

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 621.372.2

**СИНТЕЗ ТРЕХМЕРНОГО ВОЛНОВОДНОГО ПЕРЕХОДА**

**А.Н. Боголюбов, И.А. Буткарев**

(кафедра математики)

E-mail: butkaryov@mail.ru

**Рассматривается задача синтеза согласующего волноводного перехода, соединяющего два однородных металло-диэлектрических волновода с различными диэлектрическими заполнениями. Синтезируется геометрия и вид заполнения перехода, при которых достигается наилучшее согласование волноводов. Приводятся примеры решения конкретных задач.**

Рассмотрим задачу синтеза согласующего волноводного перехода, соединяющего два металло-диэлектрических волновода. Будем предполагать, что граница волноводов и волноводного перехода достаточно гладкая и идеально проводящая. Волноводы считаем однородными, т. е. их заполнение и геометрия поперечного сечения зависят только от поперечных координат. Заполнение перехода может зависеть как от поперечных, так и от продольных координат. Такая постановка является достаточно общей и позволяет рассматривать задачу синтеза весьма широкого класса волноводных переходов, применяющихся в сверхвысокочастотной электродинамике, волоконной и интегральной оптике. Отметим, что настоящая статья является развитием работы [1], посвященной решению задачи математического проектирования волноводного перехода между двумя металлическими волноводами без заполнения.

Введем цилиндрическую систему координат, ось которой совпадает с осью рассматриваемой волноводной системы, а начало соответствует входному сечению волноводного перехода. Левый волновод будем называть входным, а правый — выходным. Пусть граница поперечного сечения входного волновода описывается функцией  $\eta(\varphi, 0)$ , а диэлектрическое заполнение — функцией  $\varepsilon(r, \varphi, 0)$ . Граница поперечного сечения и диэлектрическое заполнение выходного волновода описываются соответственно функциями  $\eta(\varphi, L)$  и  $\varepsilon(r, \varphi, L)$ , где  $L$  — длина волноводного перехода, которая считается заданной. Граница поперечного сечения перехода описывается функцией  $\eta(\varphi, z)$ , а диэлектрическое заполнение — функцией  $\varepsilon(r, \varphi, z)$ . В дальнейшем будем предполагать, что функции  $\eta$  и  $\varepsilon$  обладают производными до второго порядка включительно.

Поскольку заполнение перехода является достаточно произвольным, мы уже не можем свести задачу к скалярной, как это сделано в работе [1], а должны рассматривать ее полную электродинамическую постановку. Рассматривая стационарную постановку задачи с временной зависимостью  $\exp(-i\omega t)$  и исключая из системы уравнений Максвелла в отсут-

ствии токов и свободных зарядов продольные компоненты  $(E_z, H_z)$  электромагнитного поля, получим систему из четырех уравнений в частных производных второго порядка относительно поперечных компонент  $(E_x, E_y, H_x, H_y)$  поля:

$$\Delta H_x + \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial y} \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} + k^2 \varepsilon \mu H_x + ik \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} E_y = 0, \tag{1}$$

$$\Delta H_y + \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial x} \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + k^2 \varepsilon \mu H_y - ik \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} E_x = 0, \tag{2}$$

$$\Delta E_x + \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial x} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial^2(\ln \varepsilon)}{\partial x \partial y} E_y + \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial y} \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{i}{k\varepsilon} \frac{\partial^2(\ln \varepsilon)}{\partial x \partial z} \frac{\partial H_y}{\partial x} + k^2 \mu \varepsilon E_x - \frac{i}{k\varepsilon} \frac{\partial^2(\ln \varepsilon)}{\partial x \partial z} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial z} \frac{\partial E_x}{\partial z} - ik\mu \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial z} H_y + \frac{\partial^2(\ln \varepsilon)}{\partial x^2} E_x = 0, \tag{3}$$

$$\Delta E_y + \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial x} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial^2(\ln \varepsilon)}{\partial x \partial y} E_x + \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial y} \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{i}{k\varepsilon} \frac{\partial^2(\ln \varepsilon)}{\partial y \partial z} \frac{\partial H_y}{\partial x} + k^2 \mu \varepsilon E_y - \frac{i}{k\varepsilon} \frac{\partial^2(\ln \varepsilon)}{\partial y \partial z} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial z} \frac{\partial E_y}{\partial z} + ik\mu \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial z} H_x + \frac{\partial^2(\ln \varepsilon)}{\partial y^2} E_y = 0, \tag{4}$$

$$0 < z < \infty,$$

$$E_t(P) = 0, \quad P \in \Sigma, \tag{5}$$

$$E_{x,y}(x, y, 0) = E_{x,y}^0(x, y), \quad H_{x,y}(x, y, 0) = H_{x,y}^0(x, y). \tag{6}$$

Здесь функции  $E_x^0, E_y^0, H_x^0, H_y^0$  задают распределение поля на выходе левого волновода,  $k = \omega/c$  — волновое число,  $\Sigma$  — боковая поверхность. Вместе с граничными условиями (5), начальными условиями (6) и условиями при  $z \rightarrow \infty$  система (1)–(4) образует начально-краевую задачу. Для ее решения используется метод конечных разностей [2].

Сделаем замену переменных в системе (1)–(4), которая позволит привести границу перехода к цилиндрической форме:

$$x = \frac{\eta\rho \cos \varphi}{r_0}, \quad y = \frac{\eta\rho \sin \varphi}{r_0}, \quad z = z, \quad (7)$$

где  $\rho = rr_0/\eta(\varphi, z)$ , а  $r_0$  — радиус полученного прямого кругового цилиндра. Легко убедиться, что преобразование переменных (7) является невырожденным.

Для того чтобы получить устойчивый конечно-разностный алгоритм решения прямой задачи расчета волноводного перехода, воспользуемся методом параболического приближения [1]. В результате получим постановку задачи в параболическом приближении, которую можно записать в матричном виде:

$$\begin{aligned} (1 + (\ln \eta)_\varphi^2) \mathbf{Y}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} \mathbf{Y}_{\varphi\varphi} - \frac{2}{\rho} (\ln \eta)_\varphi \mathbf{Y}_{\rho\varphi} + \\ + Q_1 \mathbf{Y}_\rho + Q_2 \mathbf{Y}_\varphi + Q_3 \mathbf{Y}_z + Q_4 \mathbf{Y} = 0, \\ M(\rho, \varphi, z) \in D, \\ E_t(P) = 0, \quad P \in \Sigma, \\ \mathbf{Y}(\rho, \varphi, 0) = \mathbf{Y}_0(\rho, \varphi), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\mathbf{Y} = \{H_x, H_y, E_x, E_y\}^T$  — четырехмерный вектор-столбец,  $Q_i$  ( $i = 1 \div 4$ ) — матрицы размерности  $4 \times 4$ ,  $\mathbf{Y}_0(\rho, \varphi)$  — заданный вектор-столбец, определяющий распределение поля на входе перехода,  $\bar{D} = D + \Sigma$  — область волноводного перехода, заключенная между сечениями  $z = 0$  и  $z = L$ , с боковой границей  $\Sigma$ .

В области  $\bar{D}$  вводится трехмерная разностная сетка  $\bar{\omega}_{\rho\varphi z} = \bar{\omega}_\rho \times \bar{\omega}_\varphi \times \bar{\omega}_z$ , где

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_\rho &\equiv \left\{ \rho = (n + 0.5)h_\rho; \quad h_\rho = \frac{r_0}{N+0.5}; \quad n = 0, \dots, N \right\}, \\ \bar{\omega}_\varphi &\equiv \left\{ \varphi = mh_\varphi; \quad h_\varphi = \frac{2\pi}{M}; \quad m = 0, \dots, M-1 \right\}, \\ \bar{\omega}_z &\equiv \left\{ z = n_z h_z; \quad h_z = \frac{L}{N_z}; \quad n_z = 0, \dots, N_z \right\}, \end{aligned}$$

и с помощью метода баланса строится консервативная разностная схема с весами [3]. При  $\sigma = 0.5$  (где  $\sigma$  — вес) полученная разностная схема аппроксимирует задачу (8) с точностью  $O(h_z^2 + (h_\rho^2 + h_\varphi^2)/\rho)$  во внутренних узлах области  $\bar{D}$  и с точностью  $O(h_\rho + h_\varphi^2 + h_z^2)$  на границе  $\Sigma$  этой области.

Построенная разностная начально-краевая задача представляет собой систему из  $4M(N+1)$  линейных алгебраических уравнений, матрица которой имеет блочно-ленточную структуру. Данная система решается с помощью метода исключения Гаусса, модифицированного с учетом структуры матрицы. Каждое решение системы позволяет сделать шаг  $h_z$  вдоль оси  $z$ . Решив  $N_z$  таких систем, получим распределение поля на выходе волноводного перехода. Таким образом, получается весьма экономичный и достаточно универсальный алгоритм, позволяющий

многократно решать прямую задачу расчета волноводного перехода в процессе его синтеза.

Задачу синтеза рассмотрим как задачу построения такого перехода, который обеспечивает максимальную передачу энергии с входного сечения перехода на выходное. Для этого используем метод регуляризации Тихонова [4]. Строим сглаживающий функционал:

$$f_\alpha(q) = \left(1 - \frac{A_2(q)}{A_1}\right)^2 + \alpha\Omega[q],$$

где  $q$  — набор параметров оптимизации,  $A_1$  — энергия поля во входном сечении,  $A_2(q)$  — энергия поля в выходном сечении,  $\alpha$  — параметр регуляризации,  $\Omega[q]$  — стабилизатор. В соответствии с методом регуляризации решением задачи синтеза считаем такой набор параметров оптимизации, который доставляет минимум сглаживающему функционалу:

$$q = \arg \inf_Q f_\alpha(\bar{q}),$$

где  $Q$  накладывает ограничения на параметры перехода.

Рассмотрим конкретную задачу синтеза перехода между двумя круглыми волноводами с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , имеющими различные однородные заполнения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Фиксируем длину перехода  $L$ . Построим переход, который имеет круглые сечения и однородное по сечению заполнение. Ищем профиль перехода в форме кубического сплайна, состоящего из трех частей:

$$\eta(z) = \begin{cases} r_1, & z \leq 0, \\ a_1 z^3 + r_1, & 0 < z \leq z_1, \\ a_2 z^3 + b_2 z^2 + c_2 z + d_2, & z_1 < z \leq z_2, \\ a_3 z^3 + b_3 z^2 + c_3 z + d_3, & z_2 < z \leq L, \\ r_2, & z > L. \end{cases}$$

Коэффициенты в этой формуле подбираются из условия гладкости второго порядка. Аналогичным образом строится функция диэлектрической проницаемости. В результате получаем четыре параметра оптимизации:  $q = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ . На параметры оптимизации накладываются естественные ограничения:

$$Q = \{0 < z_1 < z_2 < L; \quad 0 < z_3 < z_4 < L\}.$$

Для поиска оптимального набора параметров применяется метод скользящего допуска, основанный на методе Нелдера и Мида [5].

Рассмотрим согласующий переход между круглыми волноводами со следующими параметрами:

$$r_1 = 0.5, \quad \varepsilon_1 = 2, \quad r_2 = 0.55, \quad \varepsilon_2 = 2.1.$$

Пусть через входной волновод распространяется ТМ-мода с  $k = 1000$ ,  $h = 1414.2$ . Пусть  $L = 2$ . В качестве первого приближения при оптимизации используются следующие параметры:

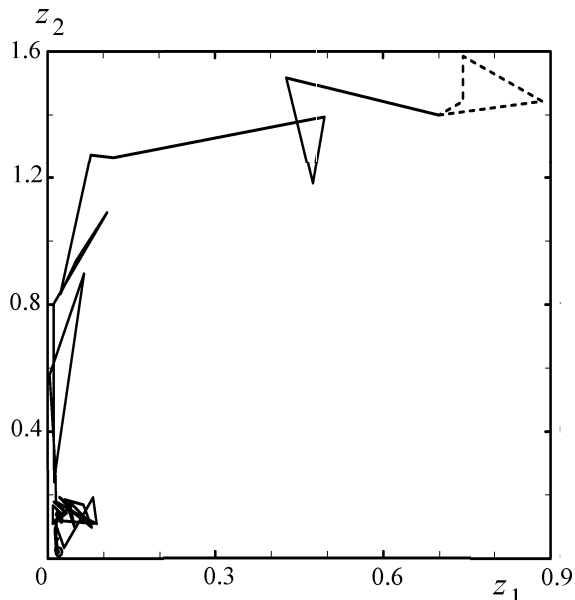


Рис. 1. Проекция траектории поиска на плоскость  $z_1z_2$  (характеризующая изменение формы перехода)

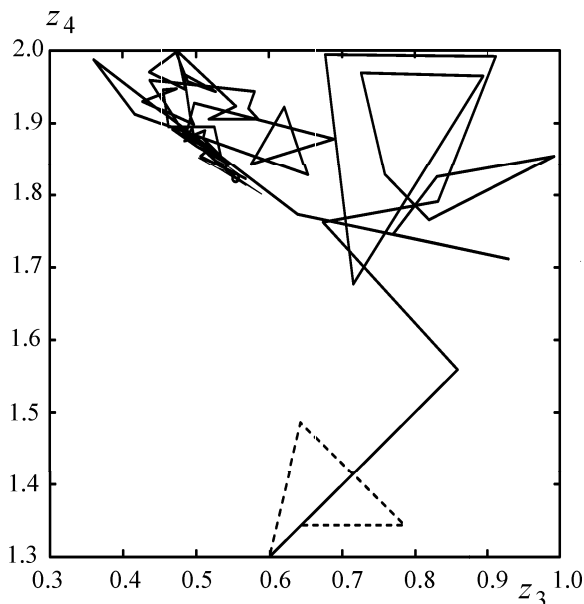


Рис. 2. Проекция траектории поиска на плоскость  $z_3z_4$  (характеризующая изменение диэлектрического заполнения)

$q_0 = \{0.7, 1.4, 0.6, 1.3\}$ . Для решения данной конкретной задачи была выбрана сетка с  $N = 15$ ,  $M = 24$ ,  $N_z = 100$ . На рис. 1 и 2 представлена траектория поиска решения задачи синтеза. Как можно видеть, форма перехода (рис. 1) в данном случае оказывает большее влияние на характеристики перехода, чем заполнение (рис. 2). Пунктиром на этих рисунках обозначено начальное приближение.

Рисунки 3 и 4 иллюстрируют изменение геометрии и заполнения перехода в процессе оптимизации. Пунктиром обозначены соответствующие профили до оптимизации.

Кривые на рис. 3 и 4 подтверждают вывод, сделанный в отношении рис. 1 и 2.

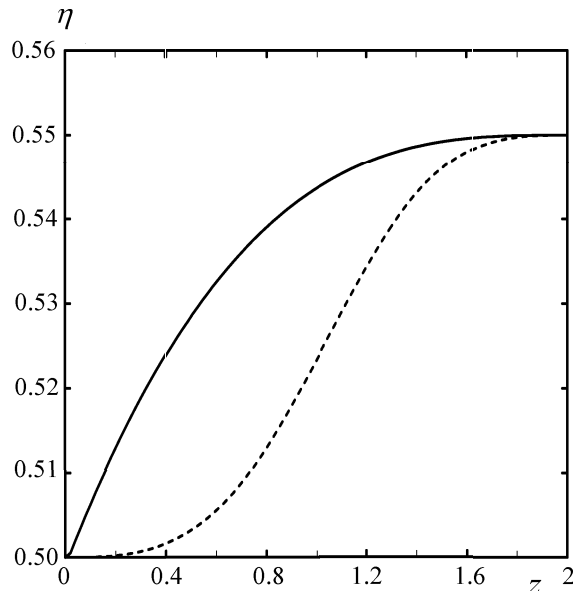


Рис. 3. Профиль перехода

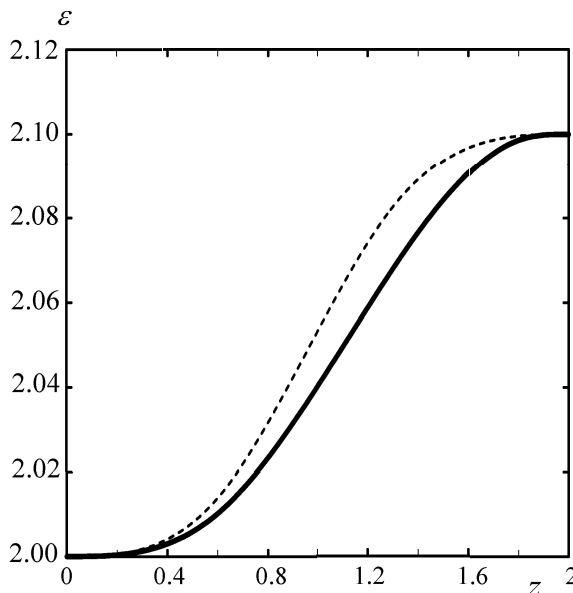


Рис. 4. Профиль заполнения

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 00-01-00111).

#### Литература

1. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Минаев Д.В. // Вестн. Моск. ун-та. 1997. № 4. С. 51 (Moscow University Physics Bull. 1997. No. 4. P. 71).
2. Боголюбов А.Н., Красильникова А.В., Минаев Д.В., Свешников А.Г. // Матем. моделирование. 2000. **12**, № 1. С. 13.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
4. Тихонов А.Н., Арсенин А.А. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
5. Боголюбов А.Н., Красильникова А.В., Минаев Д.В., Свешников А.Г. // Радиотехника. 1997. № 1. С. 81.

Поступила в редакцию 03.07.01