ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 535.417.2:621.375.826

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПЛОСКИХ РЕЗОНАТОРОВ КОЛЬЦЕВЫХ ЧИП-ЛАЗЕРОВ

Д. А. Алёшин, Н. В. Кравцов

(*кафедра оптики и спектроскопии*)

В работе аналитически исследуется устойчивость неплоских резонаторов кольцевых чип-лазеров. Получены в явном виде выражения для областей устойчивости таких резонаторов.

Введение

В последние годы все большее применение находят лазеры с объемными кольцевыми резонаторами, осевой контур которых не лежит в одной плоскости. Одной из разновидностей таких лазеров являются монолитные кольцевые лазеры (кольцевые чип-лазеры). Особенности применения и разработки как кольцевых чип-лазеров, так и твердотельных лазеров с диодной накачкой в целом обсуждаются в обзоре [1].

В настоящей работе рассматривается вопрос устойчивости кольцевых чип-ларезов, резонатор которых образован одним сферическим зеркалом и тремя плоскими зеркалами. Траектория лучей в подобном резонаторе изображена на рис. 1. Точка A отвечает отражению от сферического зеркала, а точки B, C и D — полным внутренним отражениям на гранях кристалла.

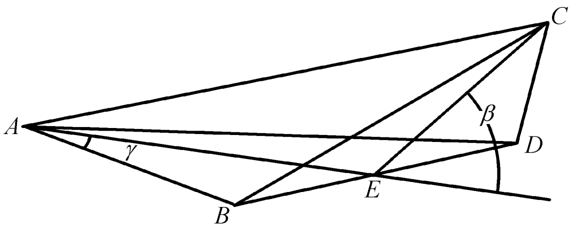

Рис. 1. Схема хода лучей в неплоском резонаторе кольцевого чип-лазера

В работе [2] описана методика расчета поляризационных характеристик подобных резонаторов, удобная для практического применения. Также достаточно хорошо изучены различные режимы генерации, реализуемые в подобных лазерах (см. ссылки к работе [1]). В данной работе рассматриваются вопросы устойчивости кольцевых чип-лазеров как с плоским, так и неплоским резонатором. Получены условия устойчивости таких резонаторов в удобном для практического применения виде, что, насколько нам известно, до этого не было проделано нигде.

Условия устойчивости резонаторов кольцевых чип-лазеров могут быть найдены так же, как в зеркальных резонаторах: с помощью матричного метода.

В общем случае резонатор описывается лучевой матрицей 4×4 [3]

$$\hat{M} = \prod_{i=1}^{N} \hat{m}_i,$$

где матрицы $\hat{m}_i$ определяют различные этапы распространения лучей в резонаторе.

В рамках гауссовой оптики, если ось оптической системы располагается в одной плоскости, можно рассматривать преобразование меридиональных проекций луча независимо. В таком случае чтобы учесть астигматизм, обусловленный сферическим зеркалом, необходимо вычисление двух матриц 2×2, описывающих характеристики резонатора в меридиональном и сагиттальном сечении пучка (в плоскости резонатора и перпендикулярной к ней). Соответствующие матрицы в нашем случае имеют вид [4]

$$\hat{M}_P = \begin{bmatrix} A_P & B_P \\ C_P & D_P \end{bmatrix} = \hat{F}_P \hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R\cos\gamma} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{2}{R\cos\gamma} & 1-\frac{2d}{R\cos\gamma} \end{bmatrix},$$

$$\hat{M}_S = \begin{bmatrix} A_S & B_S \\ C_S & D_S \end{bmatrix} = \hat{F}_S \hat{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2\cos\gamma}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -\frac{2\cos\gamma}{R} & 1-\frac{2\cos\gamma}{R} \end{bmatrix},$$

где γ — внутренний угол падения луча на сферическое зеркало с радиусом кривизны R, d — периметр резонатора.

Условие устойчивости плоского резонатора в общем случае запишется следующим образом [3]:

$$\begin{cases} -1 < \left[\frac{1}{2}(A_P + D_P)\right] < 1, \\ -1 < \left[\frac{1}{2}(A_S + D_S)\right] < 1. \end{cases}$$

Запишем условия устойчивости в частном случае кольцевого чип-лазера с плоским резонатором:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{d}{R\cos\gamma} < 2, \\ 0 < \dfrac{d\cos\gamma}{R} < 2. \end{cases} \Leftrightarrow d < 2R\cos\gamma.$$

Расчет устойчивости неплоского кольцевого резонатора

Задача нахождения областей устойчивости чип-лазера с неплоским резонатором значительно усложняется из-за пространственного поворота изображения при обходе резонатора. В этом случае нельзя рассматривать преобразование меридиональных проекций луча независимо, и резонатор в целом будет описываться лучевой матрицей 4×4. Составляя лучевую матрицу резонатора, ищем такой лучевой вектор, который самовоспроизводится после полного обхода контура резонатора. В каждом сечении вектор характеризуется четырьмя параметрами — двумя координатами и двумя углами наклона к перпендикулярным плоскостям [3].

Итоговая матрица резонатора записывается следующим образом:

$$\hat{M} = \hat{F}\prod_{i=1}^{4}\hat{\Gamma}_i, \quad \hat{\Gamma}_i = \hat{L}_i\hat{T}_i,$$

где $\hat{L}_i$ — матрица трансляции на расстояние l_i, $\hat{T}_i$ — матрица поворота на угол φ_i, $\hat{F}$ — матрица отражения от сферического зеркала с радиусом кривизны R.

Эти матрицы имеют следующий вид:

$$\hat{L}_i = \begin{bmatrix} 1 & l_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{T}_i = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & 0 & \sin\varphi_i & 0 \\ 0 & \cos\varphi_i & 0 & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & 0 & \cos\varphi_i & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_i & 0 & \cos\varphi_i \end{bmatrix},$$

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_P & 0 \\ 0 & \hat{F}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{R\cos\gamma} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\cos\gamma}{R} & 1 \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание, что $\hat{T}_i\hat{L}_j - \hat{L}_j\hat{T}_i = 0$, матрица резонатора сводится к произведению трех стандартных матриц:

$$\hat{M} = \hat{F}\hat{L}\hat{T},$$

где $\hat{L}$ — матрица трансляции на расстояние d, равное длине осевого контура резонатора, $\hat{T}$ — матрица поворота на угол φ, $\varphi = \sum_{i=1}^{4}\varphi_i$ — суммарный угол поворота плоскости изображения неплоским резонатором.

Произведение $\hat{F}\hat{L}$ имеет вид

$$\hat{F}\hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{M}_P & 0 \\ 0 & \hat{M}_S \end{bmatrix},$$

где $\hat{M}_P$ и $\hat{M}_S$ — двумерные матрицы, совпадающие с матрицами плоского резонатора.

Для нахождения собственных значений матрицы $\hat{M}$ необходимо решить уравнение $\det\left|\hat{M} - \lambda\hat{I}\right| = 0$, где $\hat{I}$ — единичная матрица.

В свою очередь собственные значения λ определяются следующим уравнением четвертой степени:

$$\lambda^4 - A\lambda^3 + B\lambda^2 - C\lambda + \det\hat{M} = 0, \tag{1}$$

где $A = C = \mathrm{Tr}\,\hat{M}$ — след матрицы $\hat{M}$, $\det\hat{M} = 1$, B — коэффициент при λ^2.

Преобразуем уравнение (1):

$$\left(\lambda + \lambda^{-1}\right)^2 - A\left(\lambda + \lambda^{-1}\right) + B - 2 = 0, \tag{2}$$

где коэффициенты A и B записываются так:

$$B = 2\left(2\cos^2\varphi + 2\frac{d^2}{R^2} - 2\frac{d}{R}\left[\cos\gamma + 1/\cos\gamma\right] + 1\right),$$

$$A = 2\cos\varphi\left(2 - \frac{d}{R}\left[\cos\gamma + 1/\cos\gamma\right]\right).$$

Известно, что в устойчивом резонаторе все собственные значения λ_k лучевой матрицы по модулю равны единице, поэтому корни характеристического уравнения могут быть представлены в виде

$$\exp(\pm i\theta_1), \quad \exp(\pm i\theta_2),$$

где θ_1 и θ_2 — действительные числа.

Если ввести обозначение $\cos\theta = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda^{-1})$, то уравнение (2) можно переписать так:

$$\cos^2\theta - \cos\theta\cos\varphi\left(2 - \frac{d}{R}(\cos\gamma + 1/\cos\gamma)\right) + {} + \cos^2\varphi - \frac{d}{R}(\cos\gamma + 1/\cos\gamma) + \frac{d^2}{R^2} = 0. \tag{3}$$

Резонатор устойчив, если оба решения квадратного уравнения для $\cos\theta$ действительны и по модулю меньше единицы.

Введем следующие обозначения:

$$x = \cos\theta, \quad \xi = \cos\gamma + 1/\cos\gamma, \quad \chi = d/R, \quad y = \cos\varphi.$$

Нетрудно заметить, что $\xi > 2$, $\chi > 0$, $-1 \leqslant \cos\varphi \leqslant 1$. В новых обозначениях уравнение (3) перепишется в виде

$$x^2 + xy(2 - \chi\xi) + y^2 - \chi\xi + \chi^2 = 0. \tag{4}$$

Решая уравнение (4) относительно x, получим решение:

$$x_{1,2} = \frac{y(2-\chi\xi) \pm \sqrt{D}}{2},$$

где $D = y^2(2-\chi\xi)^2 - 4\left(y^2 - \chi\xi + \chi^2\right)$.

Условие действительности $x_{1,2}$ запишется так:

$$\begin{cases} \chi > 0, & \text{если } y^2\xi^2 - 4 \geqslant 0, \\ \chi \leqslant -\dfrac{4\xi\left(1-y^2\right)}{y^2\xi^2-4}, & \text{если } y^2\xi^2 - 4 < 0. \end{cases}$$

Для нахождения областей устойчивости в явном виде необходимо решить следующие неравенства: $-1 < x_{1,2} < 1$ (предполагается, что $x_{1,2}$ — действительные числа).

Из четырех уравнений $x_{1,2} = \pm 1$ найдем зависимость χ от y. Уравнения $x_{1,2} = -1$ дают пару решений $\chi_{1,2} = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2-4}}{2}(y+1)$, а $x_{1,2} = 1$ дают $\chi_{3,4} = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2-4}}{2}(1-y)$ (индексы 1 и 3 отвечают знаку «+», индексы 2 и 4 — знаку «−»). Введем обозначение $\chi_5 = -\frac{4\xi(1-y^2)}{y^2\xi^2-4}$. Считая значение ξ фиксированным, будем рассматривать χ_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, как функции y. Исходя из этого можно получить, что при $\xi \leqslant 4/\sqrt{3}$ ($\gamma \leqslant \arccos\left(1/\sqrt{3}\right)$) резонатор устойчив, если ($\cup$ — знак объединения):

$$\begin{cases} \chi \in (0;\chi_4) \cup (\chi_1;\chi_5) \;\; \text{при} \;\; |y| \in \left[0;\, \sqrt{1-4/\xi^2}\right), \\ \chi \in (0;\chi_4) \cup (\chi_3;\chi_2) \cup (\chi_1;\chi_5) \\ \qquad\qquad \text{при} \;\; |y| \in \left[\sqrt{1-4/\xi^2};\, \dfrac{\xi - \sqrt{\xi^2-4}}{\xi}\right], \\ \chi \in (0;\chi_4) \cup (\chi_3;\chi_2) \;\; \text{при} \;\; |y| \in \left(\dfrac{\xi-\sqrt{\xi^2-4}}{\xi};\, 1\right], \end{cases} \tag{5}$$

а при $\xi > 4/\sqrt{3}$

$$\begin{cases} \chi \in (0;\chi_4) \cup (\chi_1;\chi_5) \;\; \text{при} \;\; |y| \in \left[0;\, \dfrac{\xi-\sqrt{\xi^2-4}}{\xi}\right], \\ \chi \in (0;\chi_4) \;\; \text{при} \;\; |y| \in \left(\dfrac{\xi-\sqrt{\xi^2-4}}{\xi};\, \sqrt{1-4/\xi^2}\right), \\ \chi \in (0;\chi_4) \cup (\chi_3;\chi_2) \;\; \text{при} \;\; |y| \in \left[\sqrt{1-4/\xi^2};\, 1\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Также следует отметить, что при $|y| = \frac{\xi - \sqrt{\xi^2-4}}{\xi}$ параметр χ достигает своего максимального значения $\chi_{\max} = 2\frac{\xi^2 - 2\xi\sqrt{\xi^2-4} - 2\xi}{\xi\left(\xi^2 - \xi\sqrt{\xi^2-4} - 2\xi\right)}$, а при $|y| = \sqrt{1-4/\xi^2}$ $\chi_i = 2/\xi$ $(i = 1, 2, \ldots, 4)$.

Схема хода лучей в неплоском резонаторе кольцевого чип-лазера представлена на рис. 1. Угол поворота поля определяется геометрией резонатора, и в рассматриваемом случае выражается следующим образом:

$$\varphi = 2(\theta_{AB} + \theta_{BC}),$$

где θ_{AB} и θ_{BC} — углы между плоскостями падения в вершинах A, B и B, C [2].

Введем следующие обозначения: $k = AE/CE$, $q = \tan\gamma$, $p = \cos\beta$, $s = \left(\sqrt{1+q^2}\sqrt{1+k^2q^2}\right)^{-1}$, где β — угол неплоскостности резонатора (угол между плоскостями ABD и BCD).

Тогда с учетом введенных обозначений легко показать, что:

$$\begin{aligned} \theta_{AB} &= \arccos\left(\frac{kqs + pqs}{\sqrt{1-\left(kq^2s - ps\right)^2}}\right), \\ \theta_{BC} &= \arccos\left(\frac{qs + kpqs}{\sqrt{1-\left(kq^2s - ps\right)^2}}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Обсуждение результатов

На рис. 2 в плоскости $y\chi$ графически изображены диаграммы устойчивости неплоских кольцевых резонаторов для двух различных значений угла падения луча на сферическое зеркало. Области 1, 2, 3 и 4 в соответствии с условием (5) являются областями устойчивости. Во всех остальных случаях резонатор является неустойчивым.

Из проведенных расчетов видно, что конфигурация областей устойчивости в плоскости $y\chi$ определяется только значением γ. Этот факт говорит о том, что подобные диаграммы универсальны для всех резонаторов с таким углом падения луча на сферическое зеркало. Точка в плоскости $y\chi$ определяется следующим набором параметров резонатора: AE, CE, β, γ и R (периметр резонатора d выражается через AE, CE, γ и β). Из представленных диаграмм и условия (5) видно, что при заданных k, β и γ (данные три параметра определяют угол поворота поля резонатором — см. (7)) можно подобрать такие значения d и R, что резонатор будет устойчив. В случае $\xi > 4/\sqrt{3}$ ($\gamma > \arccos\left(1/\sqrt{3}\right)$) надо использовать условие устойчивости (6). Из этого условия видно, что при $y \in \left[\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-4}}{\xi};\, \sqrt{1-4/\xi^2}\right]$ существует всего одна область значений χ вблизи нуля, при которых резонатор устойчив (рис. 2, *в*).

При $\gamma \to 0$ области неустойчивости исчезают, что обусловлено уменьшением астигматизма сферического зеркала.

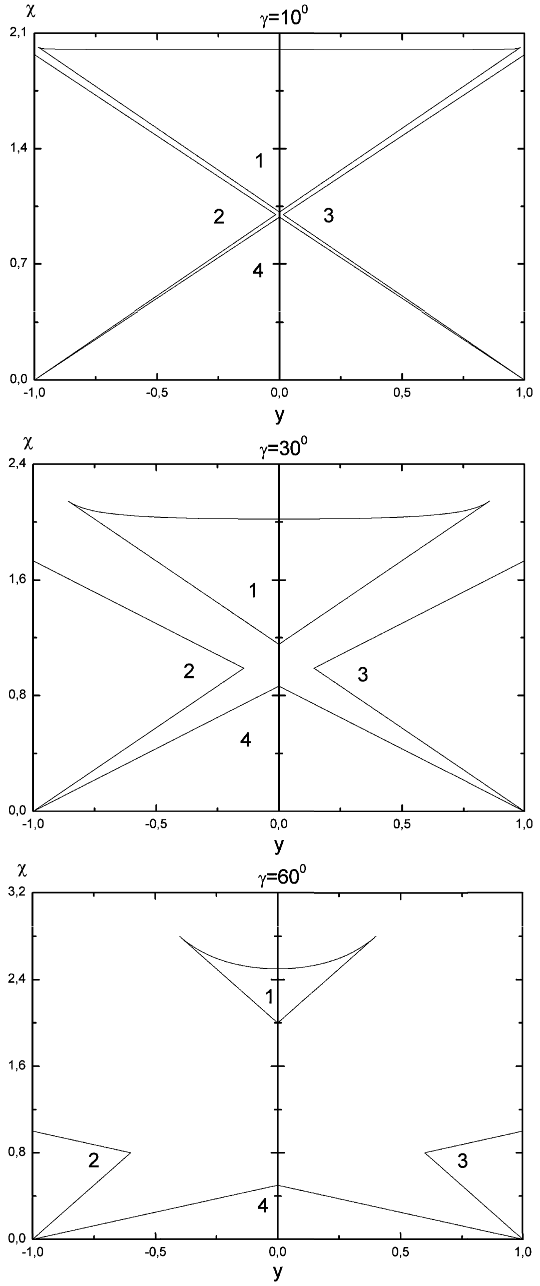

Рис. 2. Области устойчивости неплоского резонатора кольцевого чип-лазера: (*а*) $\gamma = 10^\circ$; (*б*) $\gamma = 30^\circ$; (*в*) $\gamma = 60^\circ$

Еще один предельный случай — случай плоского резонатора ($\beta = 0$). Данный случай отвечает нулевому углу поворота поля в резонаторе, т. е. $y = 1$. Условие устойчивости, получаемое для данного случая из условия (5) или (6), полностью совпадает с условием устойчивости плоского резонатора, которое было получено во введении ($\xi - \sqrt{\xi^2 - 4} = 2\cos\gamma$).

Выводы

В результате расчета было обнаружено, что в плоскости $y\chi$ (где y — косинус угла поворота поля в резонаторе, а χ — отношение периметра резонатора к радиусу кривизны сферического зеркала) у рассматриваемых неплоских кольцевых резонаторов существуют области неустойчивости, которые необходимо учитывать при конструировании. Данные области неустойчивости уменьшаются по мере уменьшения угла γ, что связано с уменьшением астигматизма сферического зеркала.

Конфигурация областей устойчивости в плоскости $y\chi$ определяется только значением угла γ. Таким образом, диаграмма устойчивости, построенная для данного значения γ, будет универсальной для всех резонаторов с таким углом падения луча на сферическое зеркало, как плоских, так и неплоских.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-02-16391).

Литература

1. *Кравцов Н.В.* // Квант. электроника. 2001. **31**, № 8. С. 661.
2. *Nilsson A.C., Gustafson E.K., Byer R.L.* // IEEE J. Quantum Electron. 1989. **25**, No. 4. P. 767.
3. *Ищенко Е.Ф.* Открытые оптические резонаторы. М., 1980.
4. *Джеррард А., Берч Дж.М.* Введение в матричную оптику. М., 1978.

Поступила в редакцию
26.03.03