УДК 550.343

РЕЗОНАНСНЫЕ ТРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЕЙСМОВОЛН В ВЯЗКОУПРУГИХ ГЕОСРЕДАХ

С. А. Арсеньев, Н. К. Шелковников

(кафедра физики моря и вод суши)

Теоретически смоделированы нелинейные параметрические взаимодействия сейсмоволн, наблюдаемые в реальных геосредах. Получены формулы для конкретных расчетов.

Недавние экспериментальные исследования особенностей нелинейных взаимодействий сейсмоволн в геосредах показали, что возможны их трехволновые взаимодействия, обусловленные нелинейностью [1–3], в частности наблюдается эффект распадной неустойчивости высокочастотной волны, позволяющий уверенно выделять сигналы на низких частотах за счет снижения уровня высокочастотных сейсмических шумов [4] и увеличения мощности низкочастотного сигнала. Подобный эффект позволяет реализовать идею создания параметрических приемников низкочастотных сейсмических волн и расширить арсенал вибровоздействий на нефтегазоносные пласты [5]. Представляется важным поэтому изучить проблему параметрических взаимодействий теоретически, используя достаточно реалистическую модель геосреды.

В настоящей работе мы будем использовать нелинейную модель вязкоупругой геосреды, предложенную нами ранее в работах [6, 7], где было получено следующее нелинейное эволюционное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial^2 u^2}{\partial x \partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_* \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

описывающее процесс распространения сейсмических волн вдоль определенного направления x. В (1) обозначено: $\beta = 1/2$, $c^2 = \mu/\rho$ — скорость сейсмических волн, μ — модуль сдвига, $\omega_* = \mu/\eta_2 = 1/\vartheta$ (время релаксации), u — скорость деформаций геосреды [6, 7].

Будем искать решение уравнения (1) в виде суперпозиции трех взаимодействующих волн:

$$u = A_1(x) \cos \xi_1 + A_2(x) \cos \xi_2 + A_3(x) \cos \xi_3 . \tag{2}$$

Здесь

$$A_i(x) = a_i(x) \exp(-k_i x), \tag{3}$$

$$\xi_i(x,t) = \omega_i t - k_i x + \varphi_i(x), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{4}$$

$$\omega_i = 2c^2 k_i / (\omega_*^2 + 4c^2 k_i^2)^{1/2} . \tag{5}$$

Частоты резонансно взаимодействующих волн удовлетворяют условию синхронизма: $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, а волновые векторы — условию $k_3 = k_1 + k_2 + \Delta$, где Δ — расстройка, определяемая с помощью дисперсионного соотношения (5).

Подставим (2) в (1). Используя метод медленно меняющихся амплитуд [8], получим

$$A_1' - \sigma_1 A_2 A_3 \sin \Phi + \delta_1 A_1 = 0, \tag{6}$$

$$A_2' - \sigma_2 A_1 A_3 \sin \Phi + \delta_2 A_2 = 0, \tag{7}$$

$$A_3' - \sigma_3 A_1 A_2 \sin \Phi + \delta_3 A_3 = 0 . \tag{8}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x и

$$\sigma_1 = \beta k_1 (k_3 - k_2)/2\omega_1, \qquad \delta_1 = \omega_* k_1 / 2\omega_1, \tag{9}$$

$$\sigma_2 = \beta k_2 (k_3 - k_1)/2\omega_2, \qquad \delta_2 = \omega_* k_2 / 2\omega_2, \tag{10}$$

$$\sigma_3 = \beta k_3 (k_1 + k_2)/2\omega_3, \qquad \delta_3 = \omega_* k_3 / 2\omega_3, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\Phi' - \Delta - [(\sigma_1 A_2 A_3 / A_1) + \\ &+ (\sigma_2 A_1 A_3 / A_2) - \sigma_3 A_1 A_2 / A_3)] \cos \Phi = 0 . \end{aligned} \tag{12}$$

При отсутствии трения ($\omega_* = 0$) уравнения (6)–(12) дают соотношения Мэнли–Роу [8], устанавливающие закон сохранения волнового действия (энергии, деленной на частоту):

$$c_1^2 (A_1^2 - E_1^2)/\omega_1 = c_2^2 (A_2^2 - E_2^2)/\omega_2 = c_3^2 (A_3^2 - E_3^2)/\omega_3 . \tag{13}$$

Здесь E_i — амплитуды волн, возбуждающихся в источнике при $x = 0$. Из (13) видно, что если амплитуда и энергия имеющейся в геосреде высокочастотной волны ω_3 уменьшаются, то энергия переходит одновременно в низкочастотные волны ω_1 и ω_2 и их амплитуды A_1 и A_2 возрастают. Верно и обратное. Но возникновение волн с частотами, жестко связанными с частотой внешнего воздействия, есть по определению параметрическое возбуждение волн [8]. Оно всегда возникает в нелинейной среде с дисперсией при наличии интенсивной волны накачки.

Рассмотрим подробнее случай низкочастотной накачки, когда в геосреде имеется мощная волна с частотой ω_2. Пусть $A_2 \equiv A_p = \text{const}$ и $\varphi_2 = \text{const}$. Тогда при $\Delta = 0$, $\Phi = -\pi/2$ уравнения (6)–(12) дают

$$A_1' = -\sigma_1 A_3 A_p, \qquad A_3' = \sigma_3 A_1 A_p . \tag{14}$$

Система уравнений (14) имеет решение

$$A_1 = A_{10} \cos(|\Gamma| x), \tag{15}$$

$$A_3 = (k_3/k_1)^{1/2} A_{10} \sin(|\Gamma| x), \tag{16}$$

в котором

$$\Gamma = \frac{\beta}{2} \frac{A_p}{c^2} (\omega_1 \omega_3)^{1/2} = \frac{A_p}{4} \left[\frac{\rho^2}{\mu^2} \omega_1 (\omega_1 + \omega_p) \right]^{1/2} . \tag{17}$$

Решение (15), (16) при $x=0$ удовлетворяет условиям

$$A_1(0)=A_{10}\,,\qquad A_3(0)=0\,,$$
$$A_1'(0)=0\,,\qquad A_3'(0)=\sigma_3 A_{10}A_p\,. \tag{18}$$

Решение (15), (16) означает, что взаимодействие волн в геосреде проявляется в виде пространственных биений с периодом $\pi/|\Gamma|$, который уменьшается с увеличением амплитуды волны накачки A_p и плотности геосреды ρ и уменьшением модуля сдвига μ. Из (16) легко найти соотношение между максимальными амплитудами взаимодействующих волн:

$$\left(A_3^2\right)_{\max}/\left(A_1^2\right)_{\max}=k_3/k_1=\omega_3/\omega_1\,, \tag{19}$$

которое соответствует соотношениям Мэнли–Роу (13). Поскольку максимальная частота высокочастотного сигнала ω_3 превышает частоту ω_1 ($\omega_3=\omega_1+\omega_2>\omega_1$), из (19) следует, что мощность сигнала ω_3 превышает мощность сигнала ω_1: $(A_3^2)_{\max}>(A_1^2)_{\max}$. Подобное преобразование энергии можно использовать для создания параметрического усилителя с одновременным преобразованием частоты. На его вход подаются сигналы ω_2 и ω_1. На выходе, на определенном расстоянии от источника волн, равном

$$x_0=(2n+1)\pi/2|\Gamma|\,,\quad n=0,1,2\ldots,$$

получается усиленный сигнал частоты ω_3. Максимальный коэффициент усиления по мощности определяется соотношением ω_3/ω_1. Опыт создания подобных параметрических усилителей в радиофизике [8, 9] показал, что они обладают высокой стабильностью и низким уровнем шумов.

Большой практический интерес представляет случай высокочастотной накачки, когда в геосреде имеется мощная волна с частотой ω_3 и амплитудой $A_3\equiv A_h\gg A_{10}$, где A_{10} — амплитуда волны с частотой ω_2 у источника в точке $x=0$: $A_1(0)=A_{10}$. Предполагается, что волны с частотой ω_2 в источнике нет: $A_2(0)=0$. Она может возникнуть в геосреде только в результате нелинейных взаимодействий. Уравнения (6)–(12) при условиях $\varphi_3=\mathrm{const}$, $\Phi(0)=\pi/2$ и $\Delta=0$ имеют вид

$$A_1'=\sigma_1A_2A_h\,,\qquad A_2'=\sigma_2A_1A_h\,. \tag{20}$$

Решение системы (20) есть

$$A_1(0)=A_{10}\,\mathrm{ch}(xA_h\sqrt{\sigma_1\sigma_2})\,,$$
$$A_2=\sqrt{\sigma_2/\sigma_1}A_{10}\,\mathrm{sh}(xA_h\sqrt{\sigma_1\sigma_2})\,. \tag{21}$$

Оно удовлетворяет граничным условиям: при $x=0$

$$A_1(0)=A_{10}\,,\qquad A_2(0)=0\,,$$
$$A_1'(0)=0\,,\qquad A_2'(0)=\sigma_2A_{10}A_h\,. \tag{22}$$

Из формул (21) следует, что по мере распространения сейсмоволны в геосреде происходит экспоненциальное нарастание амплитуд волн на обеих частотах (ω_1 и ω_2), которые увеличивают свою энергию за счет волны накачки. Коэффициент усиления определяется скоростью нарастания амплитуд волн ω_1 и ω_2:

$$\Gamma^0=\frac{\beta}{2}A_h\sqrt{\frac{k_1(k_3-k_2)(k_3-k_1)k_2}{\omega_1\omega_2}}\,. \tag{23}$$

При отсутствии расстройки ($\Delta-0$) формулу (23) можно записать в виде

$$\Gamma^0=\frac{A_h}{4}\sqrt{\frac{k_1^2k_2^2}{\omega_1\omega_2}}=\frac{A_h}{4}\sqrt{\frac{\omega_1\omega_2}{c^2}}\,. \tag{24}$$

Отсюда следует, что скорость нарастания амплитуды зависит от частоты по закону $\Gamma_0\simeq(\omega_1\omega_2)^{1/2}=[(\omega_1(\omega_h-\omega_1)]^{1/2}$. Это выражение достигает максимума при $\omega_1=\omega_h/2$. Следовательно,

$$(\Gamma_0)_{\max}=\frac{A_h}{8}\,\omega_h\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\,, \tag{25}$$

т. е. скорость нарастания амплитуд низкочастотных волн увеличивается с ростом амплитуды и частоты волны накачки, а также плотности геосреды и уменьшается с ростом модуля сдвига.

Полученные формулы показывают, что в вязкоупругих геосредах возможна распадная неустойчивость высокочастотной волны ω_h, при которой энергия перебрасывается в низкочастотную область спектра, порождая субгармонику $\omega_h/2$, что действительно наблюдается в экспериментах [1–3]. Для того чтобы в общем случае $\Delta\neq0$, $\delta_1\neq0$, $\delta_2\neq0$ определить условия неустойчивости, необходимо воспользоваться методами исследования на неустойчивость систем третьего порядка, подобных (6)–(12), которые разработаны в теории нелинейных колебаний и волн [8–10]. Выпишем здесь конечный результат соответствующего исследования в виде условия параметрического усиления бегущих сейсмических волн при высокочастотной накачке:

$$|\Delta|<(\delta_1+\delta_2)\sqrt{(\sigma_1\sigma_2/\delta_1\delta_2)A_h-1}\,. \tag{26}$$

Это условие, учитывая определения (9)–(12), можно записать в виде

$$|k_3-k_1-k_2|<\frac14\left(\frac{k_1}{\omega_1}+\frac{k_2}{\omega_2}\right)\sqrt{(k_3-k_2)(k_3-k_1)A_h-1}\,. \tag{27}$$

Оно аналогично по форме условию неустойчивости параметрически возбуждаемого колебательного контура [11]. Из (26), (27) следует, что параметрическое усиление невозможно при амплитуде накачки A_h меньше порогового значения

$$A_t=\sqrt{\frac{\delta_1\delta_2}{\sigma_1\sigma_2}}=2\omega_*\sqrt{\frac{1}{(k_3-k_2)(k_3-k_1)}}\,. \tag{28}$$

Как видим, пороговое значение амплитуды возрастает с ростом частоты трения ω_* (уменьшением времени релаксации геосреды ϑ) и с ростом расстройки Δ.

Таким образом, распадная неустойчивость высокочастотной волны в вязкоупругой среде возможна, если значение амплитуды этой волны превышает порог (28). В противном случае нелинейные взаимодействия волн проявляются в виде пространственных биений их амплитуд и мощностей. Формулы для расчетов биений легко получить из (6)–(12), рассматривая случай $\Delta - 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$. Для систем, аналогичных (6)–(12), он был впервые исследован в оптике и радиофизике [12].

Пусть в источнике при $x = 0$ имеют место условия

$$\begin{aligned} &A_1(0) = A_{10}\,, \qquad A_2(0) = 0\,, \\ &A_h(0) = A_{h0}\,, \qquad \Phi(0) = \Phi_0 = \pi/2\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Решение системы (6)–(12) при условиях (29), $\delta_1 = \delta_2 = 0$ и $\Delta = 0$ выражается через эллиптические функции sn, cn и dn:

$$A_1 = (\sigma_1/\sigma_3)^{1/2}\frac{A_{h0}}{k}\,\mathrm{dn}\left[K(k) - A_{h0}\frac{x}{k}(\sigma_1\sigma_2)^{1/2}\right]\,, \tag{30}$$

$$A_2 = (\sigma_2/\sigma_3)^{1/2}A_{10}\,\mathrm{cn}\left[K(k) - A_{h0}\frac{x}{k}(\sigma_1\sigma_2)^{1/2}\right]\,, \tag{31}$$

$$A_3 \equiv A_h = A_{h0}\,\mathrm{sn}\left[K(k) - A_{h0}\frac{x}{k}(\sigma_1\sigma_2)^{1/2}\right]\,. \tag{32}$$

Здесь

$$K(k) = \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \tag{33}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. Решение (30)–(33) описывает биения амплитуд взаимодействующих волн с пространственным периодом

$$\Lambda_0 \cong K(k)/A_{h0}\,(\sigma_1\sigma_2)^{1/2}\,. \tag{34}$$

Максимальное усиление низкочастотного сигнала определяется формулой

$$(I_1)_{\max}/I_{10} = 1 + \omega_1 A_{h0}^2/\omega_h A_{10}^2\,. \tag{35}$$

Следовательно, если отношение $\omega_1\omega_h$ не слишком мало, кпд параметрического усилителя низкочастотного сейсмосигнала может достигать единиц и десятков процентов. Потери и отклонения от условий синхронизма ухудшают характеристики усилителя.

Благодарим Российский фонд фундаментальных исследований за поддержку (грант № 95-05-16028а).

Литература

1. *Береснев И. А., Соловьев В. С., Шалашов Г. М.* // Проблемы нелинейной сейсмики. М., 1987. С. 180.
2. *Соловьев В. С.* // Там же. С. 164.
3. *Николаев А. В.* // Вестн. АН СССР. 1984. № 10. С. 5.
4. *Рыкунов Л. Н.* Микросейсмы. М., 1967.
5. *Николаевский В. Н.* // ДАН СССР. 1989. **307**, № 3. С. 570.
6. *Арсеньев С. А., Рыкунов Л. Н., Шелковников Н. К.* // ДАН. 1994. **338**, № 2. С. 225.
7. *Арсеньев С. А., Вахрушев М. М., Шелковников Н. К.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1996. № 6. С. 80.
8. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. М., 1990.
9. *Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.* Основы теории колебаний. М., 1978.
10. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. М., 1964.
11. *Ахманов С. А., Кравцов Ю. А.* // Изв. вузов, Радиофизика. 1962. **5**, № 2. С. 144.
12. *Погорелова Э. В., Хохлов Р. В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1962. № 5. С. 62.

Поступила в редакцию
09.09.96

УДК 550.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВНУТРЕННЕГО ЯДРА ЗЕМЛИ ДЛЯ НЕРАВНОВЕСНОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

С. Л. Пасынок

(ГАИШ)

Решена задача о влиянии оболочки земного ядра на колебания внутреннего ядра Земли. Получены уточненные (по сравнению с Шлихтером и Буссе) формулы для частот колебаний. Оказалось, что выбор модели оболочки мало влияет на частоту колебаний и значительно влияет на смещение ядра.

Введение

Знание строения и характера движения внутреннего ядра Земли важно для решения задач земного магнетизма, геофизики, астрономии. Вполне возможна связь этого явления с землетрясениями.

Методика исследований

Целью настоящей работы является оценка возможного смещения внутреннего ядра Земли и частот его свободных колебаний в поле тяготения твердой несимметричной оболочки Земли и жидкого ядра.