15. *Tashaev Yu.A., Dmitriev I.S., Nikolaev V.S., Teplova Ya.A.* // J. Phys. B. 1978. **11**. P. L223.
16. *Веников Н.И., Дмитриев И.С., Ярош В.Е.* Препринт Ин-та ат. энергии. 1979. №3214.
17. *Gillespie G.H.* // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. 1980. **176**. P. 611.
18. *Franzke D.* // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1981. **28**. P. 2116.
19. *Alonso J., Gould H.* // Phys. Rev. 1982. **A26**. P. 1134.
20. *Дмитриев И.С., Пикин А.И.* Препринт ОИЯИ. 1986. Р9-86-113.
21. *Lotz W.* // J. Opt. Soc. Am. 1968. **58**. P. 915.
22. *Bowan S.A., Bernstain E.M., Tanis A.* // Phys. Rev. 1989. **A39**. P. 4423.
23. *Hippler R., Datz S., Muller P.D.* et al. // Phys. Rev. 1987. **A35**. P. 585.
24. *Дмитриев И.С., Николаев В.С., Фатеева Л.Н., Теплова Я.А.* // ЖЭТФ. 1962. **42**. С. 16.
25. *Дмитриев И.С., Николаев В.С., Ташаев Ю.А., Теплова Я.А.* // ЖЭТФ. 1974. **67**. С. 2047.
26. *Knudsen H.* // Phys. Scripta. 1982. **26**. P. 132.
27. *Macdonald J.B., Martin F.W.* // Phys. Rev. 1971. **A4**. P. 1965.
28. *Houck J.H., Závodszky P.A., Tanis J.A.* // Phys. Rev. 1997. **A56**. P. 1954.
29. *Ильин В.Д., Ильин И.В., Кузнецов С.Н.* // Космич. исследования. 1993. **3**, №6. С. 115.

Поступила в редакцию
16.03.98

РАДИОФИЗИКА

УДК 519.246,524

ОБНАРУЖЕНИЕ НЕКОГЕРЕНТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ «ГРАВИТАЦИОННЫХ» ИМПУЛЬСОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ШУМА

А. В. Гусев, В. Н. Руденко

(*ГАИШ*)

Обсуждается проблема выбора порогового уровня в обнаружителе некогерентной последовательности «гравитационных» импульсов при неизвестном распределении шума без выдвижения гипотезы о виде этой функции.

1. Создание комплексной системы обработки информации, а также применение основных принципов оптимального комплексирования измерителей, основанных на различных физических принципах, несомненно, актульны для современного гравитационно-волнового эксперимента [1]. Так, например, разработанные алгоритмы обнаружения некогерентной последовательности «гравитационных» импульсов [2, 3] (под «гравитационными» событиями подразумевается аномальное поведение выходного сигнала гравитационной антенны) основаны на использовании дополнительной астрофизической информации.

Для преодоления априорных ограничений, обусловленных тем, что статистические характеристики шума на выходе некогерентного накопителя «гравитационных» импульсов могут отличаться от ожидаемых, в работах [2, 3] предлагается специальная методика, основанная на применении обобщенных кривых Пирсона для аппроксимации неизвестной плотности вероятности. Тип распределения определяется выборочными коэффициентами асимметрии и эксцесса. Несмотря на то что кривые Пирсона «охватывают» многие наиболее часто встречающиеся на практике типы распределений, применение подобной методики носит, безусловно, эврístический характер.

Другой путь преодоления априорных ограничений состоит в непосредственном построении неизвестной функции распределения по выборочным данным без выдвижения гипотезы о виде этой функции. Подобный подход был, например, использован при поиске «гравитационно-нейтринной» корреляции в момент вспышки сверхновой СН 1987А [4]. Однако статистические характеристики выборочной функции распределения не были исследованы. В частности, заявленная достоверность эффекта на уровне вероятности ложной тревоги $\alpha \approx 10^{-6}$ скорее всего свидетельствует, по мнению авторов работы [5], о неправильно выбранном числе степеней свободы при статистическом анализе экспериментальных данных.

Цель работы состояла в оценке дисперсии выборочной функции распределения шума на выходе некогерентного накопителя «гравитационных» импульсов.

2. Выходной сигнал Z некогерентного накопителя последовательности «гравитационных» импульсов с неизвестными, но не случайными амплитудами можно представить в виде [2, 3]

$$Z(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \eta(\xi_k + \tau), \qquad (1)$$

где $\{\xi_k\}$ — моменты возникновения астрофизических событий, выбранных в качестве соответствующего временного репера, N — число подобных событий на интервале наблюдения $(0, T)$, τ — неизвестный сдвиг между «гравитационными» и «негравитационными» событиями,

$$\eta(\xi_i + \tau) = \ln I_0\left(\frac{R_i \hat{A}_i}{\sigma^2}\right) - \frac{\hat{A}_i^2}{2\sigma^2}. \qquad (2)$$

В выражении (2) $I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя m-го порядка, $R_i = R(\xi_i + \tau + \Delta t)$, $R(t)$ — огибающая узкополосного процесса на выходе оптимального фильтра, согласованного с отдельным «гравитационным» импульсом, σ^2 — дисперсия шума на выходе этого фильтра, Δt — задержка, вносимая оптимальным фильтром, $\hat{A}_i = \hat{A}(R_i)$, $\hat{A}(R)$ — максимально правдоподобная оценка неизвестной амплитуды моноимпульсного сигнала со случайной начальной фазой [6]:

$$\hat{A}(R) = R\frac{I_1\left[R\hat{A}(R)/\sigma^2\right]}{I_0\left[R\hat{A}(R)/\sigma^2\right]}.$$

Пусть λ — случайная величина, принимающая на интервале наблюдения $(0, T)$ два возможных значения: $\lambda = 1$ при наличии «гравитационных» импульсов и $\lambda = 0$ при их отсутствии. Тогда шумы на выходе адаптивного обнаружителя «гравитационных» импульсов при нулевой гипотезе можно представить в виде

$$Z_0(\tau) = Z(\tau \mid \lambda = 0) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_0(\xi_k + \tau), \quad (3)$$

где $\eta_0(\tau) = \eta(\tau \mid \lambda = 0)$.

При дальнейшем анализе будем предполагать, что возможные значения неизвестного параметра τ ограничены априорным диапазоном $(-\tau_p, \tau_p)$. Так как параметр τ является неэнергетическим, то случайный процесс $Z_0(\tau)$, определенный выражением (3), оказывается стационарным [6]. Интегральная функция распределения этого процесса

$$F_1(x, \tau) = P\{Z_0(\tau) \leqslant x\} = F_1(x)$$

не зависит от величины τ. Поэтому интегральная функция распределения случайной величины

$$Z_0(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_0(\xi_k) \quad (4)$$

и одномерная функция распределения случайного стационарного процесса $Z_0(\tau)$, заданного на априорном интервале $(-\tau_p, \tau_p)$, совпадают.

Из выражения (4) следует, что интегральная функция распределения случайной величины $Z_0(0)$ определяется типом распределения случайных отсчетов $\{\xi_k\}$. При дальнейшем анализе будем предполагать, что последовательность случайных величин $\{\xi_k\}$ можно рассматривать как стационарный на интервале наблюдения $(0, T)$ пуассоновский поток событий [7]. Тогда случайные величины $Z_0(0)$ и

$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_0(\varepsilon_{ki}) \quad (5)$$

статистически эквивалентны, если случайные величины $\{\varepsilon_{ki}\}$ в формуле (5) взаимно независимы и равномерно распределены на интервале $(0, T)$ (статистическая эквивалентность случайных величин $Z_0(\tau)$ и C_k, $k = \overline{1, N}$, означает, что эти случайные величины имеют одну и ту же функцию распределения $F_1(x)$).

3. Пусть

$$\hat{F}_1(x|\, n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad (6)$$

— выборочная функция распределения [8], где $u_k(x) = U(x - C_k)$, $U(x)$ — единичная функция:

$$U(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0 \\ 0, & \text{если} \quad x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Выборочная функция распределения (6) является несмещенной оценкой неизвестной функции распределения $F_1(x)$,

$$\left\langle \hat{F}_1(x|\, n)\right\rangle = F_1(x) \quad (7)$$

для произвольных значений параметра n (угловые скобки — символ статистического усреднения). В монографии [8] для оценки дисперсии выборочной функции распределения предлагается использовать следующую формулу:

$$\begin{aligned} D\left\{\hat{F}_1(x|\, n)\right\} &= \left\langle \hat{F}_1^2(x|\, n)\right\rangle - \left\langle \hat{F}_1(x|\, n)\right\rangle^2 = \\ &= \frac{1}{\tilde{n}}F_1(x)\left[1 - F_1(x)\right], \end{aligned} \quad (8)$$

где $\tilde{n}$ — число «независимых» отсчетов в последовательности $\{C_k\}$, $k = \overline{1, n}$, $\tilde{n} = n/c^2$. Конкретных алгоритмов оценки постоянной c в этой монографии не приводится.

Для приближенной оценки постоянной c в формуле (8) можно воспользоваться следующей методикой. Пусть

$$\hat{C} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} C_k \quad (9)$$

— выборочное среднее значение. Случайная величина $\hat{C}$ (9) является несмещенной оценкой неизвестного среднего значения случайных величин C_k, полученной по исходной выборке $\{C_k\}$, $k = \overline{1, n}$: $\left\langle \hat{C}|\, n\right\rangle = \langle C_k\rangle$, а ее дисперсия определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} D\left\{\hat{C}|\, n\right\} &= \left\langle \hat{C}^2|\, n\right\rangle - \left\langle \hat{C}|\, n\right\rangle^2 = \\ &= \frac{1}{n}D\{C_k\}\left[1 + (n-1)\rho_C\right], \end{aligned} \quad (10)$$

где $D\{C_k\}$ — дисперсия случайных величин C_k, ρ_C — коэффициент взаимной корреляции между случайными величинами C_k и C_i при $k \neq i$ (см. приложение):

$$\rho_C = \frac{\langle C_k C_i | \, k \neq i \rangle - \langle C_k \rangle^2}{\mu_2 \{C_k\}} = \\ = \frac{N\,(2\Delta t\,/\,T)}{[1 + (N-1)\,(2\Delta t\,/\,T)]} \approx N\frac{2\Delta t}{T} \ll 1. \tag{11}$$

Дисперсия выборочного среднего значения при $\tilde{n}$ «независимых» отсчетах равна

$$D\left\{\hat{C} \,|\, \tilde{n}\right\} = \frac{1}{\tilde{n}} D\{C_k\}. \tag{12}$$

Из анализа формул (10) и (12) находим приближенную оценку неизвестного параметра c:

$$c = c\,(n,\, \rho_C) = \sqrt{1 + (n-1)\,\rho_C}. \tag{13}$$

При этом число «независимых» элементов в исходной последовательности определяется следующей формулой:

$$\tilde{n} = \frac{n}{1 + (n-1)\,\rho_C} \leqslant \frac{1}{\rho_C} \approx \frac{T}{2N\Delta t}. \tag{14}$$

4. Так как формулы (8) и (14) получены на основе полуфеноменологических (эвристических) представлений, возникает необходимость более строгого расчета величины дисперсии выборочной функции распределения $\hat{F}_1\,(x\,|\,n)$ при коррелированных отсчетах C_k.

Из основной формулы (9) находим дисперсию выборочной функции распределения в самом общем случае:

$$D\left\{\hat{F}_1\,(x\,|\,n)\right\} = \left\langle \hat{F}_1^2\,(x\,|\,n)\right\rangle - \left\langle \hat{F}_1\,(x\,|\,n)\right\rangle^2 = \\ = \frac{1}{\overline{n}} F_1\,(x)\,[1 - F_1\,(x)]\,. \tag{15}$$

Здесь

$$\overline{n} = \overline{n}\,(n,\, x) = \frac{n}{1 + (n-1)\; r\,(x)}, \tag{16}$$

где $r\,(x)$ — коэффициент взаимной корреляции между случайными величинами $u_k\,(x)$ и $u_i\,(x)$ при $k \neq i$:

$$r\,(x) = \frac{\langle u_k\,(x)\,u_i\,(x)\,|k \neq i\rangle - \langle u_k\,(x)\rangle^2}{\left\langle [u_k\,(x) - \langle u_k\,(x)\rangle]^2\right\rangle}.$$

Так как коэффициенты взаимной корреляции между случайными величинами $(C_k,\, C_i)$ и $(u_k\,(x)\,,\, u_i\,(x))$, вообще говоря, не совпадают, то оценка дисперсии выборочной функции распределения по упрощенной формуле (8) оказывается приемлемой только для таких пороговых уровней x, для которых $r\,(x) \approx \rho_C$ и, следовательно, $\tilde{n} \approx \overline{n}\,(x)$.

При вычислении коэффициента взаимной корреляции $r\,(x)$ возникает необходимость использовать двумерную плотность вероятности $W_2\,(C_k,\, C_i\,|\, k \neq i)$ зависимых случайных величин C_k и C_i. Это делает невозможной оценку дисперсии выборочной функции распределения только по имеющимся экспериментальным данным без привлечения дополнительной априорной информации. Но использование дополнительных априорных сведений о предполагаемом типе распределения случайных величин C_k, $k = \overline{1,\, n}$, уменьшает кажущееся преимущество статистического анализа, основанного на применении выборочной функции распределения без выдвижения гипотезы о виде этой функции.

В гауссовском приближении, которое широко используется при анализе статистических характеристик накопителей импульсных сигналов [9], для расчета коэффициента взаимной корреляции $r\,(x)$ можно воспользоваться известными результатами, относящимися к воздействию стационарных гауссовских шумов на идеальный ограничитель [10]. Тогда получим

$$r\,(x) \approx \frac{1}{\Phi\,(x_0/\sigma)\,[1 - \Phi\,(x_0/\sigma)]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho_C^m}{m!} \left[\Phi^{(m)}\,(x_0/\sigma)\right]^2,$$

где $\Phi\,(x)$ — интеграл вероятности, $x_0 = x - \langle C_k \rangle$,

$$\Phi^{(m)}\,(x) = \frac{d^m \Phi\,(x)}{dx^m},$$

$\sigma^2 = D\{C_k\}$ — дисперсия случайных величин C_k (см. приложение). Так как коэффициент взаимной корреляции ρ_C (11) между случайными величинами C_k и C_i достаточно мал, то в линейном приближении по этому параметру получим

$$r\,(x) \approx f\,(x_0/\sigma)\,\rho_C.$$

Здесь

$$f\,(x) = \frac{1}{\Phi\,(x)\,[1 - \Phi\,(x)]} \left[\Phi^{(1)}\,(x)\right]^2 \approx x\Phi^{(1)}\,(x) \tag{17}$$

при $x \gg 1$.

Значения функции $f\,(x)$ (17) для некоторых значений аргумента x приведены в таблице.

x	$1,0$	$1,5$	$2,0$	$2,5$	$3,0$
$f\,(x)$	$0,439$	$0,269$	$0,131$	$0,0498$	$0,015$

Как и следовало ожидать [10], при высоком пороге ($x_0 \gg \sigma$) коэффициент $r\,(x)$ взаимной корреляции между случайными величинами $u_k\,(x)$ и $u_i\,(x)$ $(k \neq i)$ резко уменьшается по сравнению с коэффициентом взаимной корреляции ρ_C между случайными величинами C_k и C_i. Но уменьшение коэффициента взаимной корреляции $r\,(x) = r\,(x_0/\sigma)$ приводит к увеличению параметра $\overline{n}\,(n,\, x)$ и, следовательно, дополнительному уменьшению дисперсии $D\{\hat{F}_1\,(x\,|\,n)\}$ выборочной функции распределения по сравнению с упрощенной формулой (10), параметр

$\tilde{n}(n, \rho_C)$ в которой не зависит от величины порогового уровня x.

Несмотря на то что гауссовское приближение может оказаться слишком «грубым» для аппроксимации неизвестной функции распределения $F_1(x)$ именно для больших значений аргумента [2, 3], качественная зависимость дополнительного уменьшения дисперсии выборочной функции распределения от величины порога должна сохраниться. Действительно, уменьшение коэффициента взаимной корреляции между случайными величинами $u_k(x)$ и $u_i(x)$ при большом значении аргумента x и фиксированном объеме выборки n связано с расширением спектральной плотности стационарных шумов при нелинейных безынерционных преобразованиях [10].

Как следует из формулы (15), при конечной величине выборки $\{C_k\}$, $k = \overline{1, n}$, для достаточно больших порогов (формально при $x \to \infty$) $\overline{n}(n, x) \approx n$ даже при коррелированных элементах выборки. Этот результат показывает, что оценка [5] $(T/\Delta t)$ числа «независимых» отсчетов при статистическом анализе достоверности эффекта «гравитационно-нейтринной» корреляции [4] в момент вспышки сверхновой СН 1987А просто не имеет отношения к дисперсии оценки функции распределения при заявленном уровне вероятности ложной тревоги $\alpha = \hat{F}_1(x) \approx 10^{-6}$ (более того, сама эта оценка в N раз превышает реальное число $\tilde{n}(n, \rho_C)$ «независимых» отсчетов в исходной последовательности).

В заключение отметим, что пороговый уровень x_α при обнаружении некогерентной последовательности «гравитационных» импульсов с неизвестными моментами появления отдельных импульсов определяется функцией распределения $F_{1m}(x)$ абсолютного максимума стационарного случайного процесса $Z_0(\tau)$

$$P\left\{\max_{\tau} Z_0(\tau) \leqslant x_\alpha\right\} = F_{1m}(x_\alpha) = 1 - \alpha,$$
$$\tau \subseteq (-\tau_p, \tau_p),$$

где $(-\tau_p, \tau_p)$ — априорный интервал возможных значений неизвестного параметра τ. Если воспользоваться приближенной оценкой функции распределения абсолютного максимума [11]:

$$F_{1m}(x) \approx F_1^{L+1}(x), \quad L \approx 2\tau_p/\Delta t,$$

то дисперсия выборочной функции распределения $\hat{F}_{1m}(x)$ наибольших значений случайного процесса $Z_0(\tau)$ на интервале $(-\tau_p, \tau_p)$ оказывается в $(L+1)^2$ раз выше, чем дисперсия оценки одномерной функции распределения $F_1(x)$.

Приложение

Расчет коэффициента взаимной корреляции $\rho_{ik} = \rho_C$

При $i \neq k$ из формулы (5), принимая во внимание, что функция распределения случайных величин ε_{kl} и ε_{im} не зависит от индексов k и i, находим

$$\langle C_k C_i | i \neq k\rangle - \langle C_k\rangle^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\langle\tilde{\eta}(\varepsilon_{kl})\tilde{\eta}(\varepsilon_{im})\rangle = \\ = \langle K_\eta(\varepsilon_{ki} - \varepsilon_{im}) \, | i \neq k\rangle,$$

где $K_\eta(\tau')$ — функция корреляции центрированного стационарного случайного процесса $\tilde{\eta}_0(\tau) = \eta_0(\tau) - \langle\eta_0(\tau)\rangle$:

$$K_\eta(\tau') = \langle\tilde{\eta}_0(\tau)\tilde{\eta}_0(\tau + \tau')\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\omega)\exp\{j\omega\tau'\}\,d\omega,$$

$S_\eta(\omega) \leftrightarrow K_\eta(\tau')$ — соответствующая спектральная плотность.

Так как независимые случайные величины ε_{kl} и ε_{im} равномерно распределены на интервале наблюдения $(0, T)$, получим

$$\langle K_\eta(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{im})\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty S_\eta(\omega)\,\mathrm{sinc}^2(\omega T/2)\,d\omega.$$

Для приближенного вычисления этого интеграла воспользуемся стандартным определением [10] времени корреляции τ_η стационарного случайного процесса $\tilde{\eta}_0(t)$:

$$\tau_\eta = \frac{1}{K_\eta(0)}\int_0^\infty K_\eta(\tau')\,d\tau' = \frac{S_\eta(0)}{2K_\eta(0)} \leqslant \Delta t.$$

Тогда, предполагая, что $\Delta t \ll T$ и принимая во внимание фильтрующие свойства функции $\mathrm{sinc}\, x = \sin x/x$, получаем

$$\langle C_k C_i \,|\, i \neq k\rangle - \langle C_k\rangle^2 \approx K_\eta(0)\,\frac{2\Delta t}{T}.$$

Аналогично определяется дисперсия $D\{C_k\}$ случайных величин $\{C_k\}$, $k = \overline{1, n}$:

$$D\{C_k\} = \frac{1}{N^2}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\langle\tilde{\eta}_0(\varepsilon_{kl})\tilde{\eta}_0(\varepsilon_{km})\rangle = \\ = \frac{1}{N^2}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\langle K_\eta(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{km})\rangle.$$

Выделяя в этом выражении члены с одинаковыми индексами $l = m$, приходим к следующему результату:

$$D\{C_k\} = \frac{1}{N}\left[K_\eta(0) + (N-1)\langle K_\eta(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{km} \,|\, l \neq m)\rangle\right] \approx \\ \approx \frac{1}{N}K_\eta(0)\left[1 + (N-1)\frac{2\Delta t}{T}\right].$$

Поэтому коэффициент взаимной корреляции $\rho_{ik} = \rho_C$ между случайными величинами C_k и C_i $(k \neq i)$ определяется выражением

$$\rho_C = \frac{1}{D\{C_k\}}\left[\langle C_k C_i \,|\, k \neq i\rangle - \langle C_k\rangle^2\right] \approx \frac{N(2\Delta t/T)}{[1 + N(2\Delta t/T)]}.$$

Литература

1. *Бичак И., Руденко В.Н.* Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. М., 1989.
2. *Виноградов М.П., Гусев А.В., Милюков В.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 5. С. 37 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 5. P. 44).
3. *Виноградов М.П., Гусев А.В., Милюков В.К.* // Там же. № 6. С. 33 (Ibid. No. 6. P. 41).

4. *Amaldi E., Cosmelli C., Frasca S.* et al. // Nuovo Cimento. 1989. **C12**, No. 1. P. 75.
5. *Dickson C. A., Schutz B. F.* // Phys. Rev. 1994. **D6**, No. 51. P. 2644.
6. *Тихонов В.И.* Оптимальный прием. М., 1983.
7. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М., 1982.
8. *Бендат Д., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. М., 1989.
9. *Лезин Ю.С.* Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. М., 1972.
10. *Левин Б.Р.* Статистическая радиотехника. М., 1994.
11. *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. М., 1970.

Поступила в редакцию
06.03.98

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 621.378.001

НЕЛИНЕЙНАЯ СТОЛКНОВИТЕЛЬНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ДВУХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ В ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ

Б. А. Гришанин

(*кафедра общей физики и волновых процессов*)

На основе квантового аналога уравнения Больцмана рассматривается задача расчета возбуждения двухуровневых атомов в газовой фазе с учетом их резонансного диполь-дипольного столкновительного уширения. Анализируется зависимость параметров релаксационной матрицы от параметров лазерного поля, обусловленная зависимостью от поля состояния сталкивающихся активных атомов.

Введение

Столкновения идентичных атомов приводят к резонансному обмену квантами между ними и как следствие — к существенному уширению атомных линий. Физическая природа уширения данного типа — резонансного столкновительного уширения (РСУ) — впервые адекватно описана в работе [1]. Однако его роль в распространении сильного лазерного поля до сих пор детально не исследована, во всяком случае теория РСУ далека от той степени детализации, до которой доведена теория столкновительного уширения, обусловленного буферным газом [2–4]. В то же время РСУ требует точного описания его механизма для понимания физики распространения лазерного излучения в плотных резонансных газовых средах, которое проявляет свойства, качественно отличные от случая разреженных сред [5]. С методической точки зрения РСУ выделяется среди остальных типов уширения — естественного радиационного, доплеровского и упругого столкновительного. В отличие от перечисленных уширений РСУ является принципиально нелинейным, поскольку результат столкновения зависит от состояния как рассматриваемого, так и окружающих атомов, определяемого лазерным полем. Нелинейность же нерезонансного уширения, обусловленного столкновениями с атомами буферного газа, проявляется лишь в достаточно сильных насыщающих полях [4], приводящих к преобразованию релаксации под действием осцилляций Раби.

В настоящей работе рассматривается система двухуровневых атомов, взаимодействующих с падающим лазерным излучением. Учитываются как процессы взаимодействия атомов с полем вакуума, т.е. естественное радиационное затухание, так и взаимодействие между атомами при столкновениях с учетом зависимости их состояния от поля. В этих условиях возникающая при описании распространения лазерного поля в среде квантовая задача расчета состояния атомов не может быть сведена к стандартному уравнению Блоха или Фоккера–Планка с наперед заданным релаксационным оператором, поскольку последний зависит от состояния других атомов. Таким образом, эта задача связана с более общей нелинейной квантовой проблемой, которая при естественном ее упрощении путем использования приближения парных столкновений является прямым аналогом уравнения Больцмана в статистической физике [6, 7].

1. Вывод уравнения Больцмана для газа двухуровневых атомов

Гамильтониан резонансного диполь-дипольного взаимодействия для двух атомов имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_{\rm d} = f_{12}(\hat{\sigma}_1^+\hat{\sigma}_2^- + \hat{\sigma}_1^-\hat{\sigma}_2^+), \tag{1}$$

где $\hat{\sigma}_k^{\pm}$ — операторы внутриатомных переходов $1 \to 2$ и $2 \to 1$ в k-м атоме $(k = 1, 2)$, а $f_{12} = [3(\mathbf{d}_1\mathbf{n})(\mathbf{d}_2\mathbf{n}) - (\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2)]/R_{12}^3$ — потенциал взаимодействия, где $\mathbf{d}_k$ — матричные элементы перехода в k-м атоме, R_{12} — межатомное расстояние, а $\mathbf{n} = \mathbf{R}_{12}/R_{12}$ — единичный вектор в направлении от атома 1 к атому 2. Взаимодействие (1) связано с обменом квантами возбуждения, который, подобно обмену квантами с электромагнитным полем вакуума, приводит к неупругой релаксации атома, зависящей как от концентрации атомов, так и от их состояния, определяемого полем излучения в среде.

Рассмотрим процесс случайного столкновения атомов, при котором атомы можно считать движущимися равномерно и прямолинейно по закону