$$= \int\limits_{z_1}^{z_2}\int\limits_{D} \frac{\partial j_z}{\partial z}\phi_n dS = \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial z}\left(\int\limits_{D} j_z\phi_n dS\right)dz = \\ = \int\limits_{D} j_z(z)\phi_n dS\Big|_{z_1}^{z_2}.$$

Поскольку $j_z(z)=0$ при $z \geqslant z_2$, то $\bar{Z}_n(z_2)=0$.

В случае если система векторов A_{1n} не только полна, но и является базисом соответствующего пространства, J_{1n} определяется из соотношения

$$J_{1n}(z) = \frac{(J, \mathcal{J}A_{1m})_{L_2}}{(d_2A_{1n}, \mathcal{J}A_{1m})_{L_2}}. \qquad (33)$$

Таким образом, Z_n определяется из уравнения (31) и граничных условий (26). Решение задачи осуществляется при произвольном токе из $(L_2)^3$, удовлетворяющем уравнению непрерывности.

Заключение

Отметим, что для $Z_{1n}, \bar{Z}_n$ и Z_{2n} получаются чрезвычайно простые краевые задачи и основная проблема сводится к численному решению спектральных задач для векторов A_1 и A_2, которым посвящены работы авторов [7, 8].

Проблемы, связанные с обоснованием предложенной методики, будут рассмотрены в последующих работах авторов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 97-01-01081).

Литература

1. *Ohtaka M., Kobaiashi T.* // Trans. Inst. Electron. Inform. Commun. Eng. 1994. **J77-C-I**. P. 679.
2. *Ohtaka M., Kobaiashi T.* // Trans. Inst. Electron. Inform. Commun. Eng. 1989. **J72-C-I**. P. 217.
3. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1995. №2. С. 95 (Moscow University Phys. Bull. 1995. No. 2. P. 85).
4. *Краснушкин П.Е., Моисеев Е.И.* // ДАН. 1982. **264**, №5. С. 1123.
5. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Свешников А.Г.* // ЖВМ и МФ. 1998. №11. С. 9.
6. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1991.
7. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. №1. С. 9 (Moscow University Phys. Bull. 1996. No. 1. P. 7).
8. *Боголюбов А.Н., Делицын А.Л.* // Там же. 1997. №1. С. 69 (Ibid. 1997. No. 1. P. 96).

Поступила в редакцию
24.06.98

УДК 530.145

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ РАЗЛИЧЕНИЯ СОСТОЯНИЙ С ЗАДАННОЙ ЭНЕРГИЕЙ

И. И. Каледин, Ф. Я. Халили

(*кафедра молекулярной физики и физических измерений*)

Рассмотрена проблема различения двух квантовых состояний с заданной энергией. Показано, что в данном случае динамическая жесткость, присущая невозмущающему измерителю энергии, не оказывает влияния на достоверность различения состояний.

Введение

С тех пор как стало возможным получение объектов с существенно квантовым поведением, интерес к проблеме квантовых измерений резко возрос. Разработка надежных каналов связи, исследования в области создания гравитационных антенн, появление работ, посвященных квантовым компьютерам, — все это стимулирует бурное развитие квантовой теории измерений. Все большее число задач требует ее применения. Мы остановимся на приложении одного из следствий этой теории к задаче считывания информации в квантовых компьютерах.

В обычных (классических) компьютерах в качестве ячеек памяти используют объекты с классическим поведением, состоящие из большого числа атомов ($>10^{12}$). Информацию в эти ячейки можно записать, изменяя их макроскопическое состояние. Квантовые компьютеры являются естественным продолжением компьютерной техники в микромир: ячейка памяти для них — какой-либо квантовый объект, а информация — квантовое состояние этого объекта.

Одна из возможных реализаций квантовой ячейки памяти — резонатор, в котором локализовано электромагнитное поле некоторой энергии E. По значению этой энергии мы будем судить о записанной информации. В частности, если энергия поля равна E_1, то в ячейке записан ноль, а если энергия равна E_2, то единица. Мы будем говорить только о процессе считывания информации, оставляя за пределами рассмотрения вопрос о ее записи, т. е. будем считать, что у нас имеется резонатор с электромагнитным полем и априорным распределением, задаваемым формулой

$$w(E) = p_1\,\delta(E-E_1) + p_2\,\delta(E-E_2), \qquad (1)$$

где p_1 и p_2 — вероятности того, что энергия системы равна соответственно E_1 и E_2.

Необходимое условие работы квантового компьютера — это отсутствие поглощения энергии [1]. Поэтому измерение должно быть невозмущающим [2]. Реализованные к настоящему времени схемы невозмущающих измерений электромагнитной энергии основаны на использовании диэлектрической нелинейности [3]. Простой моделью для них может служить пондеромоторный измеритель, подробно описанный в книге [2]. Там рассматривалось поле в резонаторе, одна из стенок которого подвижна (поршень). Поле давит на стенки резонатора с силой F и изменяет (адиабатически) импульс поршня p. Измеряя этот импульс, можно получить энергию системы $\overline{E}$:

$$E(x) = \overline{E}\frac{1}{1+x/d},$$

где d — начальная координата поршня, x — смещение.

Пондеромоторная сила F с учетом того, что в реальных условиях $x/d \ll 1$, равна

$$F = -\frac{dE(x)}{dx} = \frac{\overline{E}}{d}\frac{1}{(1+x/d)^2} \simeq \frac{\overline{E}}{d} - \frac{2\overline{E}}{d^2}x.$$

Отсюда

$$\overline{E} = d\left(\frac{p}{\tau} + kx\right),$$

где $k = 2\overline{E}/d^2$ — динамическая жесткость, τ — время измерения.

Наличие динамической жесткости ограничивает точность измерения $\overline{E}$ в силу соотношения неопределенностей Гейзенберга между импульсом p и смещением x поршня. В принципе, можно ввести некоторую компенсирующую жесткость (например, пондеромоторного происхождения [4])

$$\tilde{k} = 2\tilde{E}/d^2.$$

Тогда

$$\overline{E} = d\left[\frac{p}{\tau} + \left(k - \tilde{k}\right)x\right].$$

Дисперсия σ^2 прибора имеет вид

$$\sigma^2 \equiv \overline{(\Delta E)^2} = \frac{d^2}{\tau^2}\overline{(\Delta p)^2} + \frac{1}{\overline{(\Delta p)^2}}\overline{(\overline{E} - \tilde{E})^2}. \quad (2)$$

В работе [2] рассматривался случай непрерывного априорного распределения, а в качестве $\tilde{E}$ использовалось среднее значение этого распределения. Было показано, что предельная точность для такого выбора $\tilde{E}$ при однократном измерении описывается формулой

$$\Delta E = \sqrt{\frac{2\,\Delta E_{init}\hbar}{\tau}},$$

где ΔE_{init} — априорная неопределенность энергии.

В настоящей работе решена задача об оптимальной стратегии измерения для описанной схемы в случае, когда априорное распределение имеет вид (1).

Оптимальная стратегия измерения

Если ошибка измерения σ не зависит от $\overline{E}$, а для определения энергии системы по показаниям прибора используется критерий максимального правдоподобия, то распределение вероятностей для каждой из двух возможных гипотез будет выглядеть так, как показано на рис. 1, а вероятности ошибок описываются следующими формулами:

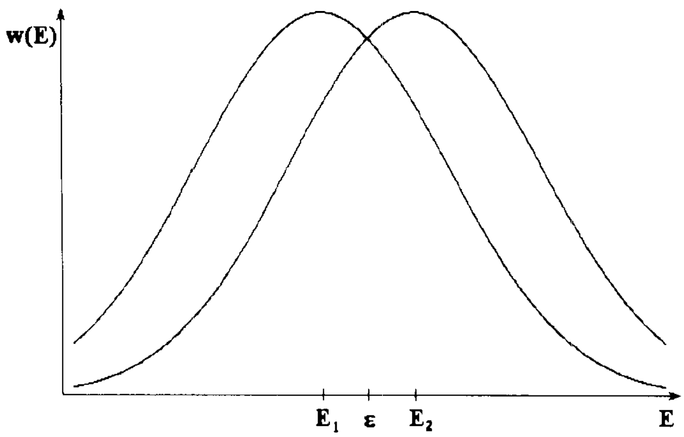

Рис. 1

$$P_{12} = p_2\int\limits_{-\infty}^{\varepsilon} w(E|E_2)\,dE$$

в случае, когда принято первое предположение, а верно было второе, и

$$P_{21} = p_1\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} w(E|E_1)\,dE$$

в противоположном случае. Здесь

$$w\left(E|\overline{E}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{\left(E-\overline{E}\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (3)$$

— аппаратная функция прибора. Величина ε, которая минимизирует суммарную вероятность ошибки $P = P_{12} + P_{21}$, определяется из уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = p_2 w(\varepsilon|E_2) - p_1 w(\varepsilon|E_1) = 0,$$

т. е. является точкой пересечения кривых $p_1 w(E|E_1)$ и $p_2 w(E|E_2)$.

Однако то обстоятельство, что дисперсия σ^2 аппаратной функции (3) зависит от $\overline{E}$ (см. (2)), позволяет качественно уменьшить вероятность ошибки. Мы предлагаем взять в качестве $\tilde{E}$ в формуле (2) либо E_1, либо E_2 (возьмем, к примеру, E_2). Тогда точность измерения не будет ограничиваться эффектом динамической жесткости. Действительно, в этом случае дисперсия аппаратной функции прибора будет определяться выражением

$$\overline{(\Delta E)^2} = \sigma_d^2 + \sigma_r^2,$$

где

$$\sigma_d^2 = \frac{d^2}{\tau^2}\overline{(\Delta p)^2}$$

— дисперсия прибора, не связанная с динамической жесткостью,

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{\overline{(\Delta p)^2}}\overline{(\overline{E} - E_2)^2}$$

— дисперсия прибора, возникающая из-за динамической жесткости.

Из формулы (2) видно, что если $\overline{E} = E_2$, то дисперсия равна $\overline{(\Delta E)^2} = \sigma_d^2$ и не существует фундаментальных законов, запрещающих нам сделать ее такой, что $\sigma_d^2/\sigma_r^2 \ll 1$. В этом случае $P \neq 0$, но $P \ll 1$.

Таким образом, мы имеем прибор, у которого дисперсия аппаратной функции зависит от $\overline{E}$ и в точке E_2 становится много меньше, чем в E_1, т.е. $\sigma_2 \ll \sigma_1$. Здесь

$$\sigma_2^2 = \sigma_d^2; \qquad \sigma_1^2 = \sigma_d^2 + \sigma_r^2.$$

Распределение вероятностей для двух гипотез показано на рис. 2. Отметим, что даже если величина σ не зависит от $\overline{E}$, но $p_1 \neq p_2$, то кривые $p_1 w(E|E_1)$ и $p_2 w(E|E_2)$ имеют две точки пересечения при $E = \varepsilon_1$ и $E = \varepsilon_2$.

Для определения энергии будем пользоваться критерием максимального правдоподобия. В этом случае вероятность ошибки равна

$$P_{12} = \lim_{\alpha \to +0} p_2 \left[\int_{-\infty}^{\varepsilon_1 - \alpha} w(E|E_2)\, dE + \int_{\varepsilon_2 + \alpha}^{\infty} w(E|E_2)\, dE \right] \tag{4}$$

и

$$P_{21} = p_1 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} w(E|E_1)\, dE, \tag{5}$$

где в выражении для P_{12} был введен малый параметр α, чтобы избежать сингулярности в случае, когда дисперсия аппаратной функции прибора определяется только динамической жесткостью, т.е. $\sigma_1 = \sigma_r$, а $\sigma_2 = 0$.

Граничные значения ε_1 и ε_2 являются точками пересечения кривых $p_1 w(E|E_1)$ и $p_2 w(E|E_2)$ и определяются выражениями

$$\varepsilon_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

где

$$a = \sigma_1^2 - \sigma_2^2;$$
$$b = E_2\sigma_1^2 - E_1\sigma_2^2;$$
$$c = E_2^2\sigma_1^2 - E_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_2^2 \ln\left(\frac{p_2\sigma_1}{p_1\sigma_2}\right).$$

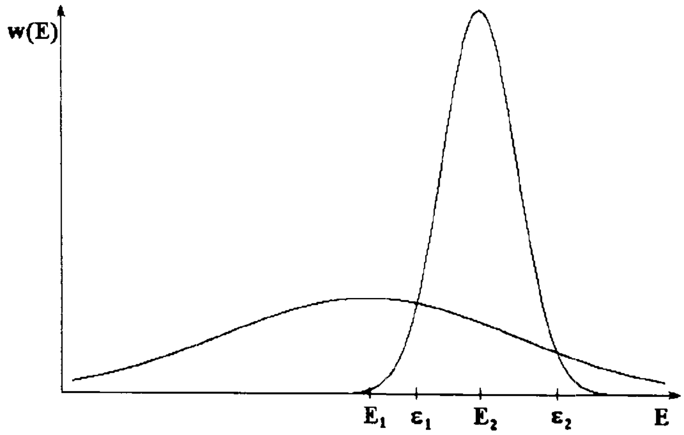

Рис. 2

Учитывая, что $\sigma_2 \ll \sigma_1$, формулы (4), (5) можно аппроксимировать следующими выражениями (вывод см. в приложении):

$$P_{12} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\{-\Delta^2/2\}\, p_1\delta\, \frac{1}{\sqrt{2\ln[p_2/(p_1\delta)] + \Delta^2}}, \tag{6}$$

$$P_{21} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\{-\Delta^2/2\}\, p_1\delta\, \sqrt{2\ln[p_2/(p_1\delta)] + \Delta^2}, \tag{7}$$

где

$$\Delta \equiv \frac{E_2 - E_1}{\sigma_1}, \qquad \delta \equiv \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ll 1.$$

Из (6) и (7) следует, что чем меньше p_1, тем меньше P. Значит, для того чтобы вероятность ошибки при $p_1 \neq p_2$ для обсуждаемого прибора была минимальной, надо для $\tilde{E}$ в формуле (2) выбрать из $\{E_1; E_2\}$ то значение, вероятность которого больше. Другими словами, если $p_2 > p_1$, то $\tilde{E} = E_2$; если же $p_2 < p_1$, то $\tilde{E} = E_1$. Когда $\sigma_1 \ll \sigma_2$, в формулах (6), (7) все σ_1 заменяются на σ_2, p_1 на p_2 и наоборот.

Таким образом, в работе показано, что существует возможность достичь предельной точности различения состояний с заданной энергией. Произведена оценка значения вероятности ошибки в случае, когда точность различения близка к предельной.

Авторы благодарят проф. В. Б. Брагинского за постановку проблемы и внимание к работе.

Приложение

Получим формулы (6), (7), пользуясь тем, что $\sigma_2/\sigma_1 \ll 1$. Рассмотрим вероятность ошибки P_{12} (см. (4)):

$$P_{12} = p_2 \left[\int_{-\infty}^{\varepsilon_1} w(E|E_2)\, dE + \int_{\varepsilon_2}^{\infty} w(E|E_2)\, dE \right] = p_2 \left[\Phi\left(\frac{E_2 - \varepsilon_1}{\sigma_2}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon_2 - E_2}{\sigma_2}\right) \right], \tag{8}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2}\right\} d\xi$$

— интеграл ошибок. В нашем случае аргумент функции $\Phi(x)$ стремится к бесконечности:

$$\lim_{\sigma_2\to 0} \frac{E_2 - \varepsilon_1}{\sigma_2} = \lim_{\sigma_2\to 0} \frac{\varepsilon_2 - E_2}{\sigma_2} \longrightarrow \infty.$$

Интеграл ошибок $\Phi(x)$ при $x \to \infty$ можно аппроксимировать выражением

$$\Phi(x) \simeq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

Учитывая это и вводя обозначения

$$\Delta \equiv \frac{E_2 - E_1}{\sigma_1}, \qquad \delta \equiv \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ll 1,$$

из (8) получим

$$P_{12} = p_2 \left[\Phi\left(\frac{-\Delta\delta + \sqrt{\Delta^2 + 2\ln[p_2/(p_1\delta)]\,(1-\delta^2)}}{1-\delta^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \Phi\left(\frac{\Delta\delta + \sqrt{\Delta^2 + 2\ln[p_2/(p_1\delta)]\,(1-\delta^2)}}{1-\delta^2}\right)\right] \simeq$$
$$\simeq 2p_2\Phi\left(\sqrt{\Delta^2 + 2\ln[p_2/(p_1\delta)]}\right) \simeq$$
$$\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{-\frac{\Delta^2}{2}\right\} p_1\delta \frac{1}{\sqrt{2\ln[p_2/(p_1\delta)] + \Delta^2}}. \qquad (9)$$

Формулу (5) для вероятности ошибки P_{21} тоже можно упростить. Так как $\sigma_2 \ll \sigma_1$, то функция $p_1 w(E|E_1)$ в промежутке от ε_1 до ε_2 меняется слабо, поэтому можно записать

$$P_{21} = p_1 \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} w(E|E_1)\, dE \simeq$$
$$\simeq \frac{p_1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(E_2 - E_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) =$$
$$= \frac{p_1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\Delta^2}{2}\right\} \frac{2\sigma_1\delta}{1-\delta^2} \sqrt{\Delta^2 + 2(1-\delta^2)\ln[p_2/(p_1\delta)]} \simeq$$
$$\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left\{-\frac{\Delta^2}{2}\right\} p_1\delta \sqrt{2\ln[p_2/(p_1\delta)] + \Delta^2}. \qquad (10)$$

Видно, что формулы (9) и (10) совпадают с формулами (6) и (7).

Литература

1. *Haroche S., Raimond J.-M.* // Phys. Today. 1996. **51**. P. 51.
2. *Braginsky V.B., Khalili F.Ya.* Quantum Mesurement / Ed. K. S. Thorne. Cambridge University Press, 1992.
3. *Braginsky V.B., Khalili F.Ya.* // Rev. Mod. Phys. 1996. **68**, No. 1. P. 1.
4. *Брагинский В.Б.* Физические эксперименты с пробными телами. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию
24.06.98

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛНОГО СЕЧЕНИЯ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ ИОНА НА АТОМЕ В ЭЙКОНАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В. А. Билык*), В. Л. Шаблов*), Ю. В. Попов

(*НИИЯФ*)

Предложен вариант расчета полных сечений ион-атомных столкновений с помощью оптической теоремы. Трудности, возникающие при проведении подобных расчетов в эйкональном приближении, связанные с бесконечностью амплитуды упругого рассеяния на нулевой угол, устранены путем явного учета многочастичного характера процесса столкновения.

Как известно, эйкональное приближение в традиционной форме [1] может быть применено для расчета амплитуд упругого рассеяния и мягко неупругих процессов, когда составляющей переданного импульса, параллельной импульсу налетающей частицы, можно пренебречь. Однако в случае столкновения заряженного фрагмента с нейтральным атомом амплитуда упругого рассеяния, полученная в рамках эйконального приближения, не может использоваться для расчета полного сечения на основе оптической теоремы, поскольку эйкональная упругая амплитуда рассеяния на нулевой угол в этом случае бесконечна [2].

Указанную трудность можно преодолеть, используя модификацию эйконального приближения, в которой явно учитывается многочастичный характер столкновения. Обозначая канал рассеяния, отвечающий рассеянию быстрой частицы на связанной системе α, тем же индексом, запишем для волновой функции рассеяния $|\Psi_\alpha^+(\mathbf{k}_\alpha)\rangle$ уравнение Липпмана–Швингера:

$$|\Psi_\alpha^+(\mathbf{k}_\alpha)\rangle = |\Phi_\alpha \mathbf{k}_\alpha\rangle + \hat{G}_\alpha(E_\alpha + i0)V^\alpha|\Psi_\alpha^+(\mathbf{k}_\alpha)\rangle, \quad (1)$$

*) Обнинский институт атомной энергетики, г. Обнинск.