

УДК 539.12

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ В РАСЧЕТАХ ТРЕХЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ПРОБНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А. Г. Дончев, Н. Н. Колесников, В. И. Тарасов

(кафедра теоретической физики)

Получены все формулы, необходимые для расчета не только верхней (E_U), но и нижней (E_L) вариационных оценок энергии трехчастичных систем с использованием пробных функций в виде разложения по многомерным экспонентам. Нижние вариационные оценки с такими пробными функциями находятся впервые. На ряде конкретных примеров показано, что, хотя E_L обычно является более далекой оценкой точного значения энергии системы (E_0) по сравнению с E_U , она позволяет также обеспечить значительно более надежную экстраполяцию.

Введение

В обычно используемом нерелятивистском потенциальном подходе для решения уравнения Шрёдингера систем трех и более частиц применяются различные методы, однако наиболее универсальным остается вариационный метод, который к тому же обеспечивает наиболее высокую точность при расчете связанных систем. Его важным достоинством является односторонний характер сходимости, причем имеется возможность находить как верхнюю (E_U), так и нижнюю (E_L) оценки энергии, что во многих случаях является гарантией точности и надежности расчетов.

Верхнюю оценку энергии основного состояния E_0 системы находят путем минимизации по пробной функции ψ функционала:

$$E_U = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (1)$$

где H — гамильтониан. Для нахождения нижней оценки удобно использовать формулу Темпла [1]

$$E_L = \frac{E_1 E_U - \langle \psi | H^2 | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle}{E_1 - E_U}, \quad (2)$$

справедливую для всех пробных функций, обеспечивающих неравенство $E_U < E_1$, где E_1 — энергия первого возбужденного состояния системы (или некоторая ее оценка снизу).

Пробную функцию общего вида можно представить в виде разложения по некоторым базисным функциям φ_i :

$$\psi = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(\alpha^i), \quad (3)$$

где a_i и α^i — вариационные параметры. Путем увеличения числа членов в этом разложении можно приблизиться к точному решению, а совместный анализ сходимости оценок E_U и E_L позволяет дополнительно уточнять результаты с помощью нахождения экстраполированной оценки E_∞ [2–5].

Для расчета S -состояний трехчастичных систем часто используется экспоненциальный базис [7–10]

$$\varphi_i(\alpha^i) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^3 \alpha_k^i R_k \right\}, \quad (4)$$

правильно описывающий асимптотику волновых функций и обеспечивающий хорошую сходимость (здесь R_1 — расстояние между 2-й и 3-й частицами, R_2 и R_3 соответствуют циклической перестановке частиц 1, 2, 3). Результаты таких расчетов как ядерных, так и атомных систем публиковались (см., напр., [6–10]), однако все они относились только к верхней оценке E_U . Это было связано не только с трудоемкостью расчетов, но и с отсутствием соответствующих формул для нахождения нижней оценки. В следующем разделе, а также в приложении приводятся все необходимые формулы для расчета верхней и нижней оценок энергии трехчастичной системы.

Формулы для расчета E_U и E_L

В выражения как для верхней, так и для нижней вариационных оценок энергии входят интегралы вида

$$I^{klm}(x_1 x_2 x_3) \equiv 8\pi^2 \int_0^\infty R_1^k dR_1 \int_0^\infty R_2^l dR_2 \times \\ \times \int_{|R_1 - R_2|}^{R_1 + R_2} R_3^m dR_3 \exp \left\{ - \sum_{q=1}^3 x_q R_q \right\}, \quad (5)$$

$$U_1^{klm}(x_1 x_2 x_3) \equiv 8\pi^2 \int_0^\infty V(R_1) R_1^k dR_1 \int_0^\infty R_2^l dR_2 \times \\ \times \int_{|R_1 - R_2|}^{R_1 + R_2} R_3^m dR_3 \exp \left\{ - \sum_{q=1}^3 x_q R_q \right\}, \quad (6)$$

где $V(R_1)$ — потенциал взаимодействия 2-й и 3-й частиц.

В свою очередь эти интегралы могут быть найдены действием дифференциального оператора $(-\partial/\partial x_1)^k(-\partial/\partial x_2)^l(-\partial/\partial x_3)^m$ на два фундаментальных интеграла [6, 8]:

$$I^{000}(x_1 x_2 x_3) = \frac{16\pi^2}{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)}, \quad (7)$$

$$U_1^{000}(x_1 x_2 x_3) = \frac{16\pi^2}{(x_2 + x_3)(x_2 - x_3)} \int_0^\infty V(R_1) dR_1 \times \\ \times \exp\{-x_1 R_1\} (\exp\{-x_3 R_1\} - \exp\{-x_2 R_1\}). \quad (8)$$

В частности, нормировка пробной функции (3) записывается в виде

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{i,j} a_i a_j \langle i | j \rangle,$$

где $\langle i | j \rangle = I^{111}(\alpha_1^i + \alpha_1^j, \alpha_2^i + \alpha_2^j, \alpha_3^i + \alpha_3^j)$.

Для матричного элемента оператора T кинетической энергии между состояниями i и j можно получить следующее:

$$\langle i | T | j \rangle = 2(B_1^i I^{011} + B_2^i I^{101} + B_3^i I^{110}) - A^i I^{111} - \\ - C_1^i (I^{120} + I^{102} - I^{300}) - C_2^i (I^{012} + I^{210} - I^{030}) - \\ - C_3^i (I^{201} + I^{021} - I^{003}),$$

где

$$B_1^i = \frac{\hbar^2}{2\mu_{23}} \alpha_1^i, \quad B_2^i = \frac{\hbar^2}{2\mu_{31}} \alpha_2^i, \quad B_3^i = \frac{\hbar^2}{2\mu_{12}} \alpha_3^i,$$

$$\frac{1}{\mu_{ij}} = \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}, \quad A^i = B_1^i \alpha_1^i + B_2^i \alpha_2^i + B_3^i \alpha_3^i,$$

$$C_1^i = \frac{\hbar^2}{2m_1} \alpha_2^i \alpha_3^i, \quad C_2^i = \frac{\hbar^2}{2m_2} \alpha_3^i \alpha_1^i, \quad C_3^i = \frac{\hbar^2}{2m_3} \alpha_1^i \alpha_2^i,$$

$$I^{klm} \equiv I^{klm}(\alpha_1^i + \alpha_1^j, \alpha_2^i + \alpha_2^j, \alpha_3^i + \alpha_3^j).$$

Матричные элементы для потенциалов всех употребительных форм имеют простой вид. В частности, для кулоновского взаимодействия

$$\langle i | 1/R_1 | j \rangle = I^{011}(\alpha_1^i + \alpha_1^j, \alpha_2^i + \alpha_2^j, \alpha_3^i + \alpha_3^j),$$

а для экспоненциального потенциала

$$\langle i | \exp\{-\lambda_1 R_1\} | j \rangle = I^{111}(\alpha_1^i + \alpha_1^j + \lambda_1, \alpha_2^i + \alpha_2^j, \alpha_3^i + \alpha_3^j).$$

Нахождение нижней вариационной оценки (2) требует еще вычисления матричных элементов операторов квадрата гамильтониана. Для матричных элементов T^2 получаем

$$\langle i | T^2 | j \rangle = \\ = A^i A^j I^{111} - 2(B_1^i A^j + B_1^j A^i) I^{011} - \\ - 2(B_2^i A^j + B_2^j A^i) I^{101} - 2(B_3^i A^j + B_3^j A^i) I^{110} + \\ + (C_1^i A^j + C_1^j A^i) (I^{120} + I^{102} - I^{300}) + \\ + (C_2^i A^j + C_2^j A^i) (I^{012} + I^{210} - I^{030}) + \\ + (C_3^i A^j + C_3^j A^i) (I^{201} + I^{021} - I^{003}) + \\ + 2(B_1^i C_3^j + B_1^j C_3^i) (I^{-103} - I^{101} - I^{-121}) +$$

$$+ 2(B_2^i C_3^j + B_2^j C_3^i) (I^{0-13} - I^{2-11} - I^{011}) + \\ + 2(B_3^i C_3^j + B_3^j C_3^i) (I^{002} - I^{200} - I^{020}) + \\ + 2(B_1^i C_1^j + B_1^j C_1^i) (I^{200} - I^{020} - I^{002}) + \\ + 2(B_2^i C_1^j + B_2^j C_1^i) (I^{3-10} - I^{110} - I^{1-12}) + \\ + 2(B_3^i C_1^j + B_3^j C_1^i) (I^{30-1} - I^{12-1} - I^{101}) + \\ + 2(B_1^i C_2^j + B_1^j C_2^i) (I^{-130} - I^{-112} - I^{110}) + \\ + 2(B_2^i C_2^j + B_2^j C_2^i) (I^{020} - I^{002} - I^{200}) + \\ + 2(B_3^i C_2^j + B_3^j C_2^i) (I^{03-1} - I^{011} - I^{21-1}) + \\ + 4B_1^i B_1^j I^{-111} + 4(B_1^i B_2^j + B_1^j B_2^i) I^{001} + \\ + 4B_2^i B_2^j I^{1-11} + 4(B_1^i B_3^j + B_1^j B_3^i) I^{010} + \\ + 4(B_2^i B_3^j + B_2^j B_3^i) I^{100} + 4B_3^i B_3^j I^{11-1} + \\ + C_3^i C_3^j (I^{-1-15} + I^{3-11} + I^{-131} - 2I^{1-13} - 2I^{-113} + 2I^{111}) + \\ + (C_3^i C_1^j + C_3^j C_1^i) (2I^{2-12} - I^{4-10} + I^{030} - I^{0-14}) + \\ + (C_3^i C_2^j + C_3^j C_2^i) (2I^{-122} - I^{-140} - I^{-104} + I^{300}) + \\ + C_1^i C_1^j (I^{5-1-1} + I^{13-1} + I^{1-13} - 2I^{31-1} - 2I^{3-11} + 2I^{111}) + \\ + (C_1^i C_2^j + C_1^j C_2^i) (2I^{22-1} - I^{04-1} - I^{40-1} + I^{003}) + \\ + C_2^i C_2^j (I^{-15-1} + I^{-113} + I^{31-1} - 2I^{-131} - 2I^{13-1} + 2I^{111}).$$

В случае отрицательных индексов в (5) следует вместо дифференцирования выполнить интегрирование по параметрам x_k . Интегралы, входящие в выражения для E_U и E_L , приведены в приложении.

Расчет матричных элементов V^2 аналогичен нахождению $\langle i | V | j \rangle$. Например, для кулоновского взаимодействия

$$\langle i | 1/R_1^2 | j \rangle = I^{-111}(\alpha_1^i + \alpha_1^j, \alpha_2^i + \alpha_2^j, \alpha_3^i + \alpha_3^j),$$

$$\langle i | 1/R_1 R_2 | j \rangle = I^{001}(\alpha_1^i + \alpha_1^j, \alpha_2^i + \alpha_2^j, \alpha_3^i + \alpha_3^j).$$

Наконец, матричный элемент оператора $V(R_1)T + TV(R_1)$ можно записать в виде

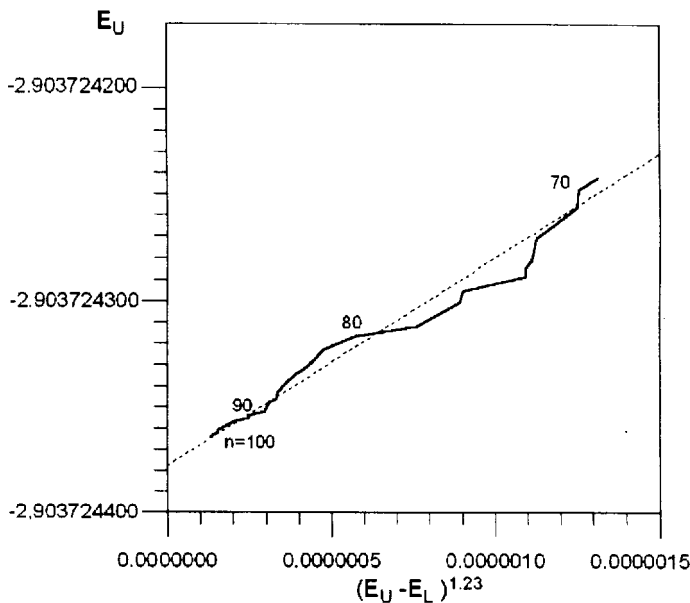
$$\langle i | V(R_1)T + TV(R_1) | j \rangle = \\ = 2(B_1^j U_1^{011} + B_2^j U_1^{101} + B_3^j U_1^{110}) - \\ - A^j U_1^{111} + C_3^j (U_1^{003} - U_1^{201} - U_1^{021}) + \\ + C_1^j (U_1^{300} - U_1^{120} - U_1^{102}) + C_2^j (U_1^{030} - U_1^{012} - U_1^{210}).$$

В случае кулоновского потенциала $1/R_1$

$$U_1^{klm} = I^{k-1,l,m}(\alpha_1^i + \alpha_1^j, \alpha_2^i + \alpha_2^j, \alpha_3^i + \alpha_3^j),$$

для экспоненциального потенциала $V(R_1) = \exp\{-\lambda_1 R_1\}$

$$U_1^{klm} = I^{k,l,m}(\alpha_1^i + \alpha_1^j + \lambda_1, \alpha_2^i + \alpha_2^j, \alpha_3^i + \alpha_3^j).$$



Зависимость между E_U и $E_U - E_L$ (пунктирная линия соответствует линейной м.н.к.-аппроксимации)

Численные расчеты

Оптимальные значения вариационных параметров определялись с помощью процедуры, сочетавшей в себе пошаговый и глобальный поиск [5, 11–13]. Согласно этой процедуре, пробная функция строится путем последовательного добавления членов в разложение (3). На каждом шаге из условия минимизации верхней оценки находятся только нелинейные параметры добавляемого члена при фиксированных параметрах ранее найденных членов. Для этой цели используется метод Монте-Карло с функцией распределения, подбираемой для каждого расчета на основании анализа фактически складывающегося распределения (самообучение алгоритма). Найденные таким образом нелинейные параметры используются и для расчета нижней оценки. Линейные же параметры находятся каждый раз независимо для E_U и E_L с помощью традиционных методов. Как показывают конкретные расчеты (примеры см. ниже), использование такого подхода позволяет значительно (в два и более раз) уменьшить число членов в разложении (3) по сравнению со случаем, когда нелинейные параметры не варьируются, а задаются на некоторой предопределенной сетке, выбираемой тем или иным способом.

В качестве одного из примеров приведем результаты расчета для атома гелия с бесконечно тяжелым ядром. Полученные при $n=100$ оценки: $E_U = -2,903724364$ а.е., $E_L = -2,903741$ а.е. (при расчете E_L использовалось значение энергии первого возбужденного состояния $E_1 = -2,17522938$ а.е.). Рисунок, на котором показана зависимость между верхней и нижней оценками энергии атома гелия $^\infty$ He при различном числе членов n в разложении (4), иллюстрирует процедуру экстраполяции к значению $E_\infty = -2,903724377(2)$ а.е. Как видно, благодаря близкому характеру сходимости E_U и E_L удается уменьшить погрешность расчета на полтора порядка. Достаточно узкий интервал, в пределах которого

заклучено точное значение энергии системы, может быть существенно сужен при увеличении числа членов в (3). Что касается верхней оценки, она является лучшей при числе членов $n = 100$ и относится к числу самых точных расчетов атома гелия (ср. [7, 9, 14, 15]).

Другой пример — экзотическая система $e^-e^-e^+$. Расчеты проводились до $n = 150$, причем $E_U(150) = -0,2620050694$ а.е., а $E_L(150) = -0,26200561$ а.е.; экстраполированная оценка $E_\infty = -0,2620050700(3)$ а.е. При расчете нижней оценки в качестве энергии первого возбужденного состояния взято значение $-0,25$ а.е., соответствующее развалу системы на e^+e^- и e^- .

Наконец, приведем также результаты расчета мезомолекулы водорода ($p + p + \mu$): $E_U(100) = -102,223723$ а.е., $E_L(100) = -102,2258$ а.е., $E_\infty = -102,223742(3)$ а.е.

Приложение

Интегралы I^{klm}

Интегралы $I^{klm}(x_1, x_2, x_3)$ с неотрицательными индексами являются однородными полиномами степени $k + l + m + 3$ относительно переменных

$$F_1 \equiv (x_2 + x_3)^{-1}, \quad F_2 \equiv (x_3 + x_1)^{-1}, \quad F_3 \equiv (x_1 + x_2)^{-1}.$$

Для нахождения верхней вариационной оценки в задачах с кулоновскими, экспоненциальными либо юкавскими потенциалами требуются следующие интегралы и их комбинации (все интегралы приведены с точностью до числового множителя $16\pi^2$):

$$\begin{aligned} I^{000} &= F_1 F_2 F_3, \\ I^{111} &= 2I^{000} \left((F_1 + F_2)(F_2 + F_3)(F_3 + F_1) - F_1 F_2 F_3 \right), \\ I^{011} &= I^{000} (F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_1 + 2F_1^2), \\ I^{101} &= I^{000} (F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_1 + 2F_2^2), \\ I^{110} &= I^{000} (F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_1 + 2F_3^2), \\ I^{120} + I^{102} - I^{300} &= 2I^{111} - 8I^{000} F_2 F_3 (F_2 + F_3), \\ I^{012} + I^{210} - I^{030} &= 2I^{111} - 8I^{000} F_3 F_1 (F_3 + F_1), \\ I^{201} + I^{021} - I^{003} &= 2I^{111} - 8I^{000} F_1 F_2 (F_1 + F_2). \end{aligned}$$

Для записи интегралов с отрицательными индексами удобно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv (x_2 - x_3)^{-1}, \quad G_2 \equiv (x_3 - x_1)^{-1}, \quad G_3 \equiv (x_1 - x_2)^{-1}, \\ S_{C_1}^{[n]} &= G_1^n \ln \frac{F_2}{F_3} - G_1^{n-1} F_3 - \dots - \frac{1}{n-1} G_1 F_3^{n-1}, \\ S_{E_1}^{[n]} &= G_1^n \ln \frac{F_2}{F_3} - G_1^{n-1} F_2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} G_1 F_2^{n-1}, \\ S_1^{[n]} &= S_{C_1}^{[n]} + S_{E_1}^{[n]}, \\ N_1^{[n]} &= \frac{1}{n} \left(F_3^n \ln \frac{F_1}{F_2} - F_2^n \ln \frac{F_3}{F_1} - S_{C_3}^{[n]} + (-1)^{n-1} S_{E_2}^{[n]} \right); \end{aligned}$$

$S_{C_2}^{[n]}, S_{C_3}^{[n]}, S_{E_2}^{[n]}, S_{E_3}^{[n]}, S_2^{[n]}, S_3^{[n]}, N_2^{[n]}, N_3^{[n]}$ можно получить путем циклических перестановок индексов 1, 2, 3.

Для нахождения нижней вариационной оценки нужны следующие интегралы и их комбинации:

$$\begin{aligned}
I^{001} &= I^{000}(F_2 + F_3), \\
I^{-111} &= F_1^3 S_1^{[1]} - F_1 S_1^{[3]} + I^{000} \left(F_1 + \frac{1}{2}(F_2 + F_3) \right), \\
I^{020} + I^{002} - I^{200} &= 2I^{011} - 4I^{000} F_2 F_3, \\
I^{110} + I^{1-12} - I^{3-10} &= 2I^{000} F_1 (F_3 + 2F_2) + 4F_2^3 S_2^{[2]} - 4F_2^2 S_2^{[3]}, \\
I^{12-1} + I^{101} - I^{30-1} &= 2I^{000} F_1 (F_3 + 2F_2) - 4F_3^3 S_3^{[2]} - 4F_3^2 S_3^{[3]}, \\
I^{300} + 2I^{-122} - I^{-140} - I^{-104} &= 4I^{111} F_1 (F_3 + 2F_2) - 16I^{000} F_1 (F_2^2 + F_3^2) - 32F_1^3 S_1^{[1]}, \\
2I^{111} + I^{13-1} + I^{1-13} - 2I^{31-1} - 2I^{3-11} &= 4(I^{120} + I^{102} - I^{300} - I^{111}) + \\
&+ 12F_2 \left(-2S_{E2}^{[1]} F_2^4 + 3S_{E2}^{[2]} F_2^3 - 3S_{E2}^{[4]} F_2 + 2S_{E2}^{[5]} \right) + \\
&+ 12F_3 \left(-2S_{C3}^{[1]} F_3^4 - 3S_{C3}^{[2]} F_3^3 + 3S_{C3}^{[4]} F_3 + 2S_{C3}^{[5]} \right), \\
I^{5-1-1} &= 60 \left\{ \frac{1}{x_1} \left[N_1^{[5]} - F_2 F_3 \left(\frac{F_2^3}{4} + \frac{F_2^2 F_3}{6} + \frac{F_2 F_3^2}{6} + \frac{F_3^3}{4} \right) \right] + \right. \\
&+ \frac{1}{x_1^2} \left[N_1^{[4]} - F_2 F_3 \left(\frac{F_2^2}{3} + \frac{F_2 F_3}{4} + \frac{F_3^2}{3} \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{x_1^3} \left[N_1^{[3]} - F_2 F_3 \left(\frac{F_2}{2} + \frac{F_3}{2} \right) \right] + \frac{1}{x_1^4} \left[N_1^{[2]} - F_2 F_3 \right] + \\
&\left. + \frac{1}{x_1^5} N_1^{[1]} + \frac{1}{x_1^6} \left[\text{dilog} \frac{F_2}{F_1} + \text{dilog} \frac{F_3}{F_1} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{F_2}{F_3} + \frac{\pi^2}{6} \right] \right\},
\end{aligned}$$

где $\text{dilog}(z) \equiv \int_1^z \ln x \, dx / (1-x)$ — дилогарифмическая функция. Остальные интегралы и их комбинации можно получить путем циклических перестановок индексов 1, 2, 3.

В случаях, когда $\max(x_1/x_2, x_1/x_3) < 0,3$, формула для I^{5-1-1} может привести при численных расчетах к значительным потерям точности за счет ошибок округления. Поэтому в данной области параметров целесообразно пользоваться выражением

$$\begin{aligned}
I^{5-1-1} &= 30 \times \\
&\times \left\{ W + F_3 \left[32S_{N1}^{[5]} - (7G_2^3 - F_2 G_2^2 - F_2^2 G_2 + 7F_2^3) F_2 G_2 \right] + \right. \\
&\quad + 2 \left[4S_{N1}^{[4]} + F_2 G_2 (G_2^2 - F_2^2) \right] F_3^2 + \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} \left[4S_{N1}^{[3]} - (F_2 + G_2) F_2 G_2 \right] F_3^3 + S_{N1}^{[2]} F_3^4 + \frac{2}{5} S_{N1}^{[1]} F_3^5 \right\},
\end{aligned}$$

где

$$W \equiv -\frac{1}{30x_3^6} \sum_{m=1,3,\dots} v^m \frac{(m+5)!}{m!(m+6)} \left[\ln \left(\frac{1+u}{1+uv} \right) + J_{m+6} \right].$$

Обычно в этом разложении требуется не более 10 членов. Остальные введенные величины находятся по формулам

$$\begin{aligned}
S_{N1}^{[n]} &= 2C_1^n \ln \frac{B_2}{A_2} - C_1^{n-1} (F_1 + G_1) - \\
&- \frac{C_1^{n-2}}{2} (F_2^2 - G_2^2) - \dots - \frac{C_1}{n-1} (F_2^{n-1} + (-1)^n G_2^{n-1}), \\
C_1 &= 1/2x_1, \quad J_n = u \left(\frac{1}{n-1} - J_{n-1} \right), \quad n = 2, 3, \dots, \\
J_1 &= u \ln \frac{u+1}{u}, \quad u = \frac{x_3}{x_2}, \quad v = \frac{x_1}{x_3}.
\end{aligned}$$

Авторы благодарят Э. В. Игнатъева за помощь на начальном этапе работы, а также А. М. Фролова за стимулирующие дискуссии.

Литература

1. Temple G. // Proc. Roy. Soc. 1928. **119**. P. 276.
2. Delves L.M. // Adv. Nucl. Phys. 1973. **5**. P. 1.
3. Tang Y.C., Schmid E.W., Herndon R.C. // Nucl. Phys. 1965. **65**. P. 203.
4. Delves L.M., Blatt J.M., Pask C. // Phys. Lett. 1969. **28B**. P. 472.
5. Колесников Н.Н., Тарасов В.И. // Ядерная физика. 1982. **35**. С. 609.
6. Dalitz R.H., Downs B.W. // Phys. Rev. 1958. **111**. P. 967.
7. Thakkar A.J., Smith V.H. // Phys. Rev. 1977. **A15**. P. 16.
8. Колесников Н.Н., Копылов В.А. // Изв. вузов, Физика. 1983. № 5. С. 36.
9. Копылов В.А., Фролов А.М., Колесников Н.Н. // Изв. вузов, Физика. 1985. № 10. С. 114.
10. Frolov A.M., Smith V.H. // J. Phys. B: At. Mol. Phys. 1995. **28**. P. L449.
11. Кукулин В.И. // Изв. АН СССР, сер. физ. 1975. **39**. С. 535.
12. Kukulin V.I., Krasnopol'sky V.M. // J. Phys. G.: Nucl. Phys. 1977. **G3**. P. 795.
13. Колесников Н.Н., Тарасов В.И., Старосотников М.И. Деп. ВИНТИ № 3832-80. М., 1980.
14. Frankowski K., Pekeris C.L. // Phys. Rev. 1966. **146**. P. 46.
15. Schwarz C. // Phys. Rev. 1962. **128**. P. 1146.

Поступила в редакцию
27.03.98