

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕДУР

А. Б. Князев, Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов

(кафедра математики)

Рассматриваются математические модели термомеханических процессов в сильно неоднородных средах. Описана итерационная процедура определения коэффициентов асимптотических разложений уравнений термоупругости.

В монографии [1] предложен асимптотический метод решения уравнений теплопроводности, упругости и термоупругости. Для определения коэффициентов асимптотических преобразований подобных уравнений используется методика, основанная на численном интегрировании на ячейке периодичности.

В работе [2] разработаны методы определения коэффициентов асимптотических преобразований уравнений электродинамики.

В настоящей работе для частного типа периодических неоднородных сред со структурой, аналогичной изучавшейся в работе [2], также реализуется итерационная процедура.

Определение коэффициентов асимптотических преобразований уравнений термоупругости проведем для случая неоднородной среды, стратифицированной в двух направлениях: $\xi_1 = x_1/\varepsilon$, $\xi_2 = x_2/\varepsilon$. Асимптотические разложения компонент вектора перемещений и температуры имеют вид

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \bar{u}_\alpha^0 + \varepsilon u_\alpha^1 + \dots, & u_3 &= \bar{u}_3^0 + \varepsilon u_3^1 + \dots, \\ v &= \bar{v}^0 + \varepsilon v^1 + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где для $\alpha = 1, 2$

$$\begin{aligned} u_\alpha^1 &= U_{\alpha 1} \frac{\partial \bar{u}_1^0}{\partial x_1} + U_{\alpha 2} \frac{\partial \bar{u}_2^0}{\partial x_2} + U_{\alpha 3} \frac{\partial \bar{u}_3^0}{\partial x_3} \\ &+ U_{\alpha 4} \left(\frac{\partial \bar{u}_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_2^0}{\partial x_1} \right) - U_{\alpha 5} \bar{v}^0. \end{aligned}$$

Следуя методике, изложенной в [3], рассмотрим систему уравнений относительно $U_{11} \equiv U(\xi)$ и $U_{21} \equiv W(\xi)$ (остальные уравнения исследуются аналогично):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\nu + \nu \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \lambda \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \mu \frac{\partial W}{\partial \xi_1} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\mu \frac{\partial W}{\partial \xi_1} + \mu \frac{\partial U}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\lambda + \lambda \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \nu \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим, что функции $\lambda(\xi)$, $\mu(\xi)$, $\nu(\xi) = \lambda(\xi) + 2\mu(\xi)$ в (2) имеют структуру, аналогичную рассматривавшейся в работе [2]:

$$\begin{aligned} \lambda(\xi) &= \lambda_0 + \lambda_1(\xi), & \mu(\xi) &= \mu_0 + \mu_1(\xi), \\ \nu(\xi) &= \nu_0 + \nu_1(\xi). \end{aligned} \quad (3)$$

Для решения уравнений (2), (3) предлагается итерационная процедура, являющаяся обобщением процедуры (8) из [2]:

$$\begin{aligned} \nu_0 \frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial \xi_1^2} + (\nu_0 - \mu_0) \frac{\partial^2 W^{n+1}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \mu_0 \frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial \xi_2^2} &= \\ &= -F^1(U^n, W^n), \\ \mu_0 \frac{\partial^2 W^{n+1}}{\partial \xi_1^2} + (\nu_0 - \mu_0) \frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \nu_0 \frac{\partial^2 W^{n+1}}{\partial \xi_2^2} &= \\ &= -F^2(U^n, W^n), \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} F^1(U^n, W^n) &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\nu_1 + \nu_1 \frac{\partial U^n}{\partial \xi_1} + \lambda_1 \frac{\partial W^n}{\partial \xi_2} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\mu_1 \frac{\partial U^n}{\partial \xi_2} + \mu_1 \frac{\partial W^n}{\partial \xi_1} \right), \\ F^2(U^n, W^n) &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\mu_1 \frac{\partial W^n}{\partial \xi_1} + \mu_1 \frac{\partial U^n}{\partial \xi_2} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\lambda_1 + \lambda_1 \frac{\partial U^n}{\partial \xi_1} + \nu_1 \frac{\partial W^n}{\partial \xi_2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

В качестве начальной итерации в (4) принимаются $U^0 = 0$, $W^0 = 0$.

Решения (4), удовлетворяющие условиям 2π -периодичности, представляются в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} U^{n+1}(\xi) &= \sum_{k_1, k_2} U_{k_1 k_2}^{n+1} \exp(ik_\gamma \xi_\gamma), \\ W^{n+1}(\xi) &= \sum_{k_1, k_2} W_{k_1 k_2}^{n+1} \exp(ik_\gamma \xi_\gamma). \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты Фурье $U_{k_1 k_2}^{n+1}$, $W_{k_1 k_2}^{n+1}$ в (6) определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \varkappa_{k_1 k_2}^1 U_{k_1 k_2}^{n+1} + \varkappa_{k_1 k_2} W_{k_1 k_2}^{n+1} &= F_{k_1 k_2}^1, \\ \varkappa_{k_1 k_2} U_{k_1 k_2}^{n+1} + \varkappa_{k_1 k_2}^2 W_{k_1 k_2}^{n+1} &= F_{k_1 k_2}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) использованы обозначения:

$$\begin{aligned} \chi_{k_1 k_2}^1 &= \nu_0 \chi_1^2 + \mu_0 \chi_2^2, & \chi_{k_1 k_2} &= (\nu_0 - \mu_0) \chi_1 \chi_2, \\ \chi_{k_1 k_2}^2 &= \mu_0 \chi_1^2 + \nu_0 \chi_2^2, \end{aligned}$$

$F_{k_1 k_2}^{1,2}$ — коэффициенты Фурье функций (5). Заметим, что определитель $\Delta_{k_1 k_2}$ системы (7) равен $\mu_0 \nu_0 (\chi_1^2 + \chi_2^2)^2$.

Функции u_3^1 и v^1 , входящие в разложения составляющей u_3 перемещения и температуры v , имеют вид

$$\begin{aligned} u_3^1 &= U_{31} \left(\frac{\partial \bar{u}_1^0}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3^0}{\partial x_1} \right) + U_{32} \left(\frac{\partial \bar{u}_2^0}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{u}_3^0}{\partial x_2} \right), \\ v^1 &= V_1 \frac{\partial \bar{v}^0}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial \bar{v}^0}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

где функции $U_{3\beta}(\xi)$ и V_β , $\beta = 1, 2$, являются решениями уравнений, аналогичных исследованным в [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left[\mu(\xi) \left(\frac{\partial U_{3\beta}}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left[k(\xi) \left(\frac{\partial V_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(здесь $k(\xi) = k_0 + k_1(\xi)$ — коэффициент теплопроводности, имеющий структуру, аналогичную $\lambda(\xi)$ и $\mu(\xi)$).

Для решения (8) с указанными $\mu(\xi)$ и $k(\xi)$ можно использовать итерационные процедуры типа использованных в [2]:

$$\begin{aligned} \mu_0 \Delta_\xi U_{3\beta}^{n+1} &= -\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left[\mu_1(\xi) \left(\frac{\partial U_{3\beta}^n}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \right] \equiv -\Phi_\beta^n, \\ \nu_0 \Delta_\xi V_\beta^{n+1} &= -\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left[k_1(\xi) \left(\frac{\partial V_\beta^n}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta} \right) \right] \equiv -\Psi_\beta^n. \end{aligned} \quad (9)$$

Решения (9) можно строить в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} U_{3\beta}^{n+1} &= \sum_{k_1, k_2} U_{3\beta k_1 k_2}^{n+1} \exp(ik_\gamma \xi_\gamma), \\ V_\beta^{n+1} &= \sum_{k_1, k_2} V_{\beta k_1 k_2}^{n+1} \exp(ik_\gamma \xi_\gamma). \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициенты Фурье в (10) определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \mu_0 (k_1^2 + k_2^2) U_{3\beta k_1 k_2}^{n+1} &= \Phi_{\beta k_1 k_2}^n, \\ k_0 (k_1^2 + k_2^2) V_{\beta k_1 k_2}^{n+1} &= \Psi_{\beta k_1 k_2}^n \end{aligned} \quad (11)$$

($\Phi_{\beta k_1 k_2}^n, \Psi_{\beta k_1 k_2}^n$ — коэффициенты Фурье функций $\Phi_\beta^n, \Psi_\beta^n$ из (9)).

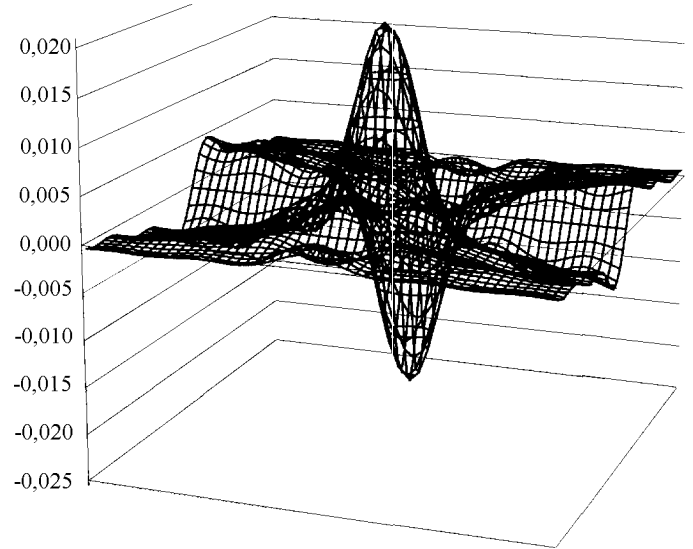


Рис. 1

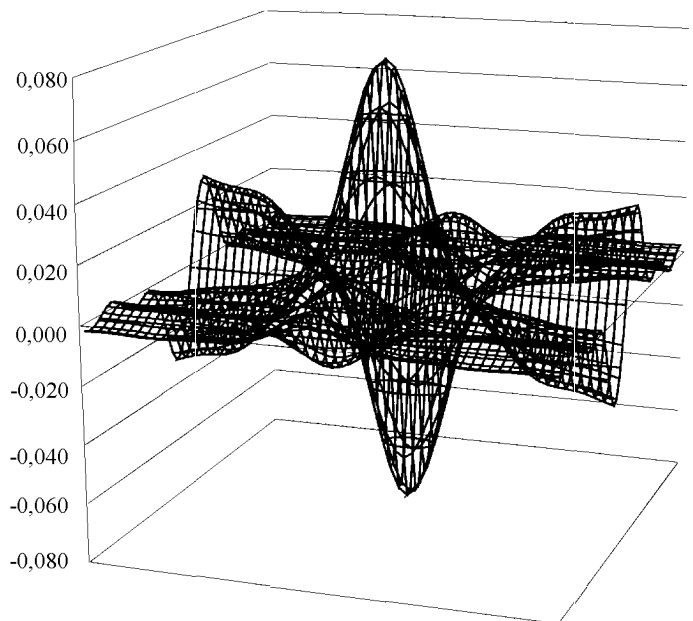


Рис. 2

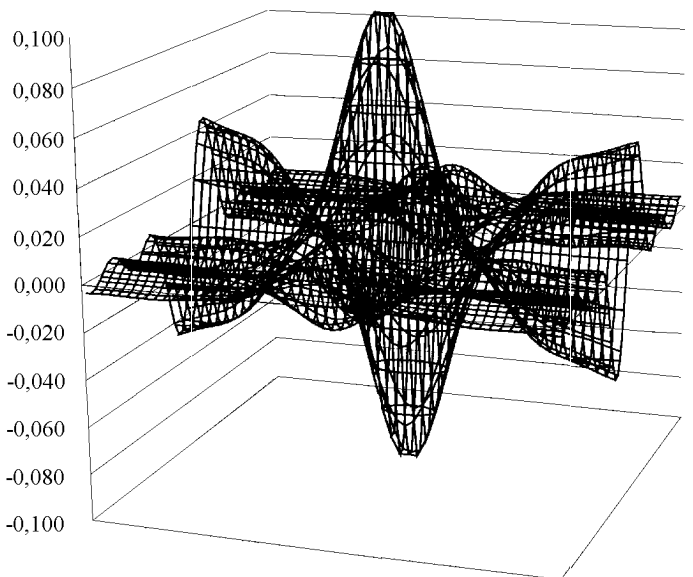


Рис. 3

На рис. 1–3 приведены результаты применения итерационной процедуры для уравнения теплопроводности (первая, восьмая и четырнадцатая итерации для функции V_1 на ячейке $2\pi \times 2\pi$), иллюстрирующие эффективность предлагаемой методики.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.

2. Медведев Г.Н., Моргунов Б.И. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 6. С. 47 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 6).
 3. Моргунов Б.И. Математический анализ физико-механических процессов. М.: Изд-во МГИЭМ, 1995.

Поступила в редакцию 31.03.99

РАДИОФИЗИКА

УДК 621.391.81

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОГОНКИ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ОТРАЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНОЙ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ИОНОСФЕРЕ

В. Д. Гусев, Е. Г. Михайлова, Л. И. Приходько

(кафедра физики атмосферы)

Предложены алгоритмы расчета комплексных коэффициентов отражения и нахождения структуры поля в неоднородной среде с высотным профилем эффективной частоты электронных соударений. Используемый метод прогонки позволяет рассматривать случаи как частичного, так и почти полного отражения волн от слоя и найти частотную зависимость коэффициента отражения.

При радиозондировании ионосферы и определении характеристик отраженного радиосигнала необходимо учитывать поглощение волн в ионосфере, которое существенно влияет на интенсивность принимаемых сигналов. Затухание радиоволн в ионосферной плазме связано с потерями, обусловленными соударениями электронов с нейтральными частицами. Эти потери приводят к отличной от нуля проводимости, а диэлектрическая проницаемость плазмы становится комплексной величиной. В реальных условиях ионосферного распространения эффективная частота электронных соударений ν_{eff} зависит от высоты. Об этом свидетельствуют как экспериментальные данные [1, 2], так и расчеты сечений соударений электронов с различными компонентами ионосферы. Полная частота электронных соударений в многокомпонентной плазме равна сумме эффективных частот соударений с различными компонентами (N_2, O_2, He, O, H): $\nu_{\text{eff}} = \sum_m \nu_m$. На рис. 1 приведены кривые зависимости ν_{eff} от высоты, построенные на основе табличных данных [3] для моделей дневной и ночной ионосферы. Область высот относится к ионосферному слою E.

Учет высотной зависимости $\nu_{\text{eff}}(z)$ при нахождении комплексных коэффициентов отражения существенно усложняет решение краевой задачи, описываемой для монохроматических волн уравнением Гельмгольца. Так, для общепринятой модели изотропной плоскостройной ионосферы комплексная диэлектрическая проницаемость принимает вид

$$\epsilon_k(z) = \epsilon(z) + i(1 - \epsilon(z))\nu_{\text{eff}}(z)/\omega, \quad (1)$$

где ω — частота радиоволн.

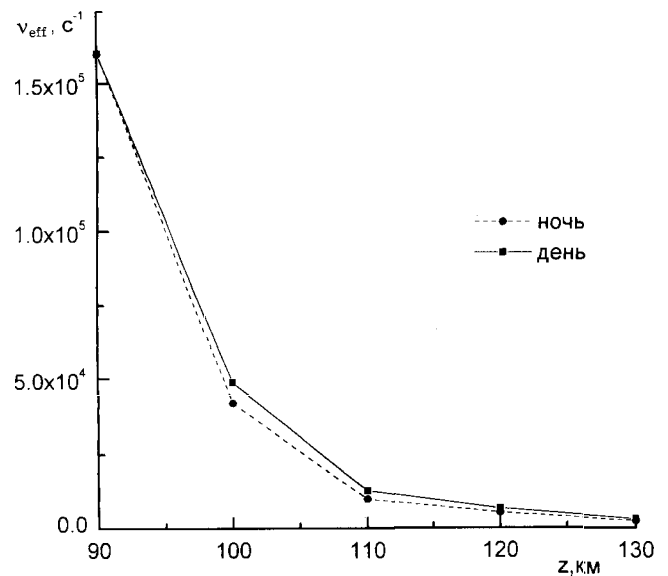


Рис. 1

Для учета дифракционных эффектов и тонких волновых явлений необходимо точное решение уравнения Гельмгольца для функции (1). Однако даже для простейших модельных ионосферных слоев получить аналитическое решение задачи не представляется возможным. Это обуславливает необходимость применения и развития численных методов расчета комплексных коэффициентов отражения и прохождения радиоволн для неоднородных ионосферных слоев. Так, в работах [4–6] разработаны численные алгоритмы, позволяющие рассчитывать отражение и прохождение радиоволн в ионосферных слоях произ-