$$\mu_q = \frac{2\pi}{\sqrt{3(\ln(4\pi\Lambda^2/\mu_g^2) + 8\pi^2/2 + 1/2 - \gamma)}}\mu_g,$$

где γ — постоянная Эйлера. Подставляя (6) в (5) и рассматривая полученное соотношение как квадратное уравнение относительно τ, потребуем неотрицательности его дискриминанта. В результате получим условия на параметр μ_g, имеющие следующий вид:

$$A \geqslant -\frac{3+\sqrt{5}}{2}B, \tag{7}$$

$$A \leqslant -\frac{3-\sqrt{5}}{2}B, \tag{8}$$

где

$$A = \frac{56\pi^3}{s_0^2}\alpha\frac{\mu_g^2}{(\ln(4\pi\Lambda^2/\mu_g^2) + 8\pi^2/2 + 1/2 - \gamma)} - \\ - \frac{R}{(32/\pi^2)\ln(\mu_g/\Lambda)[\ln(\mu_g/\Lambda) + 1/6]\mu_g^{10}},$$

$$B = \frac{2\pi^2}{3s_0}\frac{32}{\pi^2}\ln(\mu_g/\Lambda)(\ln(\mu_g/\Lambda) + 1/6) - \\ - \frac{R}{(32/\pi^2)\ln(\mu_g/\Lambda)(\ln(\mu_g/\Lambda) + 1/6)\mu_g^8}.$$

Неравенство (8) приводит к нефизическим отрицательным значениям μ_g, а неравенство (7) дает оценку снизу. Оценку сверху получим из неравенства для отношения глюонного и четырехкваркового конденсатов, полученное в [3]:

$$-1{,}0 \text{ ГэВ}^2 \leqslant -\frac{27\langle(\alpha/\pi)GG\rangle}{896\pi\alpha\langle\bar{q}q\rangle^2} \leqslant 0.$$

Подставляя в это соотношение (6), получаем оценку сверху для μ_g. Используя связь μ_g и μ_q, окончательно получаем следующую оценку для массы конституентного кварка:

$$287 \text{ МэВ} \leqslant \mu_q \leqslant 963 \text{ МэВ}.$$

Полученный результат хорошо согласуется с другими имеющимися оценками [1, 8, 9]. В работе [6] была предложена модель, объединяющая пертурбативную КХД с низкоэнергетической феноменологией. Гамильтониан модели был получен в результате итерационной процедуры, основанной на ренормгрупповом анализе. Однако, как отмечают сами авторы, величина массы конституентного кварка в их подходе оказывается заниженной ($\mu_q = 100$ МэВ). В настоящей работе показано, что учет ренормгруппы в рамках конечно-энергетических правил сумм не приводит к заниженным значениям массы конституентного кварка.

Литература

1. *Shifman M.A., Vainstein A.I., Zakharov V.I.* // Nucl. Phys. 1979. **B147**. P. 385; 448; 519.
2. *Мещеряков Д.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. № 6. С. 44 (Moscow University Phys. Bull. 1991. No. 6. P. 42).
3. *Meshcheryakov D.V.* // Z. f. Phys. 1992. **C55**. P. 643.
4. *Arbuzov B.A., Boos E.E., Turashvili K.Sh.* // Z. f. Phys. 1986. **C30**. P. 287.
5. *Kiselev V.V.* // Препринт ИФВЭ № 92-51. Протвино, 1992.
6. *Szczepaniak A.P., Swanson E.S.* // Phys. Rev. 1997. **D55**. P. 1578.
7. *Becchi C., Narison S., Rafael E. de, Yndurain F.J.* // Z. f. Phys. 1981. **C8**. P. 335.
8. *Wilson K.G., Walhout T.S., Harindranath A.* et al. // Phys. Rev. 1994. **D49**. P. 6720.
9. *Jungnickel D.-U., Wetterich C.* // Phys. Rev. 1996. **D53**. P. 5142.

Поступила в редакцию
19.05.99

УДК 534. 01

О БИСТАБИЛЬНОСТИ СИНХРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОСЦИЛЛЯТОРЕ ВАН ДЕР ПОЛЯ

П. В. Елютин

(*кафедра квантовой радиофизики*)

Для синхронных колебаний осциллятора Ван дер Поля под действием гармонической силы исследована (аналитически и численно) область бистабильности, в которой при заданном значении параметров внешней силы могут существовать два устойчивых периодических решения с различными параметрами.

Движение осциллятора Ван дер Поля под действием гармонической внешней силы описывается в безразмерных переменных уравнением

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x}(1 - x^2) + x = F\cos\omega t.$$

Задача об устойчивости синхронных (имеющих частоту внешнего поля ω) колебаний в этой модели при малых значениях параметра ($\alpha \ll 1$) была решена Андроновым и Виттом еще в 1930 г. [1, 2]. В своей пионерской работе эти авторы отметили наличие у уравнения (1) области бистабильности, в которой «существует одновременно два устойчивых периодических решения» [2, с. 64], но отказались от ее рассмотрения.

Хотя и сама задача, и предложенный в работе [1] метод ее решения, основанный на уравнениях для медленно меняющихся амплитуд, вошли в стандарт учебного курса теории колебаний [3, 4], утверждение о бистабильности синхронных колебаний, которое еще можно отыскать в старых книгах [5], осталось без внимания и со временем было забыто настолько, что стало отрицаться [6]. Цель настоящей заметки — заполнить оставленный Андроновым и Виттом пробел.

Переход к медленным переменным хорошо известен [1–6], поэтому перейдем сразу к интересующим нас уравнениям. Значения амплитуды синхронных колебаний при заданных значениях параметров $\alpha \ll 1$, F и ω определяются точками на резонансной кривой, заданной уравнением

$$\left(1-\frac{1}{4}z\right)^2 z+4\Delta^2 z=f^2, \tag{1}$$

где z — квадрат амплитуды колебаний, а Δ и f обозначают приведенные значения расстройки частоты и силы:

$$\Delta=\frac{\omega-1}{\alpha}, \quad f=\frac{F}{\alpha}.$$

Устойчивыми являются колебания, которым соответствуют участки резонансной кривой, лежащие в полупространстве $z>2$ вне эллипса, заданного уравнением

$$4\Delta^2+\left(1-\frac{1}{4}z\right)\left(1-\frac{3}{4}z\right)=0. \tag{2}$$

Поскольку уравнения (1) и (2) не изменяются при изменении знака Δ, в дальнейшем мы говорим о ветви $\Delta>0$ без ограничения общности.

Нижней по частоте границе бистабильности соответствует пересечение резонансной кривой (1), прямой $z=2$ и эллипса (2) в одной точке a:

$$\Delta_a=\frac{1}{4}, \quad f_a=1.$$

При этом значении силы f внешняя граница области синхронизации определяется пересечением резонансной кривой (1) и эллипса (2) в области $z>8/3$ и соответствует значению расстройки $\Delta_+ \approx [(223-\sqrt{29})/3200]^{1/2}=0{,}261$, превышающей Δ_c. Следовательно, точка a лежит внутри полосы синхронизации.

Верхней частотной границе бистабильности соответствует касание резонансной кривой и эллипса (2) в точке b:

$$\Delta_b=\frac{1}{\sqrt{12}}=0{,}289, \quad f_b=\sqrt{\frac{32}{27}}=1{,}089.$$

При этом значении силы внешняя граница области синхронизации определяется пересечением резонансной кривой (1) и прямой $z=2$ и соответствует значению расстройки $\Delta_+=(37/432)^{1/2}=0{,}293$, превышающей Δ_b. Следовательно, точка b лежит внутри полосы синхронизации.

Наконец, третья характерная точка c соответствует значению приведенной силы f, при котором точки пересечения резонансной кривой с прямой $z=2$ и с эллипсом (2) в области $z>8/3$ имеют одинаковые значения Δ. Точка c лежит на границе полосы синхронизации; ее параметры можно определить численно:

$$\Delta_c=0{,}279, \quad f_c=1{,}061.$$

Область бистабильности на плоскости параметров (Δ, f) имеет вид криволинейного треугольника с вершинами в точках a, b и c. Вид границ области синхронизации и области бистабильности, найденный путем численного решения алгебраических уравнений, изображен на рис. 1. Область синхронизации лежит слева от показанных линий. Область бистабильности синхронных колебаний лежит внутри криволинейного треугольника abc. Из рис. 2, где приведен фрагмент резонансной кривой, видно, что в области бистабильности альтернативные синхронные движения значительно различаются по своим характеристикам. Бистабильность существует в частотном интервале $0{,}2707<\Delta<0{,}2717$. При заданной расстройке интервал значений приведенной силы, в котором система бистабильна, не превосходит

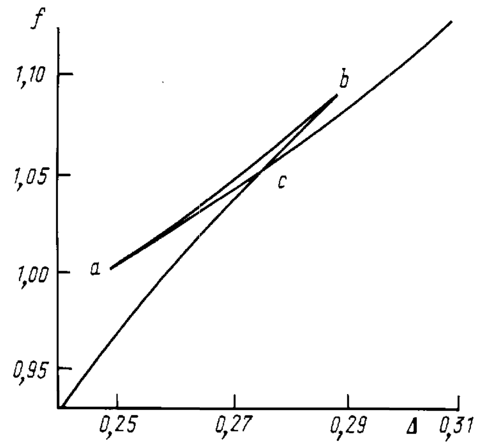

Рис. 1. Границы области синхронизации осциллятора Ван дер Поля на плоскости параметров «приведенная расстройка частоты Δ — приведенная сила f» при положительных расстройках

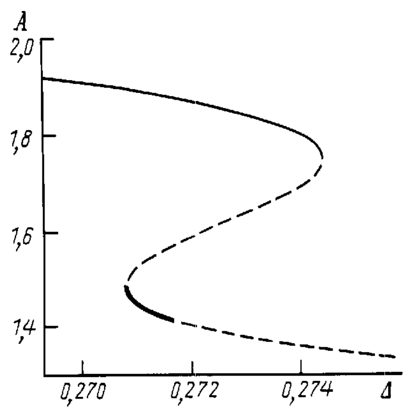

Рис. 2. Резонансная кривая зависимости амплитуды колебаний от приведенной расстройки Δ для значения приведенной силы $f=(f_a+f_b)/2=1{,}0443$. Устойчивым колебаниям соответствуют сплошные участки кривой, неустойчивым — штриховые

$3 \cdot 10^{-3}$; такая числовая малость чрезвычайно затрудняет возможность экспериментального наблюдения исследованного явления.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Учебно-научного центра «Фундаментальная оптика и спектроскопия» (в рамках программы «Интеграция») и Федеральной программы по поддержке ведущих научных школ (грант 96-15-96476).

Литература

1. *Andronow A., Witt A.* // Archiv für Elektrotechnik. 1930. **XXIV**. S. 99.
2. *Андронов А.А.* Собр. трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
3. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. С. 251–258.
4. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. 2-е изд. М.: Наука, 1988. С. 214–219.
5. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: ИЛ, 1953. С. 157, 180.
6. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. С. 75–76.

Поступила в редакцию
18.06.99

УДК 530.12:517.958

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ ВИССЕРА

И. П. Денисова, А. А. Зубрило, В. Б. Тверской

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Проведено интегрирование уравнений геодезического движения для массивных и безмассовых частиц в гравитационных полях, создаваемых плоскими электромагнитной и скалярной волнами в теории гравитации Виссера. Показано, что уравнения траекторий этих частиц существенно зависят от массы гравитона.

В настоящее время в научной литературе активно обсуждается несколько вариантов биметрических теорий гравитации, использующих представления о массивном гравитоне. В таких теориях точные решения уравнений гравитационного поля содержат массу гравитона в качестве параметра. Поэтому, изучая законы движения частиц в гравитационных полях, можно оценить массу гравитона и выяснить, насколько предположение о неравенстве нулю массы гравитона согласуется с объективной реальностью.

К сожалению, число найденных точных решений в таких теориях невелико. В частности, в рамках теории гравитации Виссера [1] в работе [2] найдено только решение, описывающее гравитационное поле, которое создает плоская эллиптически поляризованная электромагнитная волна. В этом случае при использовании галилеевских координат плоского фонового пространства-времени ненулевые компоненты метрического тензора риманова пространства-времени можно записать в виде

$$\begin{gathered} g^{00} = 1 - F(ct-z), \quad g^{11} = g^{22} = -1, \\ g^{33} = -1 - F(ct-z), \quad g^{03} = -F(ct-z), \\ F(ct-z) = -\frac{2G\hbar^2}{m_g^2 c^6}\left[h_1^2(ct-z) + h_2^2(ct-z)\right], \end{gathered} \tag{1}$$

где G — гравитационная постоянная, $\hbar$ — постоянная Планка, m_g — масса гравитона, а $h_1(ct-z)$ и $h_2(ct-z)$ — произвольные функции от переменных $ct-z$, выбор которых означает выбор определенного волнового пакета и состояния поляризации электромагнитной волны.

Совершенно аналогично работе [2] можно найти компоненты гравитационного поля, создаваемого плоской волной безмассового скалярного поля. В этом случае метрический тензор имеет ту же структуру, что и в (1), но отличается выражением для функции $F(ct-z)$:

$$F(ct-z) = -\frac{2G\hbar^2}{m_g^2 c^6} h_3^2(ct-z), \tag{2}$$

где $h_3(ct-z)$ описывает волновой пакет безмассового скалярного поля.

Так как метрики (1) и (2) имеют одинаковый вид, различаясь только обозначениями, то их исследование проводится одинаково.

Используя метод Гамильтона–Якоби, изучим геодезическое движение массивных и безмассовых частиц в гравитационных полях (1) и (2). Решение уравнений Гамильтона–Якоби для частицы, имеющей массу m_0, в координатах ct, x, y и z фонового пространства-времени имеет вид

$$S = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + m_0^2 c^2}{2\alpha_3}(ct-z) + \frac{\alpha_3}{2}\int^{ct-z} F(\xi)\,d\xi, \tag{3}$$

где α_1, α_2 и α_3 — параметры, вводимые для разделения переменных.