5. *Николаевский В.Н.* Геодинамика и флюидодинамика. М.: Недра, 1986.
6. *Рыкунов Л.Н.* // Актуальные проблемы геодинамики / Под ред. А.Г. Масевич. М.: Наука, 1991. С. 30.
7. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981.
8. *Арсеньев С.А.* // ДАН. 1994. **334**, № 5. С. 112.
9. *Арсеньев С.А., Живогина О.А., Шелковников Н.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 2. С. 52 (Moscow University Phys. Bull. 1999, No. 2. P. 68).
10. *Арсеньев С.А., Живогина О.А., Селиверстов С.В., Шелковников Н.К.* // Атомная энергия. 1998. **85**, № 1. С. 69.
11. *Арсеньев С.А., Селиверстов С.В., Шелковников Н.К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 6. С. 57.
12. *Иванов В.В.* // УФН. 1991. **161**, № 3. С. 31.
13. *Иванов В.В.* // Физика Земли. 1995. № 11. С. 3.
14. *Фольсон Р.* // Основы предсказания ветровых волн, зыби и прибоя / Под ред. В.Б. Штокмана. М.: ИЛ, 1951. С. 325.
15. *Дыхан Б.Л., Жак В.М., Куликов Е.А.* и др. // ДАН. 1981. **257**, № 5. С. 1088.

Поступила в редакцию
03.09.99

УДК 537.86:519.2; 537.876.23:551.510; 550.3

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЭРГОДИЧНОСТИ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ МЕЖДУ ИОНОСФЕРОЙ И ЗЕМЛЕЙ

А. Г. Вологдин, В. Д. Гусев

(*кафедра физики атмосферы*)

Рассмотрен новый подход к решению проблемы пространственной эргодичности случайных полей относительно математического ожидания при распространении волн в свободном пространстве между ионосферой и Землей. Доказана возможность замены операции усреднения по объему усреднением вдоль горизонтальной прямой линии произвольного направления. Полученные результаты могут быть использованы при анализе распространения волн различной природы в геофизических средах.

Исследование проблем пространственной эргодичности в случайно-неоднородных средах показало, что усреднение по объему можно заменить усреднением вдоль произвольной прямой линии [1, 2]. Возникает вопрос о возможности такой замены для волн, выходящих из случайно-неоднородной ионосферы и распространяющихся далее в свободном пространстве до Земли. Заметим, что аналогичная постановка вопроса возможна и при зондировании других природных сред как электромагнитными, так и акустическими волнами.

В настоящей работе предлагается новый подход к пространственной эргодичности в свободном пространстве для волн, выходящих из случайно-неоднородной среды. Рассмотрена возможность замены операции усреднения по объему усреднением вдоль прямой линии. Такая замена позволяет снизить уровень сложности проблем пространственной эргодичности до уровня временной эргодичности и тем самым принципиально изменить подход к анализу пространственных экспериментальных данных, стимулируя их получение.

Выразим поле на поверхности Земли через поле на выходе из ионосферы дифракционным интегралом Кирхгофа. При этом будем исходить из формулы Грина, связывающей комплексную амплитуду поля $U(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}=(x,y,z)$ внутри области, ограниченной поверхностью S, с амплитудой на границе u:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS. \qquad (1)$$

Здесь G — функция Грина, а символ $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали $\mathbf{n}$ к S.

Введем прямоугольную систему координат с началом, расположенным на выходе из ионосферы, и осью z, направленной вертикально вниз. В нашей задаче поверхностью S является плоскость, разделяющая ионосферу и свободное пространство, замкнутая полусферой бесконечно большого радиуса. Если задать на плоскости $z=0$ само поле $u(x,y)\equiv u(x,y,z=0)$ и взять функцию Грина в виде [3]

$$G = \frac{\exp(ikR)}{R} - \frac{\exp(ikR_1)}{R_1},$$

где $R = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$, $R_1 = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}$, то остается интегрирование только по плоскости $z=0$, и, кроме того, формула (1) становится одночленной. Таким образом, имеем в полупространстве $z\geqslant 0$

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\exp(ikR)}{R}\bigg|_{\zeta=0} d\xi d\eta. \qquad (2)$$

Ограничиваясь пространственной эргодичностью, утверждают, что для статистически-однородных и пространственно-эргодических случайных полей средние по ансамблю реализаций «совпадают» в смысле сходимости по вероятности (или в среднем квадратичном) со средними по пространству.

Вместо традиционной предложим другую гипотезу эргодичности относительно математического ожидания, согласно которой интегрирование ведется вдоль произвольной горизонтальной прямой линии (для определенности берем ось x):

$$\langle U(x,y,z)\rangle = \overline{U(x,y,z)}_{L\to\infty} \equiv \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int\limits_0^L U(x,y,z)\,dx. \tag{3}$$

Отметим, что такое усреднение наиболее удобно для обработки экспериментальных данных.

Обратимся к конечному интервалу $(0,L)$, где оценка вдоль оси x

$$\overline{U(x,y,z)}_L = \overline{U}_L \equiv \frac{1}{L}\int\limits_0^L U(x,y,z)\,dx \tag{4}$$

— случайная величина. Для определения несмещенности и состоятельности оценки вычислим ее математическое ожидание и дисперсию.

Для математического ожидания оценки получим

$$\left\langle \overline{U}_L\right\rangle = \frac{1}{L}\int\limits_0^L \langle U(x,y,z)\rangle\,dx =$$

$$= \frac{1}{L}\int\limits_0^L dx\int\limits_{-\infty}^{\infty} U(x,y,z)W_1(U)\,dU = \langle U(x,y,z)\rangle,$$

где $W_1(U)$ — одномерная плотность вероятности. Этот результат позволяет сделать утверждение о несмещенности оценки $\overline{U}_L$.

В предположении пространственной статистической однородности случайного поля (2) для дисперсии оценки (4) получим (звездочка — знак комплексного сопряжения)

$$\sigma^2 = \left\langle \frac{1}{L^2}\int\limits_0^L\int\limits_0^L [U(x_1,y,z)-\langle U\rangle]\times [U(x_2,y,z)-\langle U\rangle]^* dx_1dx_2\right\rangle = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{L^2}\int\limits_0^L\int\limits_0^L B_z(\Delta x,0,0)dx_1dx_2, \quad \Delta x = x_2-x_1.$$

Под знаком интеграла стоит поперечная автокорреляционная функция комплексной амплитуды поля для $z\neq 0$.

Для вычисления этой автокорреляционной функции преобразуем выражение комплексной амплитуды (2), используя разложение для $z\geqslant 0$ [4]:

$$\frac{\exp(ikr)}{r} = \frac{i}{2\pi}\iint\limits_{q_{xy}^2<k^2}\exp[i(q_xx+q_yy+q_zz)]\frac{dq_zdq_y}{q_z}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{q_{xy}^2>k^2}\exp\left[i(q_xx+q_yy)-z\sqrt{q_{xy}^2-k^2}\right]\frac{dq_xdq_y}{\sqrt{q_{xy}^2-k^2}},$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ q_z=\sqrt{k^2-q_x^2-q_y^2},\ \ q_{xy}^2=q_x^2+q_y^2.$$

После преобразования для комплексной амплитуды при $q_x=k\alpha$, $q_y=k\beta$ получим

$$U(x,y,z) = \frac{k^2}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta\, u(\xi,\eta)\times$$

$$\times\left\{\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<1}\exp\left\{ik\left[A+z\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\right]\right\}d\alpha d\beta + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{\alpha^2+\beta^2>1}\exp\left\{ikA - z\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}\right\}d\alpha d\beta\right\},$$

$$A=\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta).$$

Взяв эту формулу, находим корреляционную функцию, входящую в (5):

$$B_z(\Delta x,0,0) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi_1d\eta_1d\xi_2d\eta_2\,B_0\times$$

$$\times\left\{\iint\limits_{\varepsilon<1}\iint\limits_{\gamma<1} d\alpha_1d\beta_1d\alpha_2d\beta_2\times\right.$$

$$\times\exp\left\{ik\left[S+z\sum_{j=1,2}(-1)^{j+1}\sqrt{1-\alpha_j^2-\beta_j^2}\right]\right\}+$$

$$+\iint\limits_{\varepsilon>1}\iint\limits_{\gamma<1} d\alpha_1d\beta_1d\alpha_2d\beta_2\times$$

$$\times\exp\left\{ik\left[S-z\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta_2^2}\right]-kz\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2-1}\right\}+$$

$$+\iint\limits_{\varepsilon<1}\iint\limits_{\gamma>1} d\alpha_1d\beta_1d\alpha_2d\beta_2\times$$

$$\times\exp\left\{ik\left[S+z\sqrt{1-\alpha_1^2-\beta_1^2}\right]-kz\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2-1}\right\}+$$

$$+\iint\limits_{\varepsilon>1}\iint\limits_{\gamma>1} d\alpha_1d\beta_1d\alpha_2d\beta_2\times$$

$$\left.\times\exp\left\{ikS-kz\sum_{j=1,2}\sqrt{\alpha_j^2+\beta_j^2}\right\}\right\} =$$

$$= \left(\frac{k}{2\pi}\right)^4(A_1+A_2+A_3+A_4),$$

$$\varepsilon=\alpha_1^2+\beta_1^2, \quad \gamma=\alpha_2^2+\beta_2^2,$$

$$S=\sum_{j=1,2}(-1)^{j+1}\alpha_j(x_j-\xi_j)+\sum_{j=1,2}(-1)^{j+1}\beta_j(y-\eta_j).$$

В это выражение входит автокорреляционная функция на выходе из ионосферы ($z=0$) в предположении пространственной статистической однородности:

$$B_0 = B_0(\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1, 0) = \\ = \langle U(\xi_1, \eta_1, z=0) U^*(\xi_2, \eta_2, z=0)\rangle - \\ - \langle U(\xi_1, \eta_1, z=0)\rangle \langle U^*(\xi_2, \eta_2, z=0)\rangle .$$

При вычислении A_1 изменим порядок интегрирования и заменим переменные: $\xi_2 - \xi_1 = \xi$, $(\xi_2+\xi_1)/2 = \xi_0$, $\eta_2 - \eta_1 = \eta$, $(\eta_2+\eta_1)/2 = \eta_0$. Тогда

$$A_1 = \iint\limits_{\varepsilon<1} \iint\limits_{\gamma<1} d\alpha_1 d\beta_1 d\alpha_2 d\beta_2 \times \\ \times \exp\left\{ik\left[\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + y(\beta_1 - \beta_2) + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(z\sqrt{1-\alpha_1^2-\beta_1^2} - \sqrt{1-\alpha_2^2-\beta_2^2}\right)\right]\right\} \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta\, B_0(\xi,\eta,0) \times \\ \times \exp\left\{ik\left(\xi\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2} + \eta\frac{\beta_2+\beta_1}{2}\right)\right\} \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi_0 \exp\{ik\xi_0(\alpha_2-\alpha_1)\} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta_0 \exp\{ik\eta_0(\beta_2-\beta_1)\} = \\ = \frac{(2\pi)^4}{k^2} \iint\limits_{\varepsilon<1}\iint\limits_{\gamma<1} d\alpha_1 d\beta_1 d\alpha_2 d\beta_2 \times \\ \times \exp\left\{ik\left[\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + y(\beta_1 - \beta_2) + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(z\sqrt{1-\alpha_1^2-\beta_1^2} - \sqrt{1-\alpha_2^2-\beta_2^2}\right)\right]\right\} \times \\ \times \Phi\left(-k\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, -k\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right)\delta(\alpha_2-\alpha_1)\delta(\beta_2-\beta_1) = \\ = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)^2 \iint\limits_{\varphi^2<1} d\alpha d\beta \exp\{-ik\alpha\Delta x\}\Phi(k\alpha, k\beta),$$

$$\varphi^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

При получении этого выражения использованы свойства δ-функции [5]. Кроме того, введен пространственный спектр мощности, связанный фурье-преобразованием с автокорреляционной функцией на выходе из ионосферы:

$$\Phi(k_\xi, k_\eta) = \\ = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta B_0(\xi,\eta,0)\exp\{-i(k_\xi\xi + k_\eta\eta)\}.$$

Вычисляя A_2, A_3, A_4 по схеме вычисления A_1, получим

$$A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \left(\frac{4\pi^2}{k}\right)^2 \times \\ \times \iint\limits_{\varphi^2>1} d\alpha d\beta \exp\left\{-ik\alpha\Delta x - 2kz\sqrt{\varphi^2-1}\right\}\Phi(k\alpha, k\beta).$$

В итоге имеем

$$B_z(\Delta x, 0, 0) = k^2 \iint\limits_{\varphi^2<1} d\alpha d\beta \exp\{-ik\alpha\Delta x\}\Phi(k\alpha, k\beta) + \\ + k^2 \iint\limits_{\varphi^2>1} d\alpha d\beta \exp\left\{-ik\alpha\Delta x - 2kz\sqrt{\varphi^2-1}\right\}\Phi(k\alpha, k\beta).$$

Подставим это выражение в (5) и изменим порядок интегрирования. Заменой переменных $\xi = x_2 - x_1$, $\eta = x_1$ и интегрированием по η приходим к выражению

$$\sigma^2 = \frac{k^2}{L^2}\left[\iint\limits_{\varphi^2<1} d\alpha d\beta\, \Phi(k\alpha, k\beta) + \right. \\ \left. + \iint\limits_{\varphi^2>1} d\alpha d\beta\, \Phi(k\alpha, k\beta) \exp\left\{-2kz\sqrt{\varphi^2-1}\right\}\right] \times \\ \times \int\limits_0^L d\xi\left(1-\frac{\xi}{L}\right)\cos k\alpha\xi < \frac{2k^2}{L}\Phi_m \int\limits_0^L d\xi\left(1-\frac{\xi}{L}\right) \times \\ \times \left[\iint\limits_{\varphi^2<1} d\alpha d\beta\, \cos k\alpha\xi + \right. \\ \left. + \iint\limits_{\varphi^2>1} d\alpha d\beta \exp\left\{-2kz\sqrt{\varphi^2-1}\right\}\cos k\alpha\xi\right] = I_1 + I_2, \tag{6}$$

где $\Phi_m = \Phi_m(k\alpha_m, k\beta_m)$ — максимальное значение пространственного спектра.

Рассмотрим первое слагаемое (I_1). Во внутреннем интеграле сделаем замену переменных $\alpha = \rho\sin\varphi$, $\beta = \rho\cos\varphi$, $0 < \rho < 1$, $-\pi < \varphi < \pi$. Тогда

$$\iint\limits_{\alpha^2+\beta^2<1} d\alpha d\beta \cos k\alpha\xi = \int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\rho d\varphi\, \rho\cos(k\xi\rho\sin\varphi) = \\ = \int\limits_0^1 d\rho\,\rho\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi\cos(k\xi\rho\sin\varphi) = \pi\int\limits_0^1 d\rho\,\rho J_0(k\xi\rho)$$

с учетом выражения для функции Бесселя $J_0(k\xi\rho)$ [6]. Так как при $L\to\infty$ [7]

$$\lim_{L\to\infty}\int\limits_0^L \left(1-\frac{\xi}{L}\right) f(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^\infty f(\xi)\, d\xi, \tag{7}$$

то после интегрирования имеем:

$$I_1 = \frac{2k^2\pi}{L}\Phi_m\int\limits_0^L d\xi\left(1-\frac{\xi}{L}\right)\int\limits_0^1 d\rho\,\rho J_0(k\rho\xi) = \\ = \frac{2k^2\pi}{L}\Phi_m\int\limits_0^1 d\rho\,\rho\int\limits_0^\infty d\xi\, J_0(k\xi\rho) = \frac{2k\pi}{L}\Phi_m.$$

Для второго слагаемого (I_2) в (6), действуя аналогично, получим

$$\iint\limits_{\varphi^2>1} d\alpha d\beta \exp\left\{-2kz\sqrt{\varphi^2-1}\right\}\cos(k\alpha\xi) = \\ = \pi\int\limits_1^\infty d\rho\,\rho\exp\left\{-2kz\sqrt{\rho^2-1}\right\}J_0(k\xi\rho).$$

Тогда, применяя при вычислении формулу (7), приходим к результату:

$$I_2 = \frac{2k\pi}{L}\Phi_m\int\limits_1^\infty d\rho\exp\left\{-2kz\sqrt{\rho^2-1}\right\} = \\ = \frac{k\pi}{2L}\Phi_m\sum_0^\infty(-1)^m\frac{\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+1/2)}{(kz)^{2m+2}}.$$

Здесь после замены переменной $\rho = \operatorname{ch}\psi$ использовано известное [8] выражение:

$$\int\limits_0^\infty \operatorname{sh}\phi\exp\{-p\operatorname{sh}\phi\}\,d\phi = \\ = \frac{1}{2\pi}\sum_0^\infty(-1)^m\frac{\Gamma(m+3/2)\Gamma(m+1/2)}{(p/2)^{2m+2}}.$$

Так как в условиях рассматриваемой задачи $kz \gg 1$, то, взяв нулевое приближение суммы ряда, находим:

$$I_2 \approx \frac{\pi}{2kLz^2}\Phi_m.$$

Вычисленные I_1, I_2 подставим в (6) и получим

$$\sigma^2 < I_1 + I_2 \approx \frac{2k\pi}{L}\Phi_m + \frac{\pi}{2kLz^2}\Phi_m = \\ = \frac{2\pi k}{L}\Phi_m(k\alpha_m, k\beta_m)\Big(1+\frac{1}{(2kz)^2}\Big).$$

Рассматривая полученный результат при $L\to\infty$, $kz \gg 1$ и учитывая ограниченность пространственного спектра мощности $\Phi(k\alpha, k\beta) < \infty$, можно констатировать состоятельность оценки (4) математического ожидания поля (2), т. е.

$$\lim_{L\to\infty}\sigma^2 < \lim_{L\to\infty}\frac{2\pi k}{L}\Phi_m(k\alpha_m, k\beta_m)\Big(1+\frac{1}{(2kz)^2}\Big)\to 0.$$

Следовательно, несмещенность и состоятельность оценки математического ожидания позволяют считать доказанной гипотезу эргодичности (3), согласно которой интегрирование ведется вдоль горизонтальной прямой линии произвольного направления. Отметим, что решение задачи выполнено при наложении физически оправданных предположений: 1. Случайное поле в свободном пространстве (2) пространственно статистически однородно. 2. Автокорреляционная функция $B_0(\xi_2-\xi_1, \eta_2-\eta_1, 0)$ комплексной амплитуды поля на выходе из ионосферы (на плоскости $z=0$) является пространственно статистически однородной. 3. Свободное пространство от ионосферы до Земли велико: $kz \gg 1$.

Таким образом, при распространении волн в свободном пространстве от ионосферы до Земли комплексная амплитуда поля остается эргодической относительно математического ожидания в понимании (3). Ввиду этого статистическое среднее значение комплексной амплитуды поля может быть вычислено путем усреднения вдоль произвольной прямой горизонтальной линии. Аналогичный результат может быть получен и для статистических моментов более высоких порядков, при этом очевидно существенное увеличение сложности соответствующих математических операций.

В заключение укажем, что, используя основной результат работы, пространственные статистические характеристики поля в свободном пространстве при наличии в ионосфере дрейфа неоднородностей ионизации с постоянной скоростью $\mathbf{V} = \mathrm{const}$ можно получить путем измерения временных средних. При $\mathbf{V} \neq \mathrm{const}$ это не представляется возможным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 98-02-16834).

Литература

1. *Вологдин А.Г., Гусев В.Д.* // Радиотехника. 2000. № 3. С. 46.
2. *Вологдин А.Г.* // Радиотехника. 2000. № 2. С. 53.
3. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979.
4. *Фейнберг Е.Л.* Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М.: Изд-во АН СССР, 1961.
5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
7. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
8. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. I. М.: ИЛ, 1949.

Поступила в редакцию
08.09.99