оптимальной линейной интерполяции равна

$$\xi^2 = 4\sigma^4 \left[1 - \operatorname{sh}^{-1} 2\gamma T \times \right. \\ \left. \times \left(\mathrm{e}^{-2\gamma t} \operatorname{sh} 2\gamma(T - t) + \mathrm{e}^{-2\gamma(T-t)} \operatorname{sh} 2\gamma t\right)\right]. \quad (10)$$

Так как СКО достигает наибольшей величины при $t = T/2$, то определим коэффициент относительной эффективности q нелинейного алгоритма интерполяции по отношению к линейному следующим образом: $q = \xi^2/\chi^2$ при $t = T/2$. Принимая во внимание выражения (5), (9) и (10), находим

$$q = 2[(1 + g^2)g(2 - g)]^{-1}, \quad g = \operatorname{th} \gamma(T/2). \quad (11)$$

3. Обсуждение основных результатов

1. Алгоритм оптимальной интерполяции (8) выходного сигнала РГА является нелинейным. «Линейная» часть подобного нелинейного алгоритма и оптимальный линейный алгоритм интерполяции не совпадают: $c_{1,2} \neq d_{1,2}$. Апостериорная плотность вероятности $W_1(R_{kt})$ (6) зависит как от предшествующего R_r, так и от последующего R_{k+1} отсчетов, поэтому алгоритм нелинейной интерполяции случайного процесса $R(t)$ ($E(t)$) оказывается более сложным, чем алгоритм оптимальной нелинейной фильтрации огибающей, рассмотренный в работе [9].

2. Относительная эффективность оптимального нелинейного алгоритма интерполяции по отношению к линейному определяется формулой (11) и зависит от фактора $g = \operatorname{th}(\gamma T/2)$. Для неохлаждаемых РГА типа «Geograv» (Италия) или «Улитка» (МГУ, ГАИШ) $\gamma T \approx 1$, и, следовательно, применение алгоритма оптимальной нелинейной интерполяции не приведет к заметному уменьшению СКО. Наоборот, для криогенных РГА типа «Explorer» (Церн, Швейцария) или суперкриогенных типа «Nautilus» (Италия) при достаточно малом шаге дискретизации T типичным оказывается условие $\gamma T \ll 1$ и, следовательно, $g \approx (\gamma T)/2 \ll 1$. В этой ситуации коэффициент относительной эффективности алгоритма нелинейной интерполяции по отношению к линейному оказывается значительным: $q \approx (\gamma T) \gg 1$, что делает перспективным применение нелинейного алгоритма.

Литература

1. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
2. *Виноградов М.П., Гусев А.В., Милюков В.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 5. С. 37 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 5. P. 44).
3. *Виноградов М.П., Гусев А.В., Милюков В.К.* // Там же. № 6. С. 33 (Ibid. No 6. P. 41).
4. *Гусев А.В.* // Метрология. 1998. № 8. С. 5.
5. *Aglietta M., Castellina A., Fulgione W.* et al. // Nuovo Cimento. 1991. **C14**. P. 171.
6. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
7. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
8. *Сосулин Ю.Г.* Обнаружение и фильтрация стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1977.
9. *Парамонов А.А.* // Радиотехника. 1980. **35**, № 6. С. 70.
10. *Тихонов В.И.* Примеры и задачи по статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1970.
11. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию
19.11.99