

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

ФЕРРОМАГНИТНОЕ СОСТОЯНИЕ $SU(2)$ -КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯВ. Ч. Жуковский, О. В. Тарасов, Д. Эберт^{*)}

(кафедра теоретической физики)

E-mail: zhukovsk@phys.msu.ru

Рассмотрены условия, при которых возможно ферромагнитное состояние $SU(2)$ -калибровочной модели теории поля. Показано, что конденсация тахионных мод в пространственно однородное состояние возможна при ограничении протяженности хромагнитного поля. Исследован вопрос о фазовом переходе между ферромагнитным и сверхпроводящим состояниями.

1. Постоянное хромагнитное поле — это одна из простейших калибровочных конфигураций, являющихся решением уравнений поля и, возможно, претендующая на объяснение некоторых непертурбативных явлений в КХД. В статьях [1, 2] показано, что при определенных плотностях фермионов возможна ситуация, когда конфигурация с ненулевым хромагнитным полем B (ферромагнитное состояние) оказывается энергетически более выгодной, чем тривиальная конфигурация с $B = 0$.

В указанных статьях [1, 2] описана структура бозонного сектора этой модели (заметим, что впервые модель постоянного хромагнитного поля рассматривалась в работах [3, 4]). Вначале кратко приведем основные принятые в [1, 2] допущения и результаты.

Как известно [5, 6], постоянное хромагнитное поле, являясь решением уравнений Янга–Миллса, не минимизирует действия ввиду наличия тахионных мод. Взаимодействие компонент калибровочного поля можно представить в виде взаимодействия «нейтрального» поля, соответствующего генераторам максимальной абелевой подгруппы калибровочной группы, с «заряженным» полем, соответствующим остальным генераторам. В случае $SU(2)$ это разбиение имеет вид $A_\mu = A_\mu^3$ — нейтральное («электромагнитное») поле; $\Phi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2)$ — заряженное поле. Обозначая $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$, можно записать лагранжиан поля Янга–Миллса в виде

$$L = -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2}|(D_\mu\Phi_\nu - D_\nu\Phi_\mu)|^2 - igf_{\mu\nu}\Phi_\mu^+\Phi_\nu + \frac{g^2}{4}(\Phi_\mu^+\Phi_\nu - \Phi_\nu^+\Phi_\mu)^2. \quad (1)$$

Постоянному хромагнитному полю соответствует

$$A_\mu = (A_0, \mathbf{A}) = (0, (0, x_1 B, 0)), \quad (2)$$

$$\Phi_\mu = \Phi_\mu^+ = 0.$$

Этот набор (A, Φ) является решением уравнений поля. Однако если искать отличные от нуля решения уравнений движения для заряженного поля Φ во внешнем хромагнитном поле A_μ , то решения можно записать в виде $\Phi_\mu = e^{-iEx_0 + ik_3x_3 + ik_2x_2} f_{n\mu}(x_1 - k_2/gB)$ с энергетическим спектром

$$E^2 = k_3^2 + 2gB \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm 2gB, \quad (3)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, а $f_{n\mu}(x)$ выражаются через известные собственные функции гармонического осциллятора. Энергия становится мнимой при ориентации спина, соответствующей знаку «-», $n = 0$ и $k_3^2 < gB$ (тахионные моды). Наличие таких энергий демонстрирует нестабильность данной конфигурации относительно сдвигов вдоль тахионных мод [5].

Эта проблема ранее исследовалась во многих работах. Авторы [1, 2] впервые показали, что при некоторых предположениях можно получить пространственно однородное состояние конденсата заряженных компонент поля. Для этого следует эффективно понизить размерность задачи до $(2+1)$ -мерной и применить для глюонов технику, подобную той, что использовалась в [7, 8] для описания квантового эффекта Холла в $(2+1)$ -мерном фермионном газе.

В [1, 2] стабилизировалась лишь самая жесткая тахионная мода, соответствующая $k_3 = 0$. Надежной гарантией того, что найденное решение устойчиво также и относительно неоднородных вдоль хромагнитного поля возмущений, является отсутствие тахионных мод с импульсом $k_3 \neq 0$. Из (3) следует, что нестабильными будут все моды с $n = 0$

^{*)} D. Ebert (Humboldt University, Berlin).

и $k_3^2 < gB$. Ради ликвидации мод с $k_3 \neq 0$ мы дискретизируем k_3 , полагая протяженность поля вдоль оси z конечной. Условие стабильности самой низлежащей моды с $k_3 \neq 0$ накладывает физическое ограничение на максимально возможную протяженность хромагнитного поля B_0 :

$$\left(\frac{2\pi}{L_3}\right)^2 = gB_0. \quad (4)$$

2. Калибровочная конфигурация из постоянного хромагнитного поля и заряженного однородного конденсата несет нетривиальный цветовой заряд. Сделать систему нейтральной можно, введя фермионы, взаимодействующие с этой конфигурацией. Мы будем рассматривать безмассовые фермионы в фундаментальном представлении. Они описываются уравнением Дирака

$$i\gamma_\mu D_\mu \Psi = 0, \quad (5)$$

где $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$. Фермионы, обладающие конечной плотностью, займут в основном состоянии некоторое количество нижних уровней спектра, определяемого внешним калибровочным полем. Их полная энергия, являясь суммой энергий всех занятых уровней, будет зависеть от внешнего поля. Ограничения сводятся к следующему: область $(3+1)$ -мерного пространства, занятая полем, ограничена по оси z интервалом $(0, L_3^{\max})$, где $L_3^{\max} = 2\pi/\sqrt{gB}$. Наша цель — исследовать, будет ли энергетически выгодно при постоянном L_3 «выключить» постоянное хромагнитное поле.

В настоящей статье ограничимся случаем нулевой температуры. Тогда фаза, в которой будет находиться система, определяется энергией системы в основном состоянии. Спектр оператора Дирака, необходимый для ее вычисления, хорошо известен [6]. Состояние фермиона определяется цветом, ароматом, спином, знаком энергии, номером уровня Ландау и двумя компонентами импульса: $\lambda = (c, f, s, \epsilon, n, k_2, k_3)$,

$$E_\lambda^2 = \frac{g}{2}B(2n+1-s) + k_3^2,$$

где учтено, что эффективный заряд $g' = g/2$. Условие периодичности снова определяет возможные значения импульсов k_2, k_3 , а вид волновой функции ограничивает максимально возможное значение k_2 , определяя тем самым степень вырождения по k_2 .

Так как в рассматриваемой модели напряженность поля и его длина взаимно ограничивают друг друга, удобно сделать напряженность поля B , плотность фермионов ρ и их полную энергию E_{tot} безразмерными с помощью естественного безразмеривающего параметра L_3 или соответствующего B_0 : $\alpha = B/B_0$, см. уравнение (4), $\alpha \in (0, 1)$; $x = \rho/(gB_0)^{3/2}$; $h(x, \alpha) = E_{tot}/(2g^2VB_0^2)$.

Нас интересует выигрыш энергии всей системы фермионов при «включении» поля αB_0 . Учитывая

энергию самого хромагнитного поля, имеем

$$\Delta E = VB_0^2 \left(-2g^2 \left(h \left(\frac{\rho}{(gB_0)^{3/2}}, 0 \right) - h \left(\frac{\rho}{(gB_0)^{3/2}}, \alpha \right) \right) + \frac{\alpha^2}{8\pi} \right). \quad (6)$$

Хромагнитное поле B , определяемое α , является свободным параметром в отличие от B_0 и ρ , которые мы считаем заранее заданными. α «подстроится» на интервале $(0, 1)$ под заданные параметры системы так, чтобы суммарная ее энергия была минимальна. После оптимизации по α безразмерный выигрыш энергии $\Delta e = \Delta E_{\min}/(VB_0^2)$ за счет цветового ферромагнетизма становится функцией лишь безразмерной плотности фермионов:

$$\Delta e = \min_{\alpha} \left(-2g^2 (h(x, 0) - h(x, \alpha)) + \frac{\alpha^2}{8\pi} \right). \quad (7)$$

В отсутствие хромагнитного поля теоретически возможен выигрыш энергии за счет механизма цветовой сверхпроводимости. Подробное изучение этого механизма выходит за рамки настоящей статьи, и поэтому мы ограничимся качественной оценкой. Выигрыш энергии за счет образования куперовских пар пропорционален площади сферы Ферми, т.е. $\rho^{2/3}$. Согласно [9],

$$\Delta E_{SC} = -V \frac{\mu^2 \delta^2}{\pi^2}, \quad (8)$$

где μ — химический потенциал, δ — размер энергетической щели, который здесь для простоты будем считать постоянным.

Вопрос об энергетической выгоде ферромагнитной фазы сводится теперь к соотношению выражений, соответствующих выигрышу безразмерной энергии по сравнению с тривиальным состоянием в каждой из фаз:

$$\Delta e_{\text{ferr}} = \Delta e \left(\frac{\mu^3}{6\pi^2 (gB_0)^{3/2}} \right), \quad (9)$$

$$\Delta e_{SC} = - \left(\frac{\delta}{\pi B_0} \right)^2 \mu^2.$$

Функция $\Delta e(x)$ была проанализирована с помощью компьютера. Процесс ее построения и полученные результаты показаны на рис. 1–4.

На рис. 1 изображен безразмерный выигрыш фермионной энергии $\Delta h(x, \alpha) = h(x, \alpha) - h(x, 0)$ как функция безразмерной плотности фермионов x при фиксированном α . Видно, что эта разность всегда отрицательна и осциллирует с ростом плотности. Причина осцилляций — в заполнении очередного уровня Ландау и переходе на следующий уровень. Мы ожидаем, что при достаточно высокой температуре они должны исчезнуть.

На рис. 2 изображена $\Delta h(x, \alpha)$ как функция безразмерного хромагнитного поля α при постоянной плотности фермионов. В целом чем сильнее поле, тем

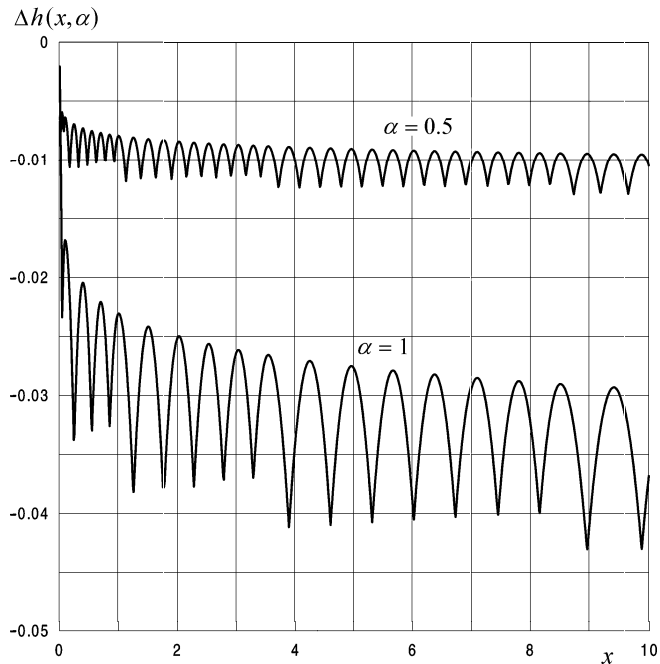


Рис. 1. Безразмерный выигрыш фермионной энергии $\Delta h(x, \alpha)$ как функция безразмерной плотности фермионов x при фиксированном α

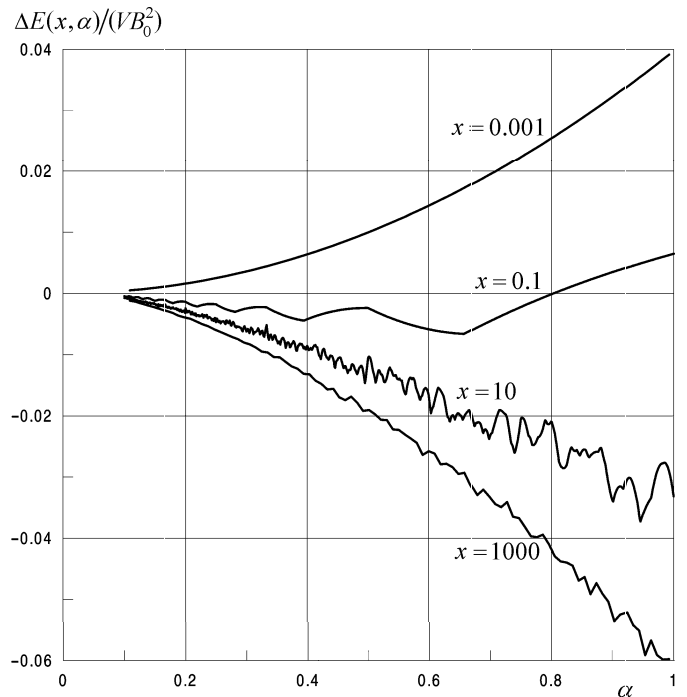


Рис. 3. Полное изменение безразмерной энергии всей системы как функция безразмерного хромагнитного поля α

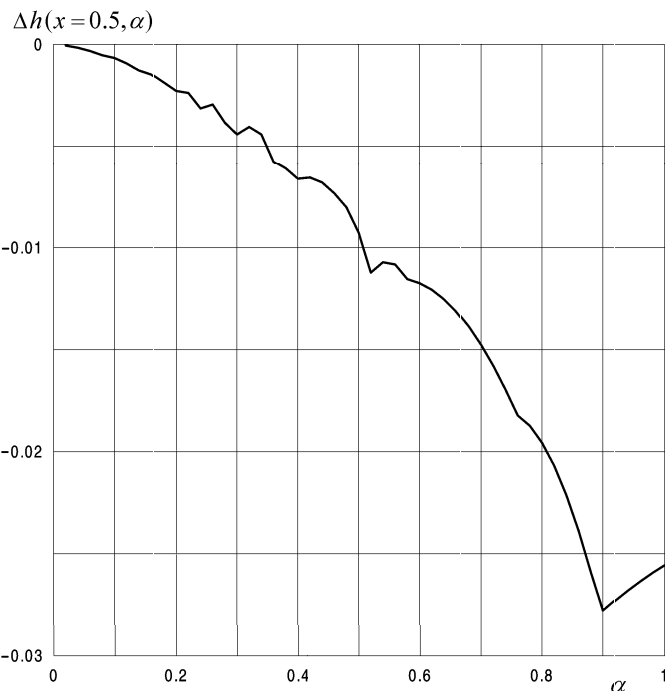


Рис. 2. Безразмерный выигрыш фермионной энергии $\Delta h(x, \alpha)$ как функция безразмерного хромагнитного поля α при постоянной безразмерной плотности фермионов x

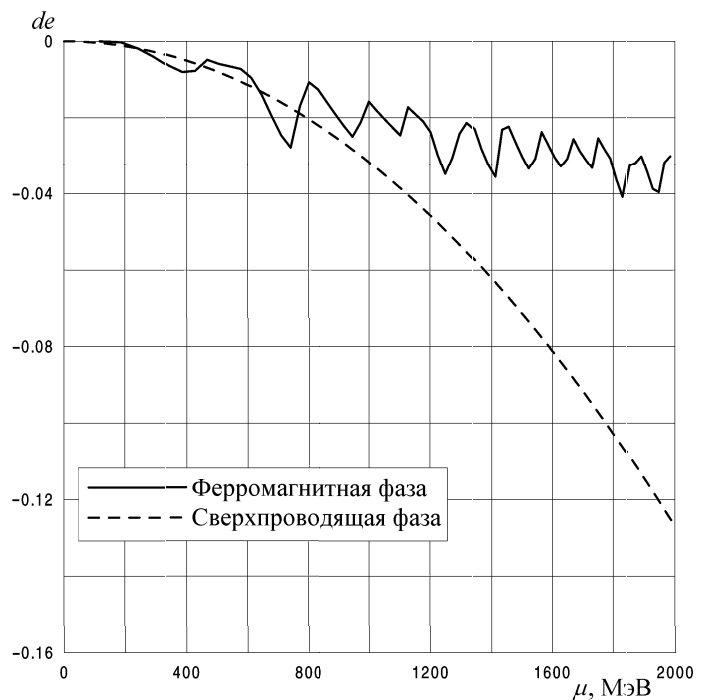


Рис. 4. Безразмерный выигрыш энергии в ферромагнитной (после выбора оптимального α) и сверхпроводящей фазах как функция химического потенциала μ

ниже энергия фермионов, пока не наступит насыщение в момент, когда вместимость нижнего уровня Ландау не станет достаточной для размещения всех фермионов. При рассмотренной достаточно высокой плотности фермионов это значение α находится далеко за пределами интервала $(0, 1)$.

На рис. 3 изображено полное изменение безразмерной энергии всей системы как функция безразмерного хромагнитного поля α . При нулевой

плотности фермионов $x = 0$ включение поля невыгодно и зависимость параболическая. При конечных плотностях фермионов сначала рост поля выгоден, но когда все фермионы попадают на нижний уровень Ландау, энергия начинает расти как α^2 . При высоких плотностях это насыщение наступает при $\alpha > 1$, т. е. системе выгодно значение α , близкое к единице (необязательно $\alpha = 1$ из-за осцилляций).

На рис. 4 изображены безразмерные выигрыши

энергии в ферромагнитной (после выбора оптимального α) и сверхпроводящей фазах как функция химического потенциала μ . Фаза определяется условием минимальности энергии. Выбор параметров и формулы для сверхпроводящей фазы весьма произволен и требует дальнейшего изучения. Тем не менее мы надеемся, что полученные в данной работе выводы качественно описывают возможный фазовый переход. При достаточно больших μ выгодна сверхпроводящая фаза. При уменьшении μ более выгодной может стать ферромагнитная фаза, произойдет фазовый переход. Однако ферромагнитный выигрыш энергии, как видно из графика, претерпевает при нулевой температуре осцилляции. Поэтому фазовая картина оказывается более сложной. При дальнейшем падении μ «возвращается» сверхпроводящая фаза, потом опять наступает ферромагнитная, и это может повториться несколько раз.

Таким образом, проведенное нами исследование показало, что при нулевой температуре ферромагнитное состояние фермионов может оказаться энергетически выгодным. При некоторых параметрах возможен фазовый переход между ферромагнитным и сверхпроводящим состояниями. Заметим также, что при нулевой температуре возможна нетривиальная структура фаз, связанная с немонотонной

зависимостью выигрыша энергии фермионов в хромагнитном поле от их плотности.

Авторы благодарят М. Мюллера-Пройскера за полезные советы и обсуждение результатов работы, а также за поддержку.

Работа выполнена в рамках проекта DFG 436 RUS 113/477.

Литература

1. *Iwazaki A., Murimatsu O.* // nucl-th/0304005.
2. *Iwazaki A., Murimatsu O., Nishikawa T., Ohtani T.* // hep-ph/0309066.
3. *Savvidy G.K.* // Phys. Lett. 1977. **71B**. P. 133.
4. *Matinyan S.C., Savvidy G.K.* // Nucl. Phys. 1978. **B143**. P. 539.
5. *Nielsen N.K., Olesen P.* // Nucl. Phys. 1979. **B160**. P. 380.
6. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Калибровочные поля. М., 1986.
7. *Zhang S., Hanson H., Kivelson S.* // Phys. Rev. Lett. 1989. **62**. P. 82.
8. *Semenoff G.W.* // Phys. Rev. Lett. 1988. **61**. P. 516.
9. *Rajagopal K., Wilczek F.* // hep-ph/0011333.

Поступила в редакцию
29.09.04