КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12:514.743

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ПО ЗАКОНАМ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ БОРНА–ИНФЕЛЬДА В ПОЛЕ ИНТЕНСИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В. И. Денисов, Н. В. Кравцов, Е. Г. Ларионцев, А. А. Зубрило, В. Б. Пинчук

(*НИИЯФ*)

Показано, что в нелинейной электродинамике Борна–Инфельда распространение слабой электромагнитной волны в поле интенсивного лазерного излучения происходит в некотором эффективном пространстве-времени, метрический тензор которого зависит от напряженности электромагнитного поля лазерного излучения. Найдены компоненты этого тензора.

Изучение различных нелинейных моделей теории поля, предпринимающееся в последнее время (см., напр., [1]), вновь возбудило интерес к нелинейной электродинамике Борна–Инфельда. Как известно, в 1934 г. Борн [2] опубликовал первый вариант нелинейной электродинамики, а позднее совместно с Инфельдом [3] усовершенствовал его.

Лагранжиан электромагнитного поля, предложенный в работе [3], может быть представлен в виде

$$L = -\frac{1}{4\pi a^2}\left[\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})^2} - 1\right], \quad (1)$$

где a — некоторая постоянная, которую удобно выразить через характерную квантовоэлектродинамическую индукцию $B_q = m^2c^2/e\hbar \sim 4,41 \cdot 10^{13}$ Гс и безразмерную постоянную η: $a = \eta/B_q$.

Уравнения электромагнитного поля нелинейной электродинамики Борна–Инфельда, полученные с использованием лагранжиана (1), аналогичны уравнениям макроскопической электродинамики

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

но отличаются от них смыслом векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= 4\pi\frac{\partial L}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E} + a^2(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})\mathbf{B}}{\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})^2}}, \\ \mathbf{H} &= -4\pi\frac{\partial L}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B} - a^2(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}}{\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) - a^4(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E})^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (2) нелинейны, и нелинейность содержится в членах со старшими производными, поэтому распространение электромагнитных волн во внешнем электромагнитном поле, согласно электродинамике Борна–Инфельда, эквивалентно распространению этих волн в некотором эффективном псевдоримановом пространстве-времени.

Найдем метрический тензор этого пространства-времени в случае, когда слабая плоская электромагнитная волна частоты ω распространяется в поле интенсивного лазерного излучения частоты Ω. Векторы магнитного и электрического полей слабой электромагнитной волны обозначим через $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$, а лазерного излучения — через $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$. Тогда суммарные поля, входящие в выражения (3), примут вид

$$\mathcal{B} = \mathbf{B} + \mathbf{b}, \quad \mathcal{E} = \mathbf{E} + \mathbf{e}.$$

В нулевом приближении по векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$ система нелинейных дифференциальных уравнений (2) имеет решение в виде плоской эллиптически поляризованной волны

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\Big\{(\mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2)\exp[i(\Omega t - \mathbf{K}\cdot\mathbf{r})] + (\mathbf{E}_1 - i\mathbf{E}_2)\exp[-i(\Omega t - \mathbf{K}\cdot\mathbf{r})]\Big\},$$

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\Omega}[\mathbf{K}\times\mathbf{E}], \quad (\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2) = 0, \quad \operatorname{Im}\mathbf{E}_1 = \operatorname{Im}\mathbf{E}_2 = 0$$

только при выполнении условий

$$\frac{\Omega^2}{c^2} = \mathbf{K}^2, \quad (\mathbf{K}\cdot\mathbf{E}_1) = (\mathbf{K}\cdot\mathbf{E}_2) = 0. \quad (4)$$

Так как эта волна поперечна и ее инварианты $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ и $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})$ равны нулю, то в первом приближении по $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$ из уравнений (2) имеем:

$$\operatorname{rot}\mathbf{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x^0} + a^2\Big\{\Big[\mathbf{E}\times\nabla\{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{E})\}\Big] - \mathbf{B}\frac{\partial}{\partial x^0}\{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}) + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{E})\} + \Big[\mathbf{B}\times\nabla\{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{e})\}\Big] +$$

$$+\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial x^0}\{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})-(\mathbf{E}\cdot\mathbf{e})\}\Big\}=0. \qquad (5)$$

Представим векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$ в виде

$$\mathbf{b}=\mathbf{b}_0\,\mathrm{e}^{iS}, \quad \mathbf{e}=\mathbf{e}_0\,\mathrm{e}^{iS}, \qquad (6)$$

где $S=S(t,\mathbf{r})$ — эйконал, и векторы $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{e}_0$ будем считать слабо изменяющимися функциями t и $\mathbf{r}$ по сравнению с функцией $\exp[iS(t,\mathbf{r})]$.

Подставляя выражения (6) в уравнения (5), учитывая условия (4) и исключая вектор $\mathbf{b}$, получим однородную систему из трех линейных алгебраических уравнений относительно трех компонент $e_\beta=(\mathbf{e})_\beta$:

$$A^{\alpha\beta}e_\beta=0, \qquad (7)$$

где трехмерный тензор $A^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$A_{\alpha\beta}=\left[(\boldsymbol{\nabla}S)^2-\left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right]\delta_{\alpha\beta}-\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\frac{\partial S}{\partial x^\beta}-$$
$$-a^2\left\{\left[\frac{K_\alpha}{K}(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}S)-\left[\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\nabla}S)}{K}\right]E_\alpha\right]\times\right.$$
$$\times\left[\frac{K_\beta}{K}(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}S)-\left[\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\nabla}S)}{K}\right]E_\beta\right]+$$
$$\left.+\left[N_\alpha^S+\frac{1}{cK}\frac{\partial S}{\partial t}N_\alpha^K\right]\left[N_\beta^S+\frac{1}{cK}\frac{\partial S}{\partial t}N_\beta^K\right]\right\}$$

и введены обозначения $\mathbf{N}^K=[\mathbf{K}\times\mathbf{E}]$, $\mathbf{N}^S=[\boldsymbol{\nabla}S\times\times\mathbf{E}]$.

Условие существования нетривиальных решений системы уравнений (7): $\det||A^{\alpha\beta}||=0$, как известно, приводит к дисперсионному уравнению.

Используя формулы тензорной алгебры, выведенные в работе [4], из условия $\det||A^{\alpha\beta}||=0$ получим

$$\left\{\left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-(\boldsymbol{\nabla}S)^2+a^2\mathbf{E}^2\left[\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{(\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\nabla}S)}{K}\right]^2\right\}^2=0,$$

где $\mathbf{E}^2=\frac{1}{2}\{\mathbf{E}_1^2+\mathbf{E}_2^2+(\mathbf{E}_1^2-\mathbf{E}_2^2)\cos 2(\Omega t-\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})\}$.

Это уравнение представляет собой уравнение Гамильтона–Якоби

$$g^{nm}\frac{\partial S}{\partial x^n}\frac{\partial S}{\partial x^m}=0$$

для безмассовой частицы, движущейся в некотором эффективном пространстве-времени, метрический тензор которого зависит от поля сильной электромагнитной волны:

$$g^{00}=1+a^2\mathbf{E}^2, \quad g^{0\alpha}=a^2\mathbf{E}^2\frac{K^\alpha}{K},$$
$$g^{\alpha\beta}=-\delta^{\alpha\beta}+a^2\mathbf{E}^2\frac{K^\alpha K^\beta}{K^2}. \qquad (8)$$

Тензор кривизны R_{jnml} для метрики тождественно равен нулю, поэтому пространство-время является псевдоевклидовым. При $\mathbf{E}_1^2=\mathbf{E}_2^2$ компоненты метрического тензора (8) не зависят от координат и времени, но не являются диагональными. Это означает, что тензор представляет собой метрический тензор инерциальной системы отсчета, в которой, однако, скорость света зависит от направления распространения. Поэтому нелинейное воздействие циркулярно поляризованной сильной электромагнитной волны в вакууме на распространение слабой электромагнитной волны эквивалентно введению анизотропной среды.

При $\mathbf{E}_1^2\neq\mathbf{E}_2^2$ выражения (8) зависят от координат и времени и представляют собой компоненты метрического тензора неинерциальной системы отсчета, движущейся в псевдоевклидовом пространстве-времени. Поэтому воздействие сильной электромагнитной волны, не являющейся циркулярно поляризованной, на распространение слабой электромагнитной волны эквивалентно введению анизотропной среды и действию сил инерции неинерциальной системы отсчета в той области пространства, где эти волны взаимодействуют.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00–02–16039).

Литература

1. *Denisov V.I.* // Phys. Rev. 2000. **D61**, No. 3. P. 036004.
2. *Born M.* // Proc. Roy. Soc. 1934. **A143**. P. 410.
3. *Born M., Infeld L.* // Proc. Roy. Soc. 1934. **A144**. P. 425.
4. *Григорьев В.И., Денисова И.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 2. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1996. No. 2. P. 1).

Поступила в редакцию
26.04.00